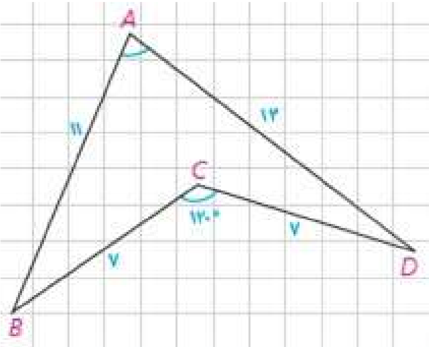
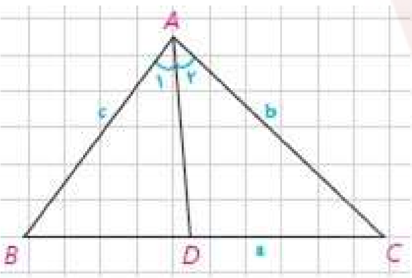
پایه : **یازدهم** رشته : **ریاضی**	**نمونه سوالات** **نام درس :**	نام استاد : آقای **امین پناه**

۱ در شکل، اولاً اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید.
ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.



۲ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله‌ی ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

۳ در شکل زیر AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است.
با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی A به دست آورید.



$$S_{\mathrm{ABC}} = S_{\mathrm{ABD}} + S_{\mathrm{ACD}} \Rightarrow \tfrac{۱}{۲}\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A$$

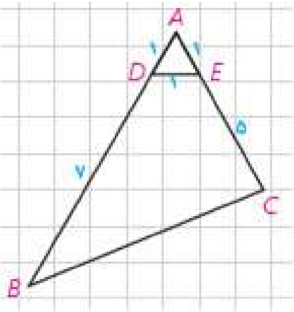
$$= \tfrac{۱}{۲}\ldots\times\ldots\times \mathrm{Sin}\,\tfrac{A}{۲} + \tfrac{۱}{۲}\ldots\times\ldots\times \mathrm{Sin}\,\tfrac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow \mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A = \mathrm{AD.\,Sin}\,\tfrac{A}{۲}(\ldots+\ldots)$$

$$\Rightarrow \mathrm{AD} = \frac{\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A}{(\ldots+\ldots)\,\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}} = \frac{۲\;\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,\frac{A}{۲}\mathrm{Cos}\,\frac{A}{۲}}{(\ldots+\ldots)\,\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}} \Rightarrow \mathrm{AD} = \ldots$$

$$\Rightarrow (\text{نیمساز راس } A)\; d_a = \frac{۲\;\mathrm{bc.\,Cos}\,\frac{A}{۲}}{b+c}$$

۴ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



۵ در مثلث ABC، $AB = ۱۰$، $AC = ۶$ و $\widehat{A} = ۶۰^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.
پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

۶ با پر کردن جاهای خالی با فرض این‌که در شکل مقابل AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

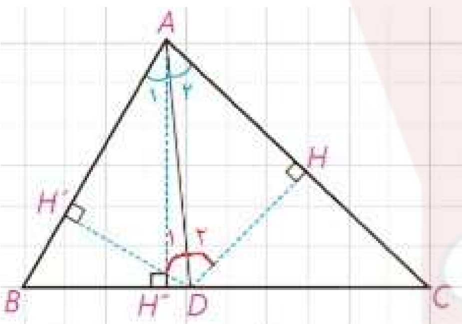
الف) چرا $DH = DH'$؟

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times \dots}{\frac{۱}{۲}DH \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۱)$$

ب)

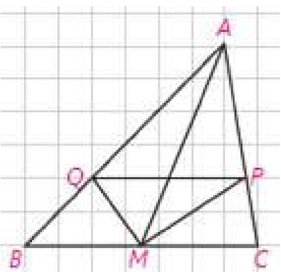
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times \dots}{\frac{۱}{۲}CD \times \dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$



۷ در مثلث ABC، $AB = ۷$ و $AC = ۴$ و $BC = ۱۰$ است. طول نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.

۸ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

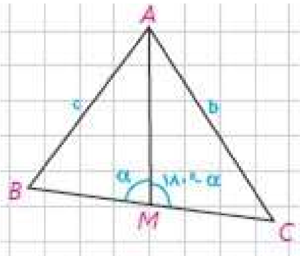


۹ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$

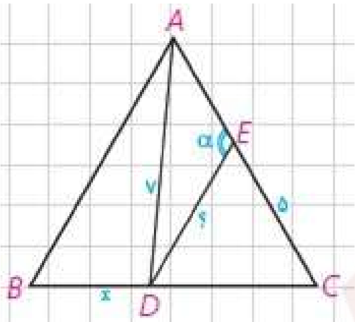
۱۰ در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم $\left(\mathrm{MB}=\mathrm{MC}=\frac{a}{۲}\right)$. با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$b^۲+c^۲=۲\mathrm{AM}^۲+\frac{a^۲}{۲}$ (قضیه‌ی میانه‌ها)

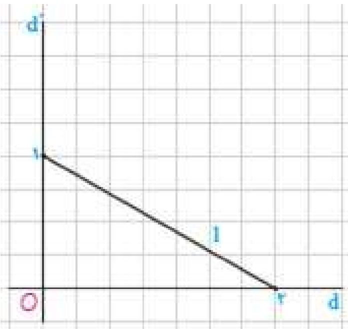
در حالت خاص $\mathrm{AB}=۴$ و $\mathrm{AC}=۶$ و $\mathrm{BC}=۸$، طول میانه AM را به دست آورید.



۱۱ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ ($\mathrm{CD}>\mathrm{BD}$) نقطه‌ی E، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟



۱۲ در شکل روبه‌رو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ تصویر کنیم و آن‌را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و 'd چه‌قدر است؟



۱۳ یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ و به مرکز محل تلاقی قطرها تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.

۱۴ نقطه‌ی A به فاصله‌ی $۲\sqrt{۶}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه‌ی A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه‌ی 'A می‌نامیم. نقطه‌ی A را حول نقطه‌ی 'A به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه دوران می‌دهیم تا نقطه‌ی "A حاصل شود. طول پاره‌خط "AA را محاسبه کنید.

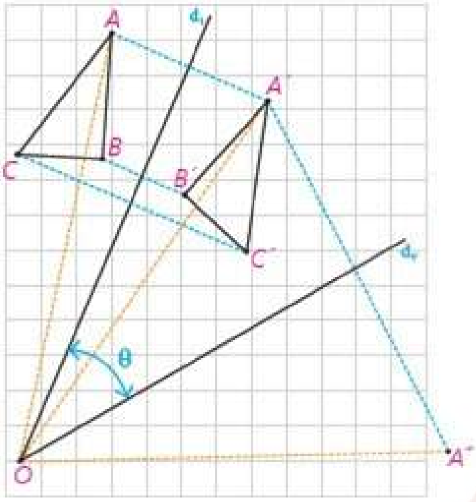
۱۵ نقطه‌ی 'A تصویر نقطه‌ی A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $\mathrm{AA}'=۱۶$ و نقطه O روی خط l و $\mathrm{OA}=۱۰$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط 'OA چه‌قدر است؟

۱۶ در شکل، دو خط $d_{۱}$ و $d_{۲}$ با زاویه‌ی θ یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نسبت به خط $d_{۱}$ است. بازتاب مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ را نسبت به خط $d_{۲}$ رسم کنید و آن‌را $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = ۲\theta$

ب) اندازه‌ی $\widehat{BOB''}$ و $\widehat{COC''}$ چه‌قدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

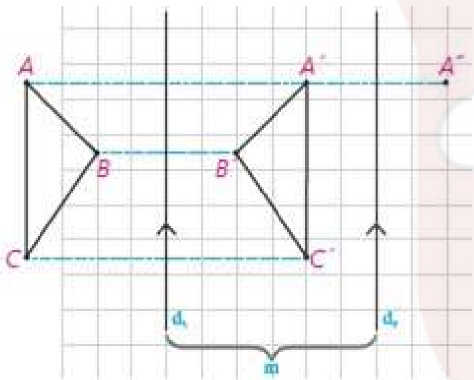


۱۷ در شکل، $d_{۱}$ به موازات $d_{۲}$ و به فاصله‌ی m از آن قرار دارد و مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ بازتاب مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ نسبت به خط $d_{۱}$ است. بازتاب مثلث $A'\overset{\triangle}{B}'C'$ را نسبت به خط $d_{۲}$ رسم کنید و آن‌را $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA' = ۲m$

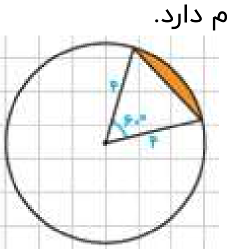
ب) اندازه‌ی BB'' و CC'' چه‌قدر است؟

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۱۸ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.

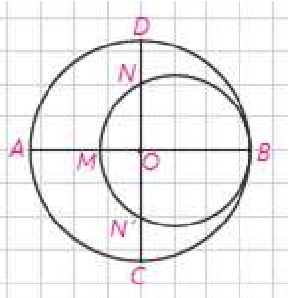
۱۹ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



۲۰ طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه‌ی محدود بین آن‌ها ۱۶π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

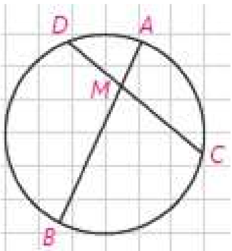
۲۱ طول شعاع‌های دو دایره‌ی متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن‌ها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آن‌ها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آن‌ها مساوی ۸ واحد است.

۲۲ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $\mathrm{AM} = ۱۶$ و $\mathrm{ND} = ۱۰$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.

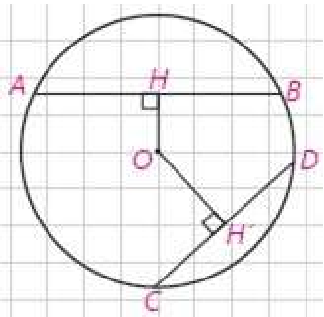


۲۳ از نقطه‌ی P در خارج دایره‌ای مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). هم‌چنین خطی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است و $\mathrm{BC} = ۲۰$. طول‌های PB و PC را به دست آورید.

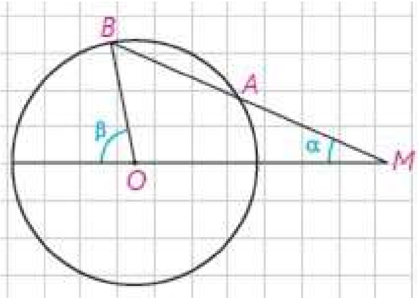
۲۴ در دایره‌ی $C(O, R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $\mathrm{AB} = ۱۱\,\mathrm{cm}$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



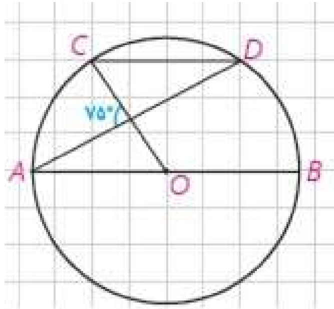
۲۵ در دایره‌ی $C(O, R)$ نشان دهید $\mathrm{AB} > \mathrm{CD}$ اگر و تنها اگر $\mathrm{OH} < \mathrm{OH}'$ (OH و OH' فاصله‌ی O از دو وتر AB و CD هستند.)



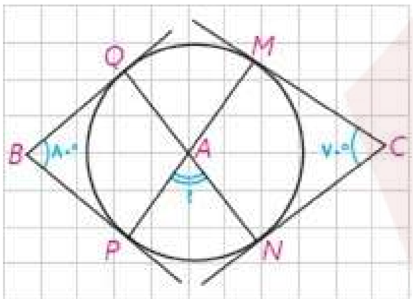
۲۶ دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $\mathrm{MA}=R$؛ نشان دهید: $\beta=۳\alpha$



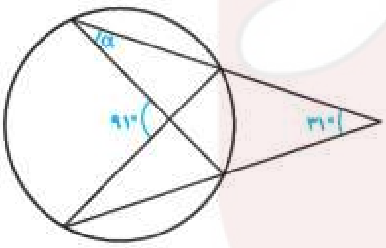
۲۷ در دایره رسم شده شکل مقابل $\mathrm{AB} \,||\, \mathrm{CD}$، اندازه کمان CD را به دست آورید.



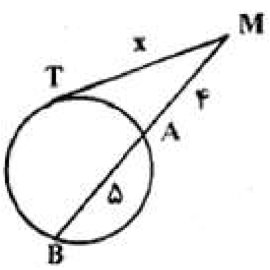
۲۸ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{A}$ چند درجه است؟



۲۹ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی α را به دست آورید.

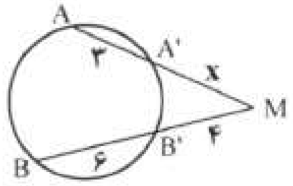


۳۰ در شکل زیر مقدار x را به دست آورید.



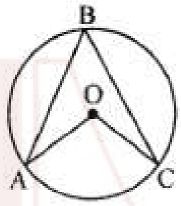
۳۱ دو دایره به شعاع ۱ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۳x+۱$ باشد.

۳۲ در شکل زیر مقدار x را محاسبه کنید.



۳۳ مقدار x را چنان بیابید که اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط المرکزین $d = 13$، برابر $5x - 8$ باشد.

۳۴ در دایره به مرکز O ، اگر $A\widehat{O}C = (3\alpha + 12)^\circ$ و $A\widehat{B}C = (\alpha + 16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازه زاویه مرکزی AOC و محاطی ABC را محاسبه کنید.



۳۵ در سوالات زیر گزینه درست را انتخاب کنید:

الف) مرکز دایره محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع ۲) عمود منصف‌های اضلاع

۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی ۴) میانه‌های اضلاع

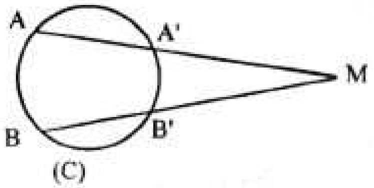
ب) مرکز دایره محیطی هر مثلث، محل برخورد .... آن مثلث است.

۱) ارتفاع‌های اضلاع ۲) عمودمنصف‌های اضلاع

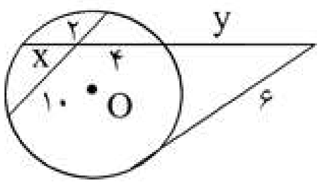
۳) نیم‌سازهای زاویه‌های درونی ۴) میانه‌های اضلاع

۳۶ ثابت کنید اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. آن‌گاه:

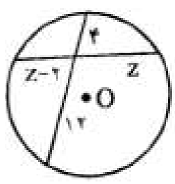
$MA \times MA' = MB \times MB'$



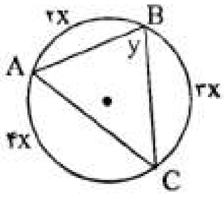
۳۷ در شکل مقابل مقدارهای x و y را به‌دست آورید.



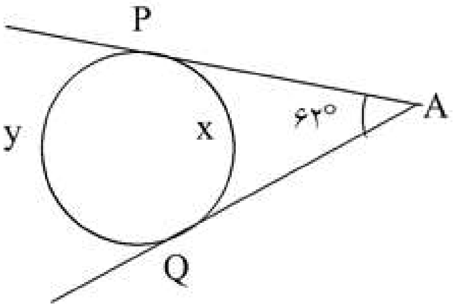
۳۸ با توجه به شکل زیر اندازه‌ی z را تعیین کنید.



۳۹ با توجه به شکل زیر اندازه‌ی x و y را تعیین کنید.



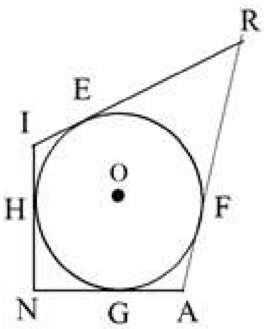
۴۰ با توجه به شکل x و y را بیابید.



۴۱ دو دایره به شعاع‌های ۲ سانتی‌متر و ۷ سانتی‌متر و خط المرکزین برابر $۱ + {}^{۲}\mathrm{x}$ سانتی‌متر مفروضند. اگر اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $\mathrm{x}^{۲}$ سانتی‌متر باشد، مقدار x را محاسبه کنید.

۴۲ ضلع‌های چهارضلعی محیطی IRAN بر دایره مماس‌اند. (شکل روبه‌رو)

ثابت کنید: $\mathrm{IR} + \mathrm{AN} = \mathrm{RA} + NI$



۴۳ اندازه‌ی سه ضلع مثلثی $\mathrm{AB} = ۱۶$ و $\mathrm{AC} = ۲۲$ و $\mathrm{BC} = ۱۹$ ، سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی پاره‌خط هایی که نیم‌ساز درونی زاویه‌ی $\widehat{A}$ بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.

۴۴ دایره‌ی $C(O, ۵)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی $۵\sqrt{۲}$ از مرکز دایره‌ی C داده شده است. MT و MT' در نقاط T و T' بر این دایره مماسند.

الف) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

ب) نوع چهارضلعی OTMT' را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۴۵ در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه $A\widehat{M}B$ و $A\widehat{M}C$ را رسم کنید، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازی‌اند.

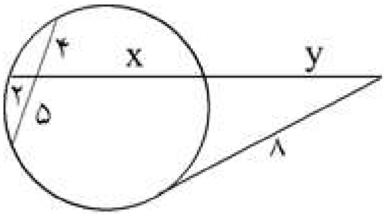
۴۶ دو دایره‌ی $C(O, ۶)$ و $C'(O', ۴)$ مفروضند. اگر $\mathrm{OO}' = d$ باشد، اوضاع دایره را در حالت‌های زیر بنویسید. با ذکر دلیل

۱) $d = ۲$ ۲) $d = ۷$

۴۷ قضیه: اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه‌ی تماس ، واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است.

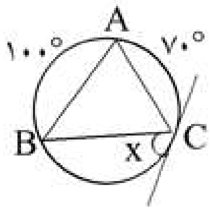
۴۸ شعاع‌های دو دایره ۳ و ۵ سانتی‌متر است. اگر طول مماس مشترک داخلی آن‌ها ۶ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی بین مرکزهای دو دایره را بیابید.

۴۹ با توجه به شکل مقدار x و y را بیابید.



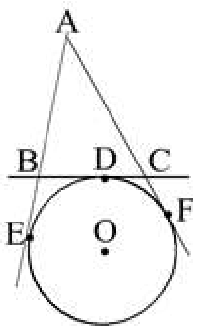
۵۰ مقدار a را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۸ و ۲ و خط المرکزین $d = ۱۰$، برابر $۳a - ۱$ باشد. سپس تعیین کنید این دو دایره چند مماس مشترک داخلی دارد؟

۵۱ مقدار x را به‌دست آورید.

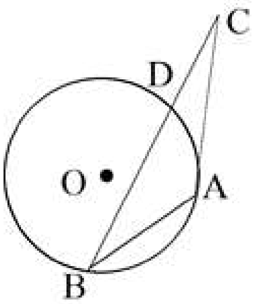


۵۲ طول خط المرکزین در دو دایره‌ی متقاطع به شعاع‌های ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید.

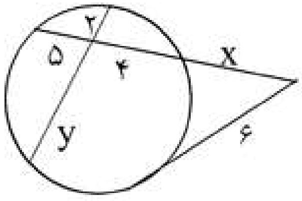
۵۳ خط های AE ، AF و BC به ترتیب در نقطه‌های E ، F و D بر دایره (O) مماس هستند. مماس BC، خط های AE و AF را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کرده است. ثابت کنید که با تغییر مکان نقطه‌ی D روی دایره بین دو نقطه‌ی ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت می‌ماند.



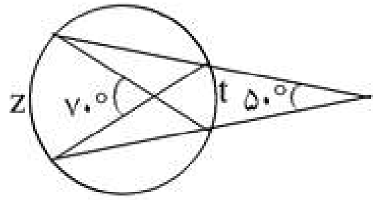
۵۴ در دایره‌ی (O) مماس AC و وتر AB با یک‌دیگر مساوی‌اند.
خط BC دایره را در نقطه‌ی D قطع کرده است.
ثابت کنید مثلث ACD، متساوی الساقین است.



۵۵ در هر یک از شکل‌های زیر مقدار x و y و z و t را به دست آورید.



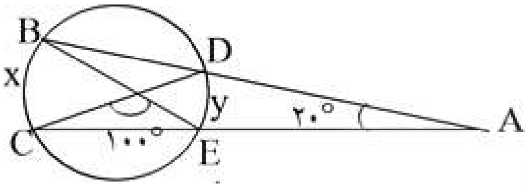
(ب)



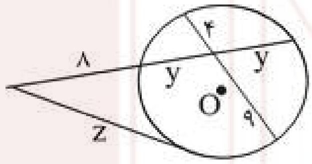
(الف)

۵۶ مقدار m را چنان تعیین کنید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۷ و ۱۲ و خط المرکزین $d = ۱۳$ برابر با $۷m - ۳$ باشد.

۵۷ در شکل زیر مقادیر x و y را بدست آورید.

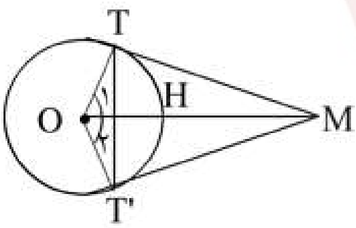


۵۸ در شکل زیر y و z را بیابید.

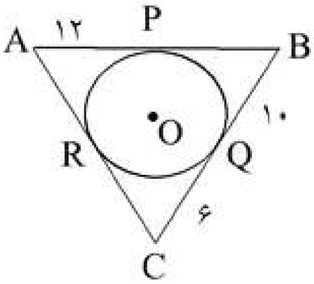


۵۹ در شکل زیر دو خط MT و $\mathrm{MT'}$ در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ی $C(O, R)$ مماسند.

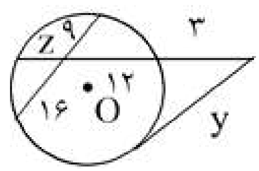
ثابت کنید خط OM نیمساز زاویه‌های $\mathrm{TMT'}$ و $\mathrm{TOT'}$ است.



۶۰ محیط مثلث ABC در شکل زیر را بیابید.

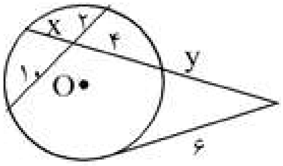


۶۱ در شکل زیر z, y را به دست آورید.

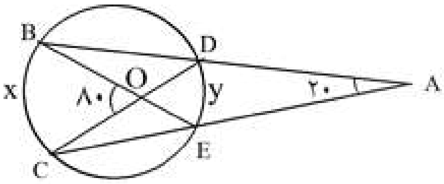


۶۲ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر، مماس برون هستند، مقدار m را چنان تعیین کنید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $m^2 - 2$ باشد.

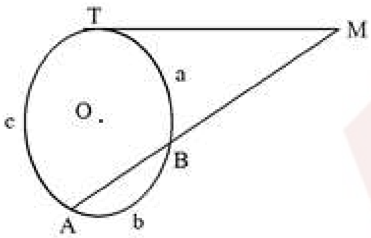
۶۳ در هریک از شکل‌های زیر x و y را محاسبه کنید.



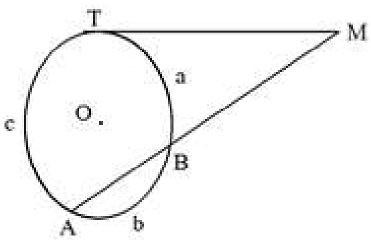
۶۴ در هرکدام از شکل‌های زیر x و y را بیابید.



۶۵ خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\widehat{TB} = a$، $\widehat{BA} = b$ و $\widehat{AT} = c$:
تعیین کنید:
a را در صورتی که $\widehat{M} = 45^\circ, c = 3a$ باشد.



۶۶ خط مماس بر دایره در نقطه‌ی T و امتداد وتر AB در نقطه‌ی M متقاطعند. با فرض $\widehat{TB} = a$، $\widehat{BA} = b$ و $\widehat{AT} = c$:
تعیین کنید:
a را در صورتی که $\widehat{M} = 60^\circ, b = 100^\circ$ باشد.



۶۷ ثابت کنید در یک دایره، کمانهای نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند، و برعکس.

۶۸ در مثلث ABC ، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می‌دهیم.

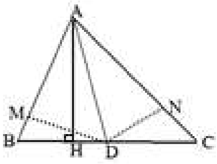
الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده‌ی این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید.

DM و DN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلثهای ABD و ADC ، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

از مقایسه‌ی نسبتها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



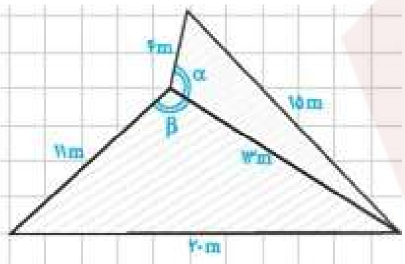
۶۹ سه ضلع مثلثی ۸، ۱۲، ۱۵ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز درونی زاویه‌ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، را تعیین کنید.

۷۰ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.

۷۱ دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

۷۲ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چه‌قدر می‌شود؟

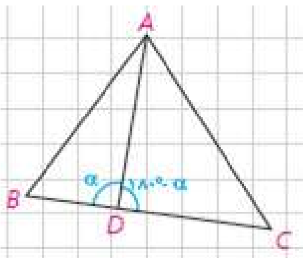
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha = \beta)$



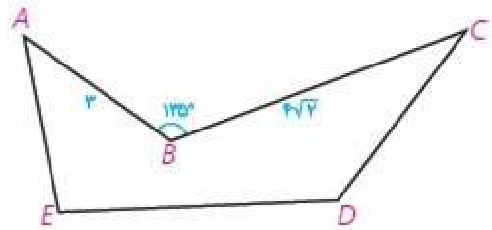
۷۳ در مثلث ABC، نقطه‌ی دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

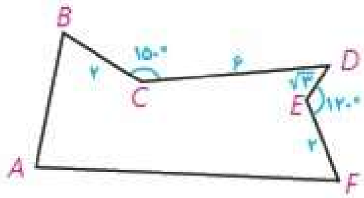
$\mathrm{AB}^{۲}.\mathrm{DC} + \mathrm{AC}^{۲}.\mathrm{DB} = \mathrm{AD}^{۲}.\mathrm{BC} + \mathrm{DB}.\mathrm{DC}.\mathrm{BC}$ (قضیه‌ی استوارت)

به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.



۷۴ زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آن‌که محیط این زمین تغیر کند مساحتش را افزایش دهیم در هر مورد میزان افزایش مساحت را حساب کنید.





۷۵ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{۱}{۲}$ باشد.

الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟

ب) مساحت مثلث A'B'C' چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۷۶ دایره $C(O,R)$ و نقطه‌ی M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه‌ی M در هر حالت رسم کنید.

الف) $k = ۲$

ب) $k = -۲$

پ) $k = \frac{۱}{۲}$

۷۷ در تجانسی با نسبت $k < ۰$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB درنظر بگیرید) نشان دهید:

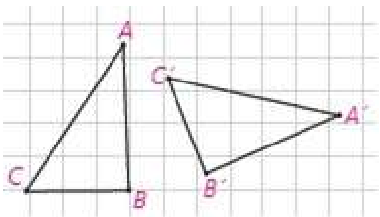
الف) تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

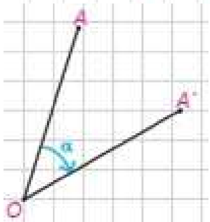
ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند.

۷۸ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) در شکل مقابل نقطه‌ی A' دوران یافته‌ی نقطه‌ی A در دوران به مرکز O و زاویه‌ی α است. نشان دهید عمودمنصف AA' از نقطه‌ی O می‌گذرد.

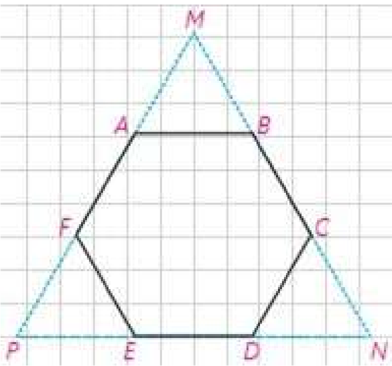
ب) اگر بدانیم $\overset{\triangle}{A'BC}$ دوران یافته‌ی $\overset{\triangle}{ABC}$ است، چگونه می‌توان مرکز دوران را مشخص کرد؟



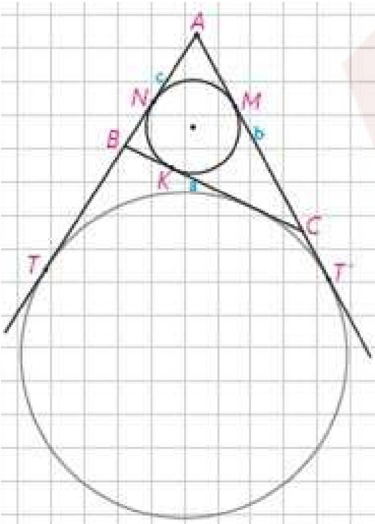


۷۹ در حالتی‌که پاره‌خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر A'B' بازتاب AB باشد، AB و A'B' هم‌اندازه‌اند.

۸۰ شش‌ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.
الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.
ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.
پ) از نقطه‌ی دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، 'TH و "TH را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟
ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:
$$S_{\mathrm{TBC}}+S_{\mathrm{TDE}}+S_{\mathrm{TAF}}=S_{\mathrm{TAB}}+S_{\mathrm{TEF}}+S_{\mathrm{TCD}}$$



۸۱ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و K باشند و T و 'T نقطه‌های تماس دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:
$$\mathrm{AM}=\mathrm{AN}=P-a$$
$$\mathrm{BN}=\mathrm{BK}=P-b, \mathrm{CM}=\mathrm{CK}=P-c$$
$$\mathrm{AT}=\mathrm{AT}'=P$$

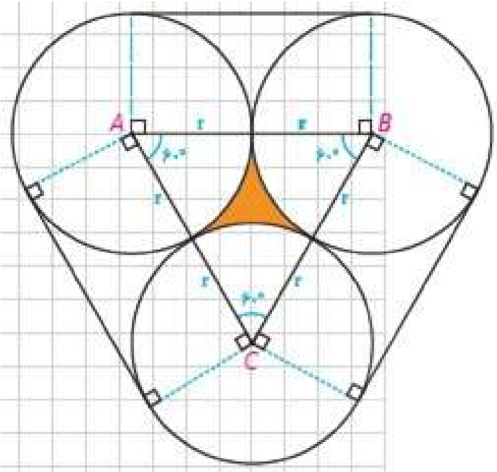


۸۲ الف) اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید:
$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_B}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$
ب) به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:
$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

۸۳ ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه‌ی مقابل به آن ضلع، یک‌دیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث قطع می‌کنند.

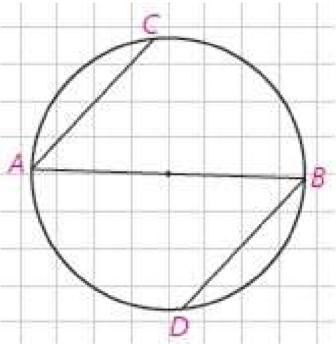
۸۴ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

۸۵ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله‌ی نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $2\pi r + 6r$. هم‌چنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ است.



۸۶ در دایره‌ی $C(O,R)$، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله‌ی O از وتر AB را به دست آورید.

۸۷ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: $AC = BD$.



۸۸ ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی باهم برابرند.

۸۹ قضیه: ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است، و به عکس.

۹۰ قضیه: ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند.

۹۱ قضیه: ثابت کنید اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، قطعه‌ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه‌ی مماس، واسطه‌ی هندسی بین دوقطعه‌ی قاطع است.

۹۲ درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.
مرکز دایره محیطی هر مثلث محل برخورد نیم‌سازهای زاویه‌های درونی مثلث است.

۹۳ جای خالی را به طور مناسب پر کنید.
از هر نقطه خارج یک دایره فقط .... بر آن دایره می‌توان رسم نمود.

۹۴ جای خالی را به طور مناسب پر کنید.
اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو .... یکدیگر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.

۹۵ در مثلث ABC میانه AM و نیم‌سازهای دو زاویه $\widehat{AMB}$ و $\widehat{AMC}$ را رسم کنید، این دو نیم‌ساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.

۹۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید:
در هر دو دایره مماس مشترک‌های خارجی و خط المرکزین همرسند.

۹۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید:
در هر چهارضلعی، اگر مجموع اضلاع مقابل یکسان باشد، آن چهارضلعی محیطی است.

۹۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید:
در دو دایره‌ی مماس برون، فاصله‌ی مرکزهای دو دایره برابر مجموع اندازه‌ی شعاع‌های دو دایره است.

۹۹ قضیه: ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یک‌دیگر باشند. آن چهارضلعی محاطی است.

۱۰۰ دو دایره به شعاع ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۵x + ۲$ باشد.

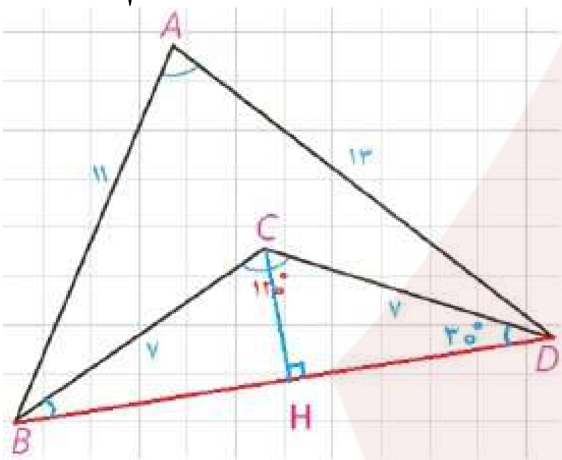
۱ مثلث BCD متساوی‌الساقین است و با توجه به اندازه‌ی زاویه C، اندازه‌ی دو زاویه دیگر هر کدام ۳۰° خواهد بود. در این مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CHD، $\widehat{CDH} = ۳۰^\circ$ در نتیجه: $CH = \frac{۷}{۲}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{BCD} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times BD = \frac{۷}{۴}BD \\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲}\times۷\times۷\times \text{Sin}\, ۱۲۰^\circ = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۷}{۴}BD = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$$

$$P_{ABD} = \frac{۱۱+۱۳+۷\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}-۷\sqrt{۳}\right)\left(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}-۱۱\right)\left(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}-۱۳\right)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲-\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}+۱\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}-۱\right)}$$



$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۴۴-\frac{۱۷۴}{۴}\right)\left(\frac{۱۴۷}{۴}-۱\right)} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳}\ (۱)$$

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲}\times۱۱\times۱۳\times \text{Sin}\, A = \frac{۱۴۳}{۲}\text{Sin}\, A\ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱۴۳}{۲}\text{Sin}\, A = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} \Rightarrow \text{Sin}\, A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = ۶۰$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} - \frac{۴۹}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۹۴}{۴}\sqrt{۳}$$

راه حل دوم: با استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{BCD} : BD^۲ = ۷^۲ + ۷^۲ - ۲(۷)(۷)\,\text{Cos}\, ۱۲۰^\circ$$

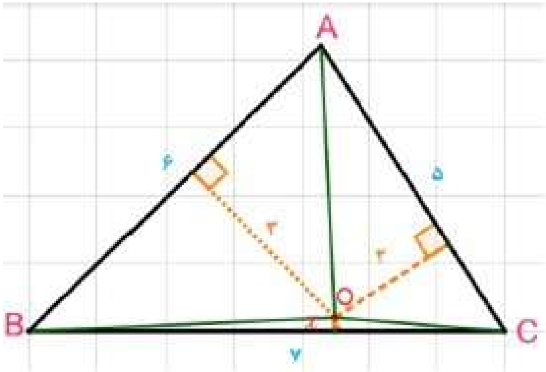
$$\xrightarrow{\text{Cos}\, ۱۲۰^\circ = \frac{-۱}{۲}} BD^۲ = ۴۹ + ۴۹ + ۴۹ = ۳\times۴۹ \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ABD} : BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲\, AB \times AD\, \text{Cos}\, A$$

$$\Rightarrow ۳\times۴۹ = ۱۱^۲ + ۱۳^۲ - ۲(۱۱)(۱۳)\,\text{Cos}\, A \Rightarrow \text{Cos}\, A = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = ۶۰^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} = \frac{۱}{۲}(۱۱)(۱۳)\,\text{Sin}\, ۶۰ - \frac{۱}{۲}(۷)(۷)\,\text{Sin}\, ۱۲۰ = \frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۹۴\sqrt{۳}}{۴}$$

۲ فاصله‌ی O تا ضلع بزرگتر را x در نظر می‌گیریم. داریم:



$$S_{\mathrm{ABC}} = S_{\mathrm{OAB}} + S_{\mathrm{OAC}} + S_{\mathrm{OBC}}$$

$$P_{\mathrm{ABC}} = \frac{۵+۶+۷}{۲} = ۹$$

$$S_{\mathrm{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{۹\times۲\times۳\times۴} = ۶\sqrt{۶}$$

$$S_{\mathrm{AOB}} = \frac{۱}{۲}\times۶\times۳ = ۹$$

$$S_{\mathrm{AOC}} = \frac{۱}{۲}\times۵\times۲ = ۵$$

$$S_{\mathrm{BOC}} = \frac{۱}{۲}\times۷\times x = \frac{۷}{۲}x$$

$$۶\sqrt{۶} = ۹ + ۵ + \frac{۷}{۲}x \Rightarrow ۶\sqrt{۶} - ۱۴ = \frac{۷}{۲}x \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}(۶\sqrt{۶} - ۱۴) \approx ۰/۲$$

۳

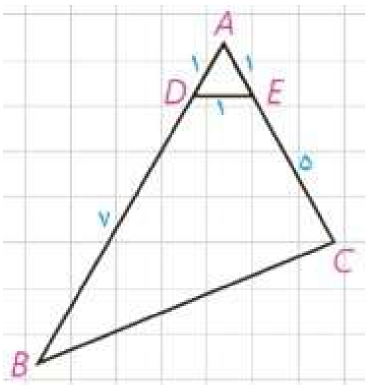
$$S_{\mathrm{ABC}} = S_{\mathrm{ABD}} + S_{\mathrm{ACD}}$$

$$\frac{۱}{۲}\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A = \frac{۱}{۲}\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}\times\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times\mathrm{AD}\times\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow \mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A = \mathrm{AD.\,Sin}\,\frac{A}{۲}(\mathrm{AB}+\mathrm{AC}) \Rightarrow \mathrm{AD} = \frac{\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A}{(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})\,\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}}$$

$$= \frac{۲\,\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,\frac{A}{۲}\mathrm{Cos}\,\frac{A}{۲}}{(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})\,\mathrm{Sin}\,\frac{A}{۲}} \Rightarrow \mathrm{AD} = d_a \Rightarrow (\text{نیمساز راس } A)d_a = \frac{۲\,\mathrm{bc.\,Cos}\,\frac{A}{۲}}{b+c}$$

۴ با توجه به این‌که مثلث ADE متساوی‌الساقین است پس $\widehat{\mathrm{DAE}} = ۶۰^\circ$ در نتیجه:



$$\mathrm{BC}^۲ = \mathrm{AC}^۲ + \mathrm{AB}^۲ - ۲\,\mathrm{AC.\,AB.\,Cos}\,A$$

$$\mathrm{BC}^۲ = ۳۶ + ۶۴ - ۲\times۶\times۸\times\frac{۱}{۲} = ۵۲$$

$$\Rightarrow \mathrm{BC} = ۲\sqrt{۱۳}$$

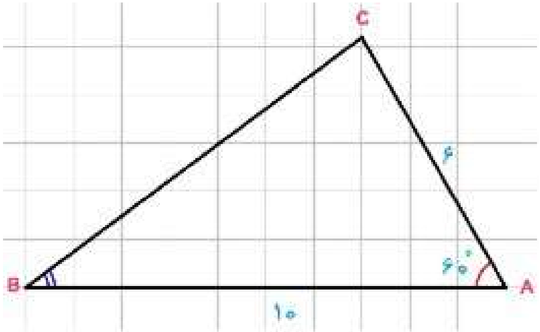
$$S_{\mathrm{BCED}} = S_{\mathrm{ABC}} - S_{\mathrm{ADE}}$$

$$S_{\mathrm{ABC}} = \frac{۱}{۲}.\,\mathrm{AB.\,AC.\,Sin}\,A \Rightarrow S_{\mathrm{ABC}} = \frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{\mathrm{ADE}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{\mathrm{ADE}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱^۲ = S_{\mathrm{ADE}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{\mathrm{BCED}} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

۵



الف) $BC^{۲} = AC^{۲} + AB^{۲} - ۲\, AC.\, AB.\, \operatorname{Cos} A$

$BC^{۲} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲\times ۶\times ۱۰\times \frac{۱}{۲} = ۷۶ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$

ب) $\frac{۱}{۲} AC.\, AB.\, \operatorname{Sin} A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۰\times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$

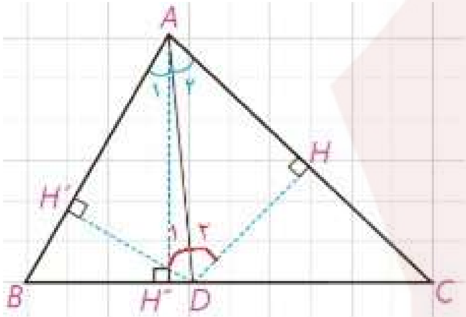
پ) $\frac{\operatorname{Sin} B}{b} = \frac{\operatorname{Sin} A}{a} \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin} B}{۶} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \operatorname{Sin} B = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \Rightarrow \operatorname{Sin} B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$

۶ الف) راه اول:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}_{۱} + \widehat{D}_{۱} = ۹۰^\circ \\ \widehat{A}_{۲} + \widehat{D}_{۲} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_{۱} + \widehat{D}_{۱} = \widehat{A}_{۲} + \widehat{D}_{۲} \xrightarrow{\widehat{A}_{۱} = \widehat{A}_{۲}} \widehat{D}_{۱} = \widehat{D}_{۲}$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADH و ADH' به حالت (ز ض ز) همنهشت هستند بنابراین $DH = DH'$

راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH = DH'$

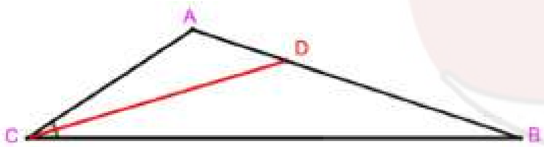


ب) $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲} DH' \times AB}{\frac{۱}{۲} DH \times AC} = \frac{AB}{AC}$ (۱)

$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲} BD \times AH''}{\frac{۱}{۲} CD \times AH''} = \frac{BD}{CD}$ (۲)

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

۷



$CD^{۲} = AC.\, BC - AD.\, BC$

$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰+۴}{۴} = \frac{BD+DA}{DA}$

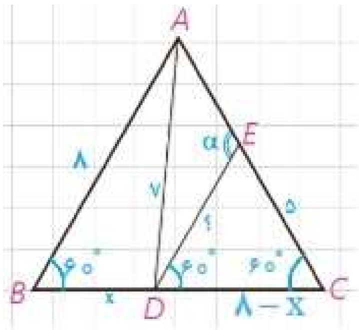
$\Rightarrow \frac{۱۴}{۴} = \frac{۷}{DA} \Rightarrow DA = \frac{۲۸}{۱۴} = ۲ \Rightarrow BD = ۷ - ۲ = ۵$

$CD^{۲} = ۴\times ۱۰ - ۲\times ۵ = ۳۰ \Rightarrow CD = \sqrt{۳۰}$

۸ در مثلث AMB پاره‌خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره‌خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AM}{MB}=\frac{AQ}{QB}\xrightarrow{MB=MC}\frac{AM}{MC}=\frac{AQ}{QB}\\ \frac{AM}{MC}=\frac{AP}{PC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AQ}{QB}=\frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \,||\, BC$$

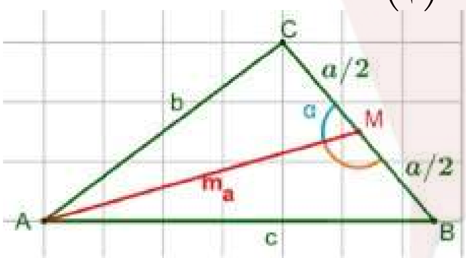


۹
$$AB=AC=BC=۸\,,\ AD=۷\,,\ DB=x$$
$$DC=x-۸\,,\ DB<DC$$
$$AB^۲.DC+AC^۲.DB=AD^۲.BC+DB.DC.BC$$
$$\Rightarrow ۶۴(۸-x)+۶۴x=۴۹\times ۸+۸x(۸-x)$$
$$\Rightarrow ۶۴\times ۸-\cancel{۶۴x}+\cancel{۶۴x}=۴۹\times ۸+۸x(۸-x)$$

$$\xrightarrow{\div ۸} ۶۴=۴۹+۸x-x^۲\Rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰\Rightarrow (x-۳)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۳, x=۵$$

$$\xrightarrow{DB<DC} x=DB=۳, DC=۵$$

۱۰
$$\overset{\triangle}{ACM}: b^۲=\left(\frac{a}{۲}\right)^۲+AM^۲-۲\times\frac{a}{۲}\times AM\times \text{Cos}\,\alpha$$
$$b^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲-a.AM.\text{Cos}\,\alpha\ (۱)$$
$$\overset{\triangle}{ABM}: c^۲=\left(\frac{a}{۲}\right)^۲+AM^۲-۲\times\frac{c}{۲}\times AM\times \text{Cos}\,(۱۸۰^\circ-\alpha)$$



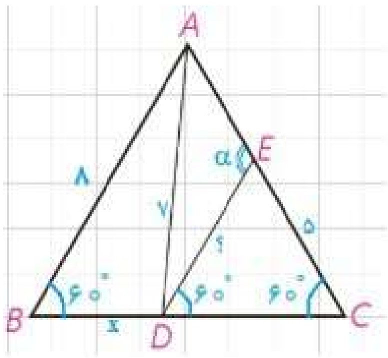
$$c^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲+a.AM.\text{Cos}\,\alpha\ \ (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۴}+AM^۲-a.AM.\text{Cos}\,\alpha+\frac{a^۲}{۴}+AM^۲+a.AM.\text{Cos}\,\alpha$$

$$\Rightarrow b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۲}+۲AM^۲$$

$$AB=c=۴\,, AC=b=۶\,, BC=a=۸$$

$$b^۲+c^۲=\frac{a^۲}{۲}+۲AM\Rightarrow AM=\frac{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}{۴}\Rightarrow AM=\frac{۲(۳۶+۱۶)-۶۴}{۴}\Rightarrow AM=۱۰$$

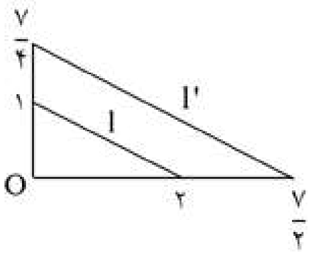
۱۱ 

$$۷^۲ = x^۲ + ۸^۲ - ۲\times x \times ۸ \times \mathrm{Cos}\,۶۰^\circ \Rightarrow ۴۹ = x^۲ + ۶۴ - ۸x$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x = ۵\,,\ x = ۳$$
$$\xrightarrow{\mathrm{BD}<\mathrm{DC}} \mathrm{BD} = ۳\,,\ \mathrm{DC} = ۵$$

$\mathrm{DC} = \mathrm{CE} = ۵$ در نتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه ۶۰° دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی $\mathrm{DE} = ۵$. در مثلث DCE زاویه‌ی α یک زاویه خارجی است پس:

$$\alpha = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۲۰^\circ$$

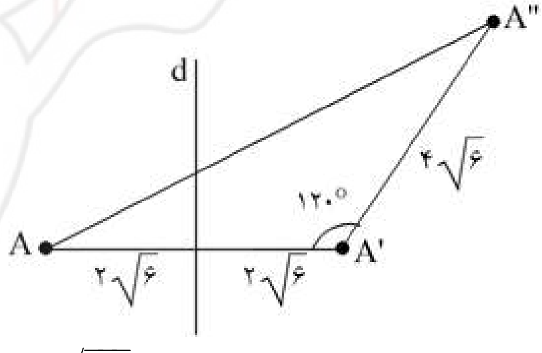
۱۲ با توجه به نسبت تجانس $\frac{۷}{۴}$ مثلث بزرگتر با وتر l' ایجاد می‌شود. حال اختلاف مساحت‌های مثلث‌ها برابر مساحت خواسته شده است:



$$S_{\text{مطلوب}} = S_{\text{مثلث بزرگ}} - S_{\text{مثلث کوچک}} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۴}\times\frac{۷}{۲} - \frac{۱}{۲}\times ۱ \times ۲ = \frac{۳۳}{۱۶}$$

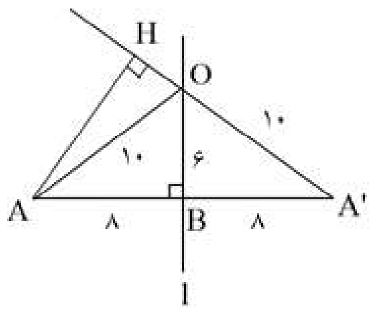
۱۳
$$\frac{S_{\text{تصویر مربع}}}{S_{\text{مربع اولیه}}} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\text{تصویر}} = \frac{۴}{۹} S_{\text{مربع}} \quad \text{و} \quad S_{\text{مربع}} - S_{\text{تصویر}} = ۵ \Rightarrow \frac{۵}{۹} S_{\text{مربع}} = ۵$$
$$\Rightarrow S_{\text{مربع اولیه}} = ۹ = a^۲ \Rightarrow a = ۳ \quad \text{و} \quad \text{محیط مربع اولیه} = ۴a = ۱۲$$

۱۴ بنا بر فرض سؤال، شکل زیر را داریم و برای آن قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم:



$$\mathrm{AA''}^۲ = (۴\sqrt{۶})^۲ + (۴\sqrt{۶})^۲ - ۲\times ۴\sqrt{۶} \times ۴\sqrt{۶} \times \mathrm{Cos}\,۱۲۰ \Rightarrow \mathrm{AA''} = \sqrt{۲۸۸}$$

۱۵ بنا بر فرض سؤال، شکل مقابل را داریم و مساحت مثلث AOA' را از دو طریق نوشته و برابر می‌گذاریم تا AH حاصل شود:



$$۲S_{\mathrm{AOA}'} = \mathrm{AH} \times \mathrm{OA}' = \mathrm{OB} \times \mathrm{AA}' \Rightarrow \mathrm{AH} = \frac{۶ \times ۱۶}{۱۰} = ۹/۶$$

۱۶ الف) خط $d_۱$ محور بازتاب است پس نیمساز زاویه AOA' است یعنی: $\widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$

خط $d_۲$ محور بازتاب است پس نیمساز زاویه A'OA" است یعنی: $\widehat{O}_۳ = \widehat{O}_۴$

$$\widehat{\mathrm{AOA}}'' = \widehat{O}_۱ + \widehat{O}_۲ + \widehat{O}_۳ + \widehat{O}_۴ \xrightarrow[\widehat{O}_۳=\widehat{O}_۴]{\widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲}$$

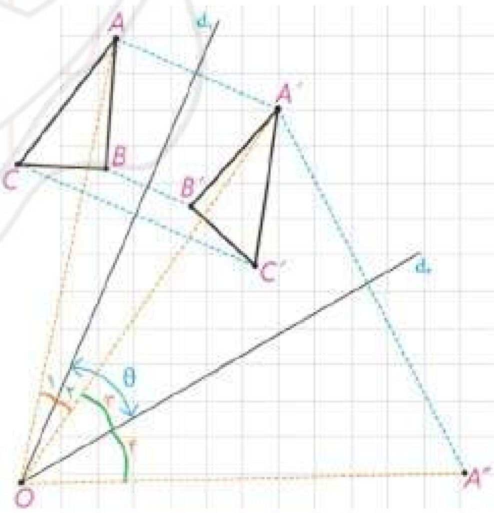
$$\widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\widehat{\mathrm{O}}_۲ + ۲\widehat{\mathrm{O}}_۳ \Rightarrow \widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\underbrace{\left(\widehat{\mathrm{O}}_۲ + \widehat{\mathrm{O}}_۳\right)}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \widehat{\mathrm{AOA}}'' = ۲\theta$$

ب) بنابر اثبات الف به روش مشابه: $\widehat{\mathrm{BOB}}'' = \widehat{\mathrm{COC}}'' = ۲\theta$

پ) با دورانی به مرکز O نقطه‌ی برخورد دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ و زاویه‌ای به اندازه‌ی دو برابر زاویه بین دو خط (۲θ) می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.



۱۷

الف) $AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A''$

$$\xrightarrow[A'H'=H'A'']{AH=HA'} AA' = ۲HA' + ۲A'H'$$

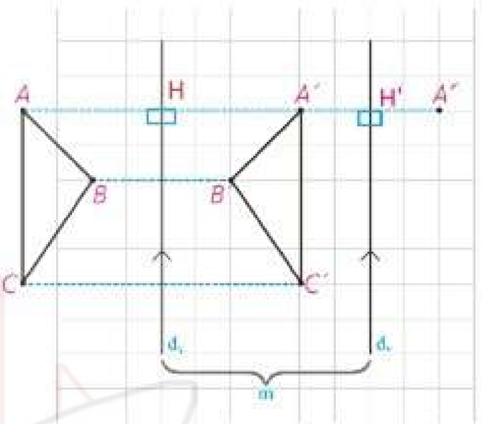
$$\Rightarrow AA'' = ۲\underbrace{(HA' + A'H')}_{m} \Rightarrow AA'' = ۲m$$

ب) بنا بر اثبات قسمت الف به روش مشابه نتیجه می‌گیریم که:

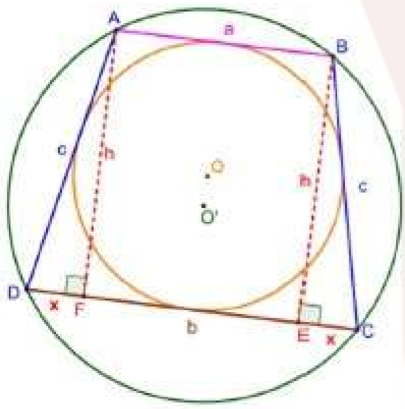
$BB'' = CC'' = ۲m$

پ) با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازه‌ی آن دو برابر فاصله‌ی بین دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ یعنی $۲m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است، می‌توان مثلث $A''\overset{\triangle}{B}''C''$ را تصویر مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی یک‌دیگر هستند یک انتقال است.



۱۸ چون ذوزنقه‌ی ABCD محاطی است پس متساوی‌الساقین است و چون محیطی است مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع مقابل دیگر برابر است. در نتیجه: $۲c = a + b$ و مثلث ADF قائم‌الزاویه است.



$$۲c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{۲}\ ,\ b = ۲x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{۲}$$

$$h^۲ = c^۲ - x^۲ \Rightarrow h^۲ = \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{b-a}{۲}\right)^۲$$

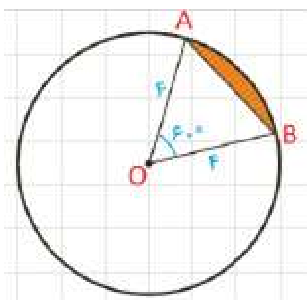
$$\Rightarrow h^۲ = \frac{۴ab}{۴} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b)\times h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{ab}$$

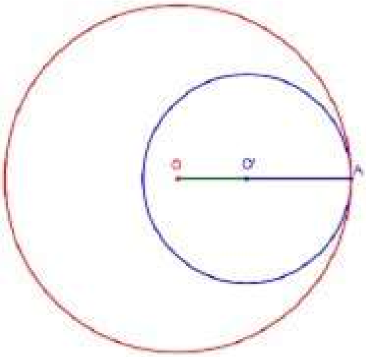
۱۹ مثلث OAB متساوی‌الساقین است و $\widehat{O} = ۶۰^\circ$ پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع ۶۰ درجه = مساحت قسمت رنگی (A)

$$A = \frac{\pi r^۲}{۳۶۰}\alpha - \frac{\sqrt{۳}}{۴}\times r^۲ \Rightarrow A = \frac{۱۶\pi}{۳۶۰}\times ۶۰ - ۴\sqrt{۳} = \frac{۸}{۳}\pi - ۴\sqrt{۳}$$



۲۰ با توجه به شکل $OA=R$ و $O'A=R'$ در نتیجه:



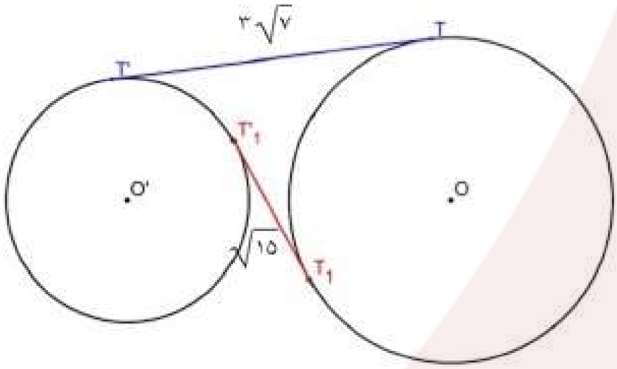
$\pi R^۲-\pi R'^۲=۱۶\pi$ = مساحت ناحیه محدود بین دو دایره

$$\Rightarrow R^۲-R'^۲=۱۶ \Rightarrow (R-R')(R+R')=۱۶$$

$$\xrightarrow{OO'=R-R'=۲} ۲(R+R')=۱۶\Rightarrow R+R'=۸$$

$$\begin{cases}R+R'=۸\\ R-R'=۲\end{cases}\Rightarrow ۲R=۱۰\Rightarrow R=۵, R'=۳$$

۲۱

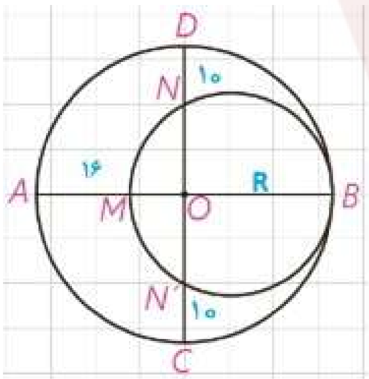


$$\begin{cases}TT'^۲=d^۲-(R'-R)^۲\\ T_۱T_۲^{\,۲}=d^۲-(R+R')^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۶۳=۶۴-(R-R')^۲\\ ۱۵=۶۴-(R+R')^۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}R-R'=۱\\ R+R'=۷\end{cases}\Rightarrow ۲R=۸\Rightarrow R=۴\Rightarrow R'=۳$$

۲۲

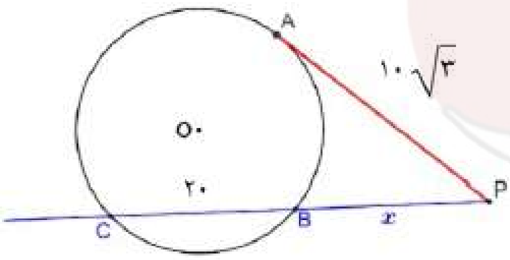


$$OB.OM=ON.ON'\Rightarrow R(R-۱۶)=(R-۱۰)(R-۱۰)$$

$$R^۲-۱۶R=R^۲-۲۰R+۱۰۰\Rightarrow ۴R=۱۰۰\Rightarrow R=۲۵$$

$$R'=\frac{MB}{۲}\Rightarrow R'=\frac{۲R-۱۶}{۲}\Rightarrow R'=\frac{۵۰-۱۶}{۲}=۱۷$$

۲۳

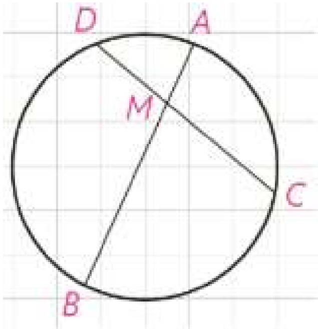


$$PA^۲=PB.PC\rightarrow (۱۰\sqrt{۳})^۲=x(x+۲۰)$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x-۳۰۰=۰\Rightarrow (x-۱۰)(x+۳۰)=۰$$

$\Rightarrow x=۱۰\ ,\ x=-۳۰$ غ ق ق

$$\Rightarrow PB=۱۰\ ,\ PC=۳۰$$



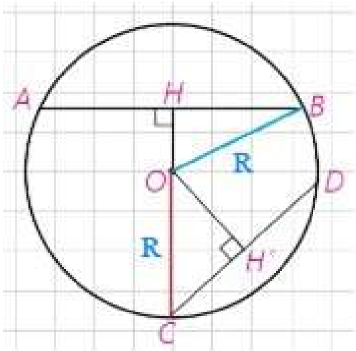
۲۴

$$\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{DM}{DC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{DM}{۹}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow DM=۳\Rightarrow MC=۶$$

$$DM.MC=AM.BM\xrightarrow{AM=x}۳\times۶=x(۱۱-x)$$

$$x^{۲}-۱۱x+۱۸=۰\Rightarrow(x-۹)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۲\quad,\quad x=۹$$

پس $\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۹}$ یا $\frac{AM}{MB}=\frac{۹}{۲}$



۲۵

فرض : $AB>CD$ حکم : $OH<OH'$

$$OB=OC=R\quad,\quad BH=\frac{AB}{۲}\quad,\quad CH'=\frac{CD}{۲}\ (۱)$$

$$\overset{\triangle}{OBH}:H=۹۰^{\circ}\Rightarrow BH^{۲}=R^{۲}-OH^{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OCH'}=H'=۹۰^{\circ}\Rightarrow CH'^{۲}=R^{۲}-OH'^{۲}$$

$$AB>CD\Rightarrow\frac{AB}{۲}>\frac{CD}{۲}\xrightarrow{(۱)}BH>CH'\Rightarrow BH^{۲}>CH'^{۲}\Rightarrow R^{۲}-OH^{۲}>R^{۲}-OH'^{۲}$$

$$\Rightarrow -OH^{۲}>-OH'^{۲}\xrightarrow{\times(-۱)}OH^{۲}<OH'^{۲}\xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰}OH<OH'$$

فرض : $OH<OH'$ حکم : $AB>CD$

$$OB=OC=R\quad,۲BH=AB\quad,۲\,CH'=CD\quad(۱)$$

$$\overset{\triangle}{OBH}:H=۹۰^{\circ}\Rightarrow OH^{۲}=R^{۲}-BH^{۲}$$

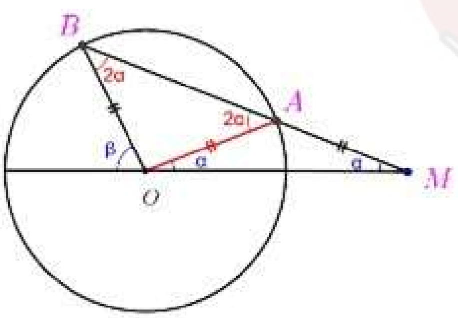
$$\overset{\triangle}{OCH'}:H'=۹۰^{\circ}\Rightarrow OH'^{۲}=R^{۲}-CH'^{۲}$$

$$OH<OH'\Rightarrow R^{۲}-BH^{۲}<R^{۲}-CH'^{۲}\Rightarrow -BH^{۲}<-CH'^{۲}\xrightarrow{\times(-۱)}BH^{۲}>CH'^{۲}$$

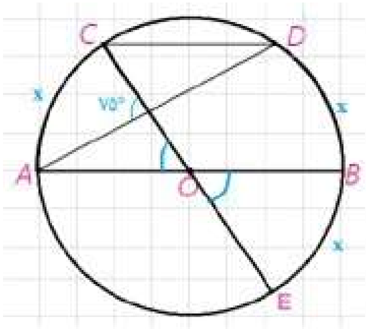
$$\xrightarrow[CH'>۰]{BH>۰}BH>CH'\xrightarrow{(۱)}AB>CD$$

۲۶ با توجه به فرض مسئله، مثلث‌های OAM و OAB متساوی‌الساقین هستند.

در مثلث OBM داریم:

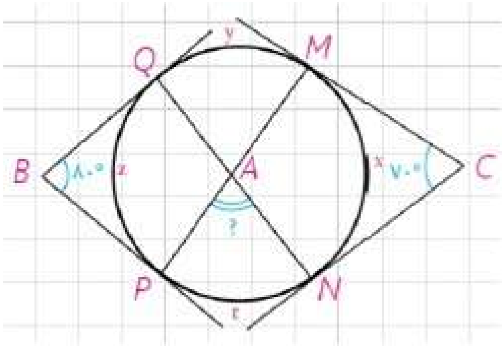


$$\beta=۲\alpha+\alpha=۳\alpha$$



$$۷۵^\circ = \frac{(x+x)+x}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = ۳x \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۲x \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۸۰^\circ$$ ۲۷



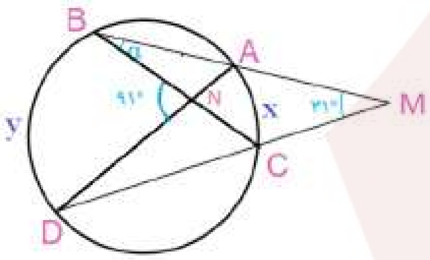
$$۷۰^\circ = \frac{(y+z+t)-x}{۲} \Rightarrow ۱۴۰^\circ = (y+z+t)-x$$

$$۸۰^\circ = \frac{(y+x+t)-z}{۲} \Rightarrow ۱۸۰^\circ = (y+x+t)-z$$

$$\begin{cases} ۱۴۰^\circ = y+z+t-x \\ ۱۶۰^\circ = y+x+t-z \end{cases} \Rightarrow ۳۰۰^\circ = ۲(y+t)$$ ۲۸

$$\Rightarrow y+t = ۱۵۰^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{y+t}{۲} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{۱۵۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ$$



$$\widehat{M} = \frac{y-x}{۲} \Rightarrow ۲\times ۳۱^\circ = y-x$$

$$\widehat{N} = \frac{y+x}{۲} \Rightarrow ۲\times ۹۱^\circ = y+x$$ ۲۹

$$\Rightarrow \begin{cases} y-x = ۶۲^\circ \\ y+x = ۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow ۲y = ۲۴۴^\circ \Rightarrow y = ۱۲۲^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

$$MT^۲ = MA \times MB \; (۰/۲۵) \Rightarrow x^۲ = ۴\times ۹ \; (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۶ \; (۰/۲۵)$$ ۳۰

$$\begin{matrix} R = ۴ \\ R' = ۱ \end{matrix} \Rightarrow d = ۵ \; (۰/۲۵) \quad TT' = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲} \quad (۰/۲۵)$$ ۳۱

$$۳x + ۱ = \sqrt{۵^۲ - (۴-۱)^۲}$$

$$۳x + ۱ = \sqrt{۲۵ - ۹} = \sqrt{۱۶} = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x = ۱ \quad (۰/۲۵)$$

ص ۸۲

۳۲ با توجه به رابطهٔ طولی در مثلث داریم:

$$MA' \times MA = MB' \times MB$$

$$x(x+۳) = ۴(۴+۶)$$

$$x^۲ + ۳x - ۴۰ = ۰ \Rightarrow (x+۸)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

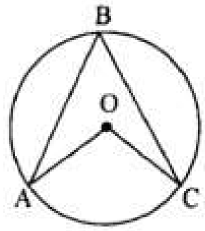
۳۳ ص ۸۲

$$R=۲ \quad R'=۳ \quad d=۱۳ \qquad TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$۵x-۸=\sqrt{۱۳^۲-(۲+۳)^۲}$$

$$۵x-۸=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x=۴ \ (۰/۲۵)$$

۳۴



$$\begin{cases} A\widehat{B}C=\frac{\widehat{AC}}{۲} \\ A\widehat{O}C=\widehat{AC} \end{cases} (۰/۵) \Rightarrow \alpha+۱۶=\frac{۳\alpha+۱۲}{۲} \Rightarrow \alpha=۲۰ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} A\widehat{B}C=۳۶^\circ \\ A\widehat{O}C=۷۲^\circ \end{matrix} (۰/۲۵)$$

ص ۶۷

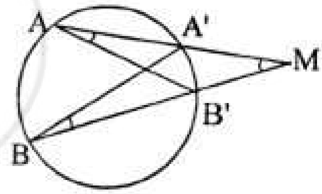
۳۵ الف) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۰/۲۵) ص ۵۳

ب) گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۰/۲۵) ص ۵۹

۳۶ ابتدا A را به B' و B را به A' وصل می‌کنیم. دو مثلث AMB' و $A'MB$ متشابه‌اند ۰/۲۵ زیرا:

$$\begin{cases} \text{زاویه ی محاطی } \widehat{A}=\widehat{B}=\frac{\widehat{A'B'}}{۲} \ ۰/۵ \\ \text{مشترک } \widehat{M} \end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{MB'}{MA'} \ ۰/۲۵$$

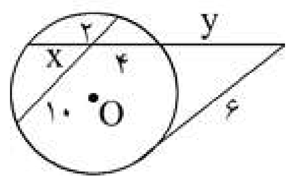
$$\Rightarrow MA \times MA'=MB \times MB'$$



۳۷

$$۴\times x=۲\times ۱۰ \ ۰/۲۵ \Rightarrow x=۵ \ ۰/۲۵$$

$$۶^۲=y(y+۹) \ ۰/۲۵ \Rightarrow y^۲+۹y-۳۶=۰ \Rightarrow y=۳ \ ۰/۲۵$$



۳۸

$$۴\times ۱۲=z(z-۲) \ ۰/۵$$

$$z^۲-۲z-۴۸=۰ \Rightarrow (z-۸)(z+۶)=۰ \ ۰/۲۵ \Rightarrow z=۸, z=-۶ \Rightarrow z=۸ \text{ ق ق } ۰/۲۵$$

۳۹

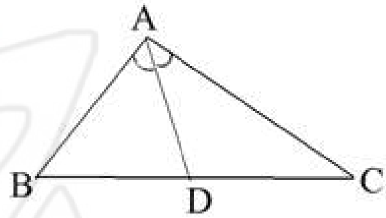
$$\begin{cases} ۲x+۳x+۴x=۳۶۰ \ ۰/۲۵ \Rightarrow x=۴۰ \ ۰/۲۵ \\ y=\frac{۴x}{۲} \ ۰/۲۵ \Rightarrow y=۲x \Rightarrow y=۸۰ \ ۰/۲۵ \end{cases}$$

۴۰
$$\frac{y-x}{۲} = ۶۲^\circ \quad ۰/۲۵$$
$$\to y = ۲۴۲^\circ, x = ۱۱۸^\circ \quad ۰/۲۵$$
$$x + y = ۳۶۰^\circ \quad ۰/۲۵$$

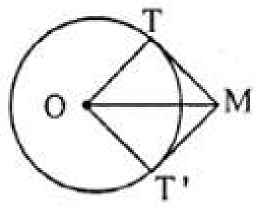
۴۱
مماس مشترک خارجی $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$
$$۲x = \sqrt{(۲x+۱)^۲ - (۷-۲)^۲}$$
$$\to ۴x^۲ = ۴x^۲ + ۴x + ۱ - ۲۵ \to x = ۶$$

۴۲ می‌دانیم اگر از هر نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم آن‌گاه اندازه‌های دو مماس برابرند، بنابراین:
$$\begin{cases} RE = RF \\ IE = IH \\ NG = NH \\ AG = AF \end{cases}$$
رابطه‌ها را با هم جمع می‌کنیم. $\Rightarrow RE + IE + NG + AG = RF + IH + NH + AF$
$$\Rightarrow IR + AN = RA + NI$$

۴۳ نیمساز زاویه $\widehat{A}$ ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. بنابراین:
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$
$$\Rightarrow \frac{BD}{DC+BD} = \frac{AB}{AC+AB} \to \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC+AB}$$
$$\Rightarrow \frac{BD}{۱۹} = \frac{۱۶}{۳۸} \Rightarrow BD = ۸$$
$$\Rightarrow DC = ۱۹ - ۸ = ۱۱$$



۴۴
الف) $O\overset{\triangle}{T}M : OT \perp MT \Rightarrow O\overset{\triangle}{T}M = ۹۰^\circ \quad ۰/۲۵$
$$\Rightarrow MT = \sqrt{OM^۲ - OT^۲} = \sqrt{۵۰ - ۲۵} = ۵ \quad ۰/۲۵$$
ب) $\Rightarrow MT = MT' = ۵ \quad ۰/۲۵$
$$\left.\begin{matrix} MT = MT' = OT = OT' = ۵ \\ T = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ OTMT' مربع است. ۰/۲۵



رسم شکل ۰/۲۵

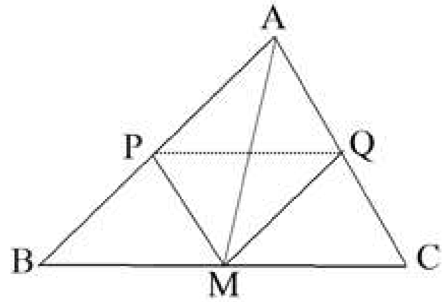
۴۵

$$\overset{\Delta}{\text{AMC}} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{\text{MQ}} \frac{\text{MA}}{\text{MC}}=\frac{\text{AQ}}{\text{QC}}$$ ۰/۲۵

$$\xrightarrow{\text{MC=MB}} \frac{\text{AQ}}{\text{QC}} = \frac{\text{AP}}{\text{PB}} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} \text{PQ} \parallel \text{BC}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\overset{\Delta}{\text{AMB}} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{\text{MP}} \frac{\text{MA}}{\text{MB}}=\frac{\text{AP}}{\text{PB}}$$ ۰/۲۵



۴۶ ۱) ۰/۲۵ دو دایره مماس درون ۰/۲۵ $d = ۲, R = ۶, R' = ۴ \to d = R - R'$

۲) ۰/۲۵ دو دایره متقاطع ۰/۲۵ $d = ۷, R = ۶, R' = ۴ \to R - R' < d < R + R'$

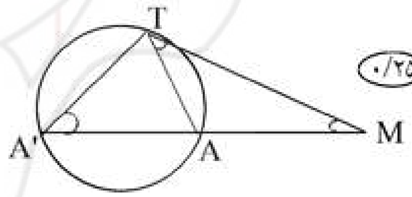
۴۷ دایره (C) و نقطه M را در خارج آن در نظر می‌گیریم. مماس MT و قاطع 'MAA را نسبت به این دایره رسم می‌کنیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم $\text{MT}^۲ = \text{MA}.\text{MA}'$ از T به A و 'A وصل می‌کنیم. دو مثلث $\overset{\triangle}{MAT}$ و $\overset{\triangle}{MA'T}$ متشابه‌اند . زیرا:

$$\begin{cases} A\widehat{T}M = A\widehat{A}'T = \frac{\widehat{\text{AT}}}{۲} & ۰/۲۵ \\ \widehat{M} = \widehat{M} & ۰/۲۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{MT}}{\text{MA}} = \frac{\text{MA}'}{\text{MT}} \ ۰/۲۵ \ \text{MT}^۲ = \text{MA}.\text{MA}' \ ۰/۲۵$$

رسم شکل ۰/۲۵



۴۸

$$\text{TT}' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$$

$$۶ = \sqrt{d^۲ - (۵ + ۳)^۲} \to ۳۶ = d^۲ - ۶۴ \ ۰/۲۵ \to d^۲ = ۱۰۰ \to d = ۱۰ \ ۰/۲۵$$

۴۹

$$۲x = ۲۰ \Rightarrow x = ۱۰ \quad ۰/۲۵$$

$$y(y + ۱۰ + ۲) = ۶۴ \ ۰/۲۵ \Rightarrow y^۲ + ۱۲y - ۶۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (y + ۱۶)(y - ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۴ & ۰/۲۵ \\ y = -۱۶ \ \text{غ ق ق} & ۰/۲۵ \end{cases}$$

۵۰

$$\text{TT}' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \ ۰/۲۵ \Rightarrow ۳a - ۱ = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} \ ۰/۲۵ = ۸ \Rightarrow a = ۳ \ ۰/۲۵$$

این دو دایره یک مماس مشترک داخلی دارند. ۰/۲۵ زیرا مماس برون هستند. $(d = R + R')$

۵۱ $\overset{\frown}{BC} + ۱۰۰^\circ + ۷۰^\circ = ۳۶۰^\circ \xrightarrow{۰/۲۵} \overset{\frown}{BC} = ۱۹۰^\circ$

$(\text{زاویه ظلی})\ \widehat{x} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \xrightarrow{۰/۲۵} \frac{۱۹۰^\circ}{۲} = ۹۵^\circ$ ۰/۲۵

۵۲ $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow TT' = \sqrt{۳۶ - ۱}$ ۰/۲۵ $\Rightarrow TT' = \sqrt{۳۵}$

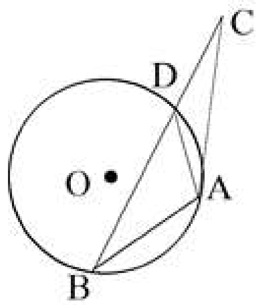
۵۳ می‌دانیم که طول مماس‌های رسم شده از نقطه‌ای خارج از یک دایره با هم برابر است.

محیط مثلث $= AB + AC + BC = AB + AC + BD + DC = AB + AC + BE + CF$ ۰/۷۵

$= AE + AF = ۲AE$ ۰/۲۵

بنابراین محیط مثلث ABC مستقل از نقطه‌ی D بوده و مقدار آن ثابت است.

۵۴
$$\overset{\triangle}{ABC}: \begin{cases} AC = AB \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \ ۰/۲۵ \\ \widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\ \text{محاطی}\ ۰/۲۵ \Rightarrow D\widehat{A}C = \widehat{C} \Rightarrow DC = DA\ ۰/۲۵ \\ D\widehat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\ \text{ظلی}\ ۰/۲۵ \end{cases}$$



۵۵ الف)
$$۷۰^\circ = \frac{z+t}{۲} \Rightarrow z + t = ۱۴۰^\circ \ ۰/۲۵$$

$۵۰^\circ = \frac{z-t}{۲} \Rightarrow z - t = ۱۰۰^\circ$ ۰/۲۵

$۲z = ۲۴۰^\circ \Rightarrow z = ۱۲۰^\circ$ ۰/۲۵ $, t = ۲۰^\circ$ ۰/۲۵

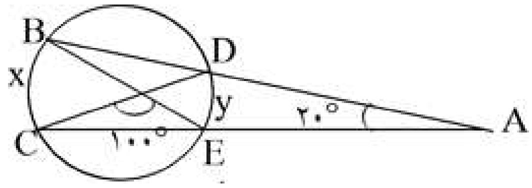
ب)
$$۲ \times y = ۴ \times ۵ \Rightarrow y = ۱۰ \ ۰/۲۵$$

$x(x + ۹) = ۳۶$ ۰/۲۵ $\Rightarrow x = ۳$ ق ق ۰/۲۵ $, x = -۱۲$ غ ق ق ۰/۲۵

۵۶ $TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$ ۰/۲۵

$TT' = \sqrt{۱۳^۲ - (۱۷ - ۱۲)^۲} \Rightarrow ۷m - ۲ = ۱۲ \Rightarrow m = ۲$ ۰/۲۵

۵۷
$$\begin{cases} x + y = ۲(۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ) = ۱۶۰^\circ \\ x - y = ۲ \times ۲۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow ۲x = ۲۰۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰۰^\circ \Rightarrow y = ۶۰^\circ$$



۵۸ $y \times y = ۴ \times ۹ \rightarrow y^۲ = ۳۶ \rightarrow y = ۶ \quad ۸(۸ + ۲y) = z^۲ \rightarrow z = ۴\sqrt{۱۰}$

۵۹ فرض: MT' و MT مماس بر دایره

حکم: $\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ , \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$

اثبات: اگر از یک نقطه خارج یک دایره، دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس با هم برابر است.

$$\begin{cases} MT = MT' \\ OT = OT' \text{ شعاع‌های دایره} \\ OM \text{ مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OTM} \cong \overset{\triangle}{OT'M} (\text{ض ز ض}) \Rightarrow \widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ , \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$$

OM نیمساز زاویه‌ی TMT' و زاویه‌ی TOT' است.

۶۰ اگر از یک نقطه خارج یک دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس برابر است.

$$AP = AR = ۱۲ \quad RC = CQ = ۶ \quad BQ = BP = ۱۰$$

$$\text{محیط مثلث} = AP + PB + BQ + QC + CR + AR = ۱۲ + ۱۰ + ۱۰ + ۶ + ۶ + ۱۲ = ۵۶$$

۶۱
$$MC \times ME = AM \times MB$$
$$۱۲z = ۹ \times ۱۶ \Rightarrow z = ۱۲$$
$$DT^۲ = DE \times DC$$
$$y^۲ = ۳ \times ۲۷ = ۸۱ \rightarrow y = ۹$$

۶۲
$$d = OO' = ۴ + ۹ = ۱۳$$
$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow ۲m - ۲ = \sqrt{۱۳^۲ - (۹ - ۴)^۲} = \sqrt{۱۴۴}$$
$$۲m - ۲ = ۱۲ \Rightarrow ۲m = ۱۴ \Rightarrow m = ۷$$

۶۳
$$۴ \times x = ۲ \times ۱۰ \Rightarrow x = ۵$$
$$۶^۲ = y(y + ۴ + x) \rightarrow ۳۶ = y(y + ۹)$$
$$y^۲ + ۹y - ۳۶ = ۰ \Rightarrow (y + ۱۲)(y - ۳) = ۰ \rightarrow \begin{cases} y = ۳ \\ y = -۱۲ \end{cases}$$

$y = -۱۲$ قابل قبول نیست. پس $y = ۳$.

۶۴
$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۲۰ = \frac{x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۴۰^\circ$$
$$\widehat{O} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۸۰ = \frac{x + y}{۲} \Rightarrow x + y = ۱۶۰^\circ$$
$$\begin{cases} x - y = ۴۰^\circ \\ x + y = ۱۶۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x = ۲۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰^\circ , y = ۶۰^\circ$$

۶۵
$$\widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲} \Rightarrow ۴۵ = \frac{c - a}{۲} \Rightarrow ۴۵ = \frac{۳a - a}{۲} \Rightarrow a = ۴۵^\circ$$

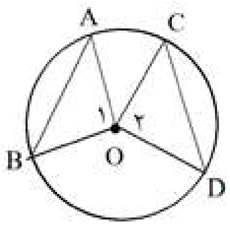
۶۶

$$\widehat{M}=\frac{\widehat{\mathrm{AT}}-\widehat{\mathrm{BT}}}{۲}\Rightarrow ۶۰=\frac{c-a}{۲}\Rightarrow c-a=۱۲۰$$

$$b=۱۰۰\Rightarrow c+a+۱۰۰=۳۶۰\Rightarrow c+a=۲۶۰$$

$$\begin{cases}c-a=۱۲۰\\ c+a=۲۶۰\end{cases}\xrightarrow{-}۲a=۱۴۰\Rightarrow a=۷۰^\circ$$

۶۷ فرض کنید وترهای AB و CD مساوی باشند. از مرکزO به نقاط C, B, A و D وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{OA}=\mathrm{OC}\\ \mathrm{OB}=\mathrm{OD}\\ \mathrm{AB}=\mathrm{CD}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}}\overset{\triangle}{\mathrm{OAB}}\cong\overset{\triangle}{\mathrm{OCD}}\Rightarrow\widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲\Rightarrow\widehat{\mathrm{AB}}=\widehat{\mathrm{CD}}$$

بر عکس فرض کنید کمانهای $\widehat{\mathrm{AB}}$ و$\widehat{\mathrm{CD}}$ مساوی باشند، پس $\widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{OA}=\mathrm{OC}\\ \mathrm{OB}=\mathrm{OD}\\ \widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\triangle}{\mathrm{AOB}}\cong\overset{\triangle}{\mathrm{COD}}\Rightarrow\mathrm{AB}=\mathrm{CD}$$

۶۸

الف) $\dfrac{S}{S'}=\dfrac{\frac{۱}{۲}\mathrm{AH}\times\mathrm{BD}}{\frac{۱}{۲}\mathrm{AH}\times\mathrm{DC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$

ب) DM, DN مساویند زیرا فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه برابر است.

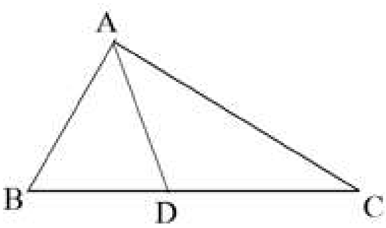
پ) $\dfrac{S}{S'}=\dfrac{\frac{۱}{۲}\mathrm{DM}\times\mathrm{AB}}{\frac{۱}{۲}\mathrm{DN}\times\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$

از مقایسه رابطه الف و پ $\Rightarrow\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}$

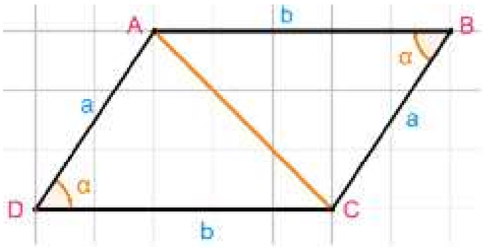
۶۹ فرض کنید $\mathrm{AB}=۸$ و $\mathrm{AC}=۱۲$ و $\mathrm{BC}=۱۵$ و نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند.

نیمساز AD $\Rightarrow\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\dfrac{۸}{۱۲}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BD}+\mathrm{DC}}=\dfrac{۸}{۸+۱۲}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{BD}}{۱۵}=\dfrac{۸}{۲۰}\Rightarrow\mathrm{BD}=۶$

$\mathrm{DC}=\mathrm{BC}-\mathrm{BD}\quad\mathrm{DC}=۱۵-۶=۹$

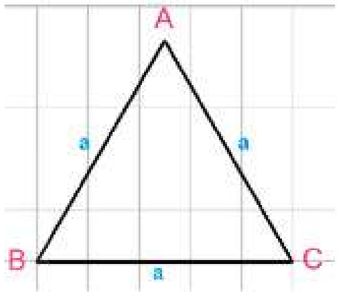


۷۰ با توجه به خواص متوازی‌الاضلاع داریم:



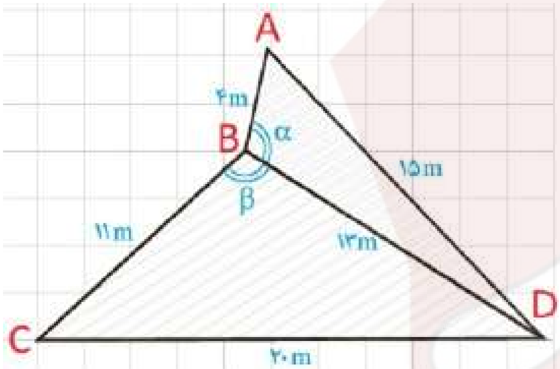
$$S_{\mathrm{ABCD}} = ۲S_{\mathrm{ABC}} = ۲\times\frac{۱}{۲}\times a\times b\times \mathrm{Sin}\,\alpha$$
$$\Rightarrow S_{\mathrm{ABCD}} = a.\,b\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

۷۱



$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} = a \Rightarrow P_{\mathrm{ABC}} = \frac{۳a}{۲}$$
$$S_{\mathrm{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\left(\frac{۳a}{۲}-a\right)^{۳}} = \sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\left(\frac{a}{۲}\right)^{۳}} = \sqrt{\frac{۳a^{۴}}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$

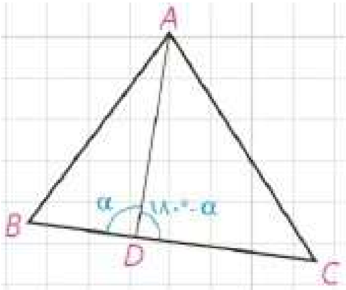
۷۲



$$S_{\mathrm{ABCD}} = S_{\mathrm{ABD}} + S_{\mathrm{BCD}}$$
$$P_{\mathrm{ABD}} = \frac{۴+۱۳+۱۵}{۲} = ۱۶m$$
$$P_{\mathrm{BCD}} = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲} = ۲۲m$$

$$S_{\mathrm{ABD}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۱۶\times۱۲\times۳\times۱} = ۲۴m^{۲}$$
$$S_{\mathrm{BCD}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲} = ۶۶m^{۲}$$
$$S_{\mathrm{ABCD}} = ۲۴ + ۶۶ = ۹۰m^{۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\mathrm{ABD}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{AB.\,BD.\,Sin}\,\alpha \Rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲}\times۴\times۱۳\,\mathrm{Sin}\,\alpha \Rightarrow \mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \\ S_{\mathrm{BCD}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{BC.\,DB.\,Sin}\,\beta \Rightarrow ۶۶ = \frac{۱}{۲}\times۱۱\times۱۳\,\mathrm{Sin}\,\beta \Rightarrow \mathrm{Sin}\,\beta = \frac{۱۲}{۱۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Sin}\,\alpha = \mathrm{Sin}\,\beta$$



۷۳

$$\overset{\triangle}{ABD}: AB^۲ = AD^۲ + DB^۲ - ۲\, AD.\, DB.\, \text{Cos}\,\alpha \xrightarrow{\times DC}$$

$$AB^۲ .\, DC = DC.\, AD^۲ + DC.\, DB^۲ - ۲\, DC.\, AD.\, DB.\, \text{Cos}\,\alpha (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ACD}: AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ - ۲\, AD.\, DC.\, \text{Cos}\,(۱۸۰^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^۲ .\, DB = DB.\, AD^۲ + DB.\, DC^۲ + ۲\, DB.\, AD.\, DC.\, \text{Cos}\,\alpha \; (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} AB^۲ .\, DC + AC^۲ .\, DB = DC.\, AD^۲ + DC.\, DB^۲ - \cancel{۲\, DC.\, AD.\, DB.\, \text{Cos}\,\alpha}$$

$$+ DB.\, AD^۲ + DB.\, DC^۲ + \cancel{۲\, DB.\, AD.\, DC.\, \text{Cos}\,\alpha} \Rightarrow AB^۲ .\, DC + AC^۲ .\, DB$$

$$= AD^۲ \underbrace{(DC + DB)}_{BC} + BD.\, DC \underbrace{(DC + DB)}_{BC}$$

$$AB^۲ .\, DC + AC^۲ .\, DB = AD^۲ .\, BC + DB.\, DC.\, BC$$

$$DC = DB = \frac{a}{۲}, AC = b, \Rightarrow AB = c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲} \times c^۲ + \frac{a}{۲} \times b^۲ = AD^۲ \times a + \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times a \Rightarrow \frac{a}{۲}(c^۲ + b^۲) = \frac{a}{۲}\left(۲AD^۲ + \frac{a^۲}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۲AD^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

۷۴ در شکل راست اگر بازتاب C نسبت به خط BD و بازتاب E نسبت به DE و در شکل چپ اگر بازتاب B نسبت به خط AC را رسم کنیم بدون آنکه محیط تغییر کند، مساحت افزایش می‌یابد. منظور بازتاب مثلث BCD نسبت به BD و بازتاب مثلث EDF نسبت به DF و در شکل راست بازتاب مثلث ABC نسبت به AC در شکل چپ است.

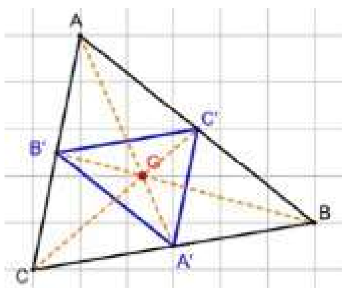
$$\text{افزایش مساحت شکل چپ} = ۲\left(\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴\sqrt{۲} \times \text{Sin}\,۱۳۵\right) = ۱۲$$

$$\text{افزایش مساحت شکل راست} = ۲\left(\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ \times \text{Sin}\,۱۵۰ + \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۳} \times ۲ \times \text{Sin}\,۱۲۰\right) = ۹$$

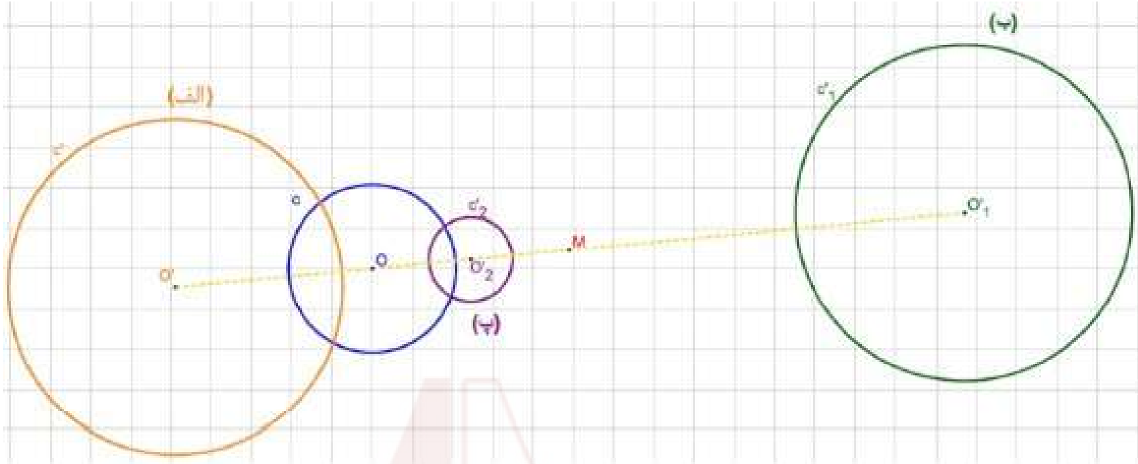
۷۵ الف) 'A وسط BC، 'B وسط AC و 'C وسط AB قرار دارند.

با توجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{۱}{۲}GA$ همچنین نقطه‌ی G بین A و 'A پس نقطه‌ی 'A مجانس نقطه‌ی A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است. همین مطلب در مورد نقاط 'B و 'C نیز صدق می‌کند.

ب) با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC است.



۷۶ برای پیدا کردن مجانس دایره، مجانس مرکز دایره را به دست آورده، به مرکز نقطه‌ی به دست آمده و k برابر شعاع دایرهٔ اول، دایره‌ای ترسیم می‌کنیم.

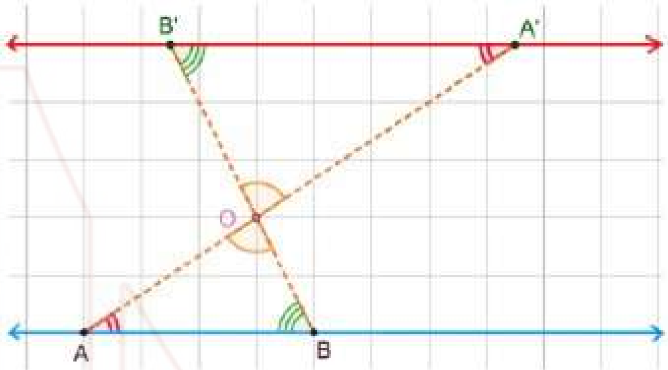


۷۷ الف) ۱) در حالتی که نقطه‌ی O روی خط AB قرار دارد و $k<0$ بدیهی است که نقاط 'A و 'B مجانس‌های نقاط A و B روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین 'A'B بر AB واقع است و شیب تغییر نمی‌کند.

۲) در حالتی‌که نقطه‌ی O روی خط AB قرار ندارد و $k<0$ در این صورت اگر نقاط 'A و 'B به‌ترتیب، مجانس‌های نقاط A و B باشند، طبق تعریف داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA' = k.OA \\ OB' = k.OB\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \\ \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\triangle}{AOB} \sim \overset{\triangle}{A'OB'}$$

$$\Rightarrow \widehat{OB'A} = \widehat{OBA},\ \widehat{OA'B} = \widehat{OAB}$$



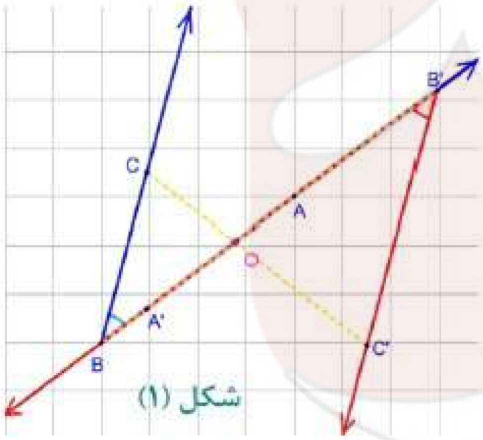
پس بنابر عکس قضیه خطوط موازی خط AB موازی خط 'A'B است بنابراین شیب خط ها در تجانس حفظ می‌شود.

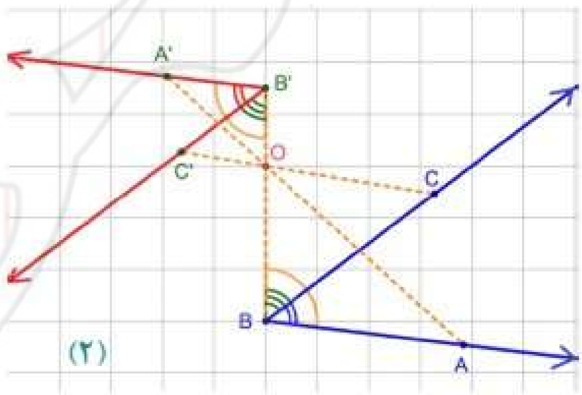
ب) زاویه‌ی $\widehat{ABC}$ را در صفحه درنظر می‌گیریم:

۱) اگر نقطه‌ی O روی رأس زاویه یعنی نقطه‌ی B باشد آن‌گاه مجانس زاویه یعنی $\widehat{A'B'C'}$ روی زاویه $\widehat{ABC}$ منطبق می‌شود. پس اندازه‌ی آن حفظ می‌شود.

۲) اگر نقطه‌ی O روی یکی از اضلاع باشد مانند شکل ۱ آن‌گاه با توجه به قضیه، تجانس شیب خط را حفظ می‌کند

پس: $BC \parallel B'C',\ BB'\ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$



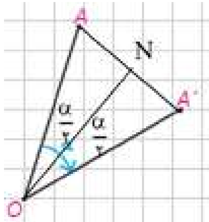


۳) اگر نقطه‌ی O نه روی اضلاع و نه روی رأس زاویه باشد مانند شکل ۲ با توجه به بند قبلی، تجانس شیب خط را حفظ می‌کند پس:

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel B'C',\ BB'\ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{CBB'} = \widehat{C'B'B} \\ AB \parallel A'B',\ BB'\ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABB'} - \widehat{CBB'} = \widehat{A'B'B} - \widehat{C'B'B} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

۷۸ الف) نیمساز زاویه $A\hat{O}A'$ را رسم می‌کنیم.



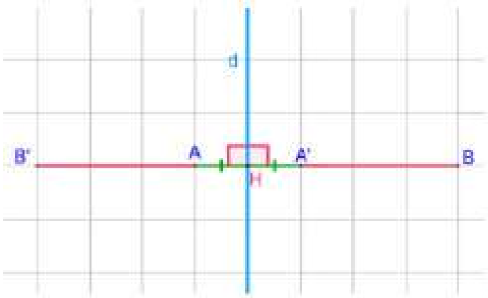
$$\left.\begin{matrix} ON = ON \\ \frac{\alpha}{۲} = \frac{\alpha}{۲} \\ AO = A'O \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AON} = A'\overset{\triangle}{ON} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} AN = A'N \\ A\widehat{N}O = A'\widehat{N}O \end{matrix}\right.$$

$$A\widehat{N}O + A'\widehat{N}O = ۱۸۰ \Rightarrow A\widehat{N}O = A'\widehat{N}O = ۹۰^\circ$$

پس ON عمودمنصف AA' است و از نقطه O می‌گذرد.

ب) کافیست عمودمنصف AA' و BB' را رسم کنیم، محل تلاقی مرکز دوران مثلث ABC می‌باشد.

۷۹



بنا بر تعریف بازتاب $B'H = BH \Rightarrow B'A + AH$

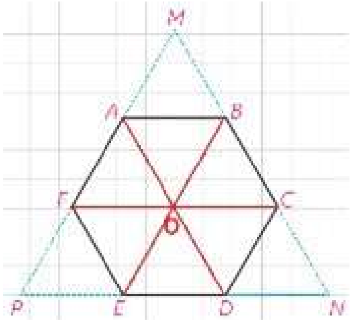
$$= BA' + A'H \xrightarrow[\text{بنا بر تعریف بازتاب}]{AH = A'H}$$

$$B'A = BA'$$

$$\left.\begin{matrix} AB = AA' + A'B \\ A'B' = AA' + B'A \\ B'A = BA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

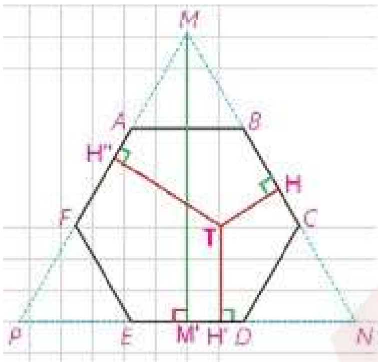
۸۰ الف) اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم ۱۲۰° است. بنابراین زاویه‌های خارجی ۶۰° است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که $\widehat{M}=\widehat{N}=\widehat{P}=۶۰^\circ$ و در نتیجه مثلث MNP متساوی‌الساقین است.

ب) اگر قطرهای شش‌ضلعی منتظم را رسم کنیم آن‌را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کنیم و در مثلث MNP، ۹ مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود.



$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{\text{MNP}}}=\frac{۶S_{\text{MAB}}}{۹S_{\text{MAB}}}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

پ) مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با طول ارتفاع مثلث برابر است:



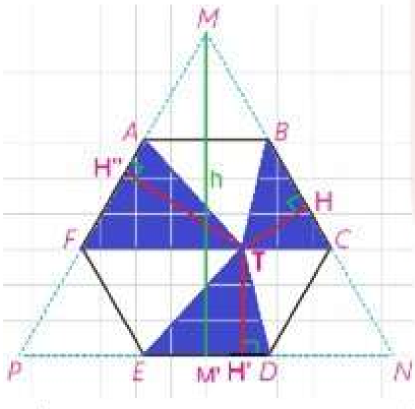
$$\text{TH}+\text{TH}'+\text{TH}''=\text{MM}'$$

ت)

$$S_{\text{TBC}}+S_{\text{TDE}}+S_{\text{TAF}}=S_{\text{TAB}}+S_{\text{TEF}}+S_{\text{TCD}}$$

$$S_{\text{TAF}}+S_{\text{TDE}}+S_{\text{TBC}}=\frac{۱}{۲}\text{AF}.\,\text{TH}''+\frac{۱}{۲}\text{DE}.\,\text{TH}'+\frac{۱}{۲}\text{BC}.\,\text{TH}$$

$$\xrightarrow{\text{AF}=\text{ED}=\text{BC}=a} S_{\text{TAF}}+S_{\text{TDE}}+S_{\text{TBC}}$$

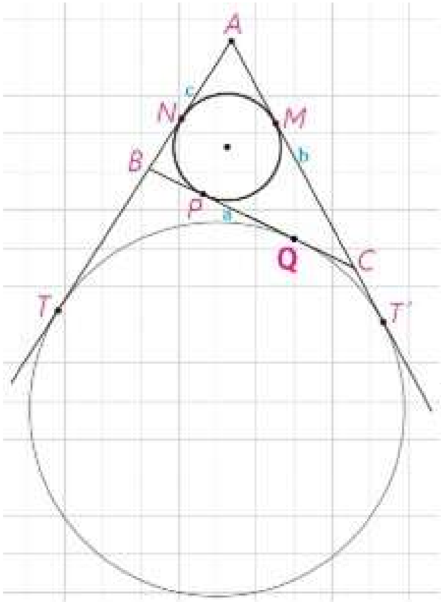


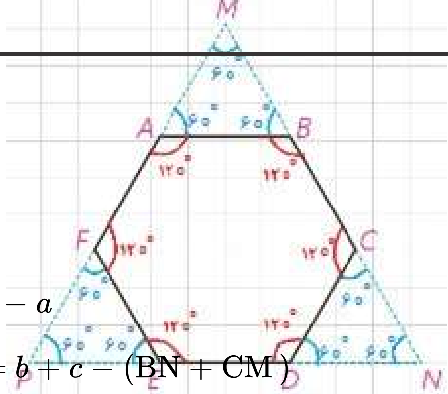
$$=\frac{۱}{۲}\text{a}\underbrace{(\text{TH}''+\text{TH}'+\text{TH})}_{\text{h}}=\frac{۱}{۲}\text{ah}\Rightarrow S_{\text{TAF}}+S_{\text{TDE}}+S_{\text{TBC}}=\frac{۱}{۲}\text{ah}$$

$$S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۱}{۲}\text{NP}.\,h\xrightarrow{\text{NP}=۳a}S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۳}{۲}a.\,h\Rightarrow\frac{S_{\text{TAF}}+S_{\text{TDE}}+S_{\text{TBC}}}{S_{\text{MNP}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\text{ah}}{\frac{۳}{۲}a.\,h}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\text{TAF}}+S_{\text{TDE}}+S_{\text{TBC}}}{S_{\text{MNP}}}=\frac{۱}{۳}$$

مساحت مثلث‌های آبی رنگ $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش‌ضلعی $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث MNP و مساحت مثلث‌های سفید و آبی برابر با مساحت شش‌ضلعی است پس مساحت مثلث‌های سفید هم برابر با $\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}$



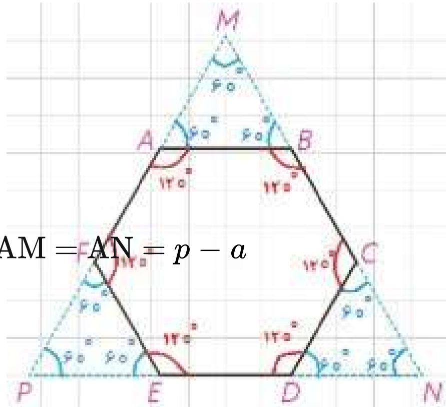


$$\mathrm{AM}=\mathrm{AN}=P-a$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AN}=c-\mathrm{BN}\\ \mathrm{AM}=b-\mathrm{CM}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{AM}+\mathrm{AN}=b+c-(\mathrm{BN}+\mathrm{CM})$$

۸۱ است. بنابراین مساحت مثلث‌های آبی با مساحت مثلث‌های سفید برابر است.

$$S_{\mathrm{TEF}}+S_{\mathrm{TCD}}\xrightarrow[\mathrm{CM=CP,BN=BP}]{\mathrm{AM=AN}}$$



$$۲\mathrm{AM}=b+c-\underbrace{(\mathrm{BP}+\mathrm{CP})}_{a}=b+c-a$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{AM}=۲p-۲a\Rightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{AN}=p-a$$

$$\mathrm{BN}=\mathrm{BP}=P-b$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{BN}=c-\mathrm{AN}\\ \mathrm{BP}=a-\mathrm{CP}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{BN}+\mathrm{BP}=a+c-(\mathrm{AN}+\mathrm{CP})\xrightarrow[\mathrm{AN=AM,CP=CM}]{\mathrm{BP=BN}}$$

$$۲\mathrm{BN}=a+c-\underbrace{(\mathrm{AM}+\mathrm{CM})}_{b}=a+c-b$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{BN}=۲p-۲b\Rightarrow \mathrm{BN}=\mathrm{BP}=p-b$$

$$\mathrm{CM}=\mathrm{CP}=P-C$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{CM}=b-\mathrm{AM}\\ \mathrm{CP}=a-\mathrm{BP}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{CM}+\mathrm{CP}=b+A-(\mathrm{AM}+\mathrm{BP})\xrightarrow[\mathrm{AN=AM,BP=BN}]{\mathrm{CM=CP}}$$

$$۲\mathrm{CM}=b+a-\underbrace{(\mathrm{AN}+\mathrm{BN})}_{c}=b+a-c$$

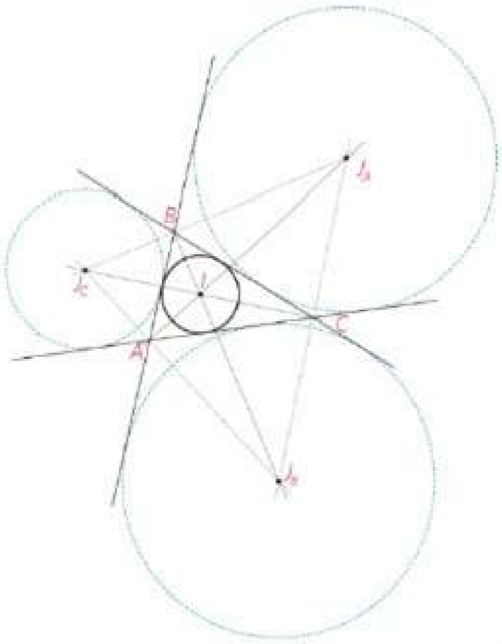
$$\Rightarrow ۲\mathrm{CM}=۲p-۲c\Rightarrow \mathrm{CM}=\mathrm{CP}=p-c$$

$$\mathrm{AT}=\mathrm{AT}'=P$$

$$\mathrm{AT}+\mathrm{AT}'-c+\mathrm{BT}+b+\mathrm{CT}'\xrightarrow[\mathrm{BT}=\mathrm{BQ}\,,\,\mathrm{CT}'=\mathrm{CQ}]{\mathrm{AT}=\mathrm{AT}'}۲\mathrm{AT}=c+b+\underbrace{\mathrm{BQ}+\mathrm{CQ}}_{a}$$

$$\Rightarrow ۲\mathrm{AT}=۲p\Rightarrow \mathrm{AT}=\mathrm{AT}'=p$$

۸۲ الف)



$$S=\text{rp}\Rightarrow \frac{۱}{r}=\frac{p}{s}$$
$$r_a=\frac{S}{p-a}\Rightarrow \frac{۱}{r_a}=\frac{p-a}{S}$$
$$r_b=\frac{S}{p-b}\Rightarrow \frac{۱}{r_b}=\frac{p-b}{S}$$
$$r_c=\frac{S}{p-c}\Rightarrow \frac{۱}{r_c}=\frac{p-c}{S}$$
$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}$$
$$=\frac{۳p-(a+b+c)}{S}=\frac{۳p-۲p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{۱}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

ب)

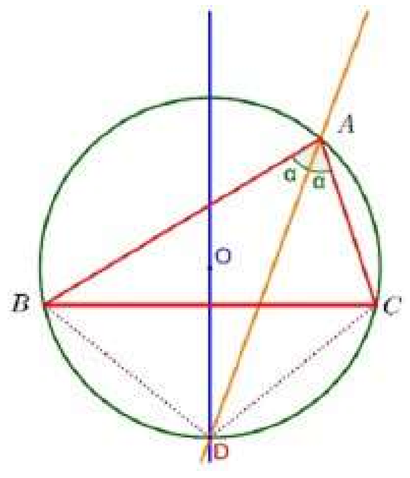
$$\left.\begin{array}{l} S=\frac{۱}{۲}\text{ah}_a\Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a}\Rightarrow \frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲S}\\ S=\frac{۱}{۲}\text{bh}_b\Rightarrow h_b=\frac{۲S}{b}\Rightarrow \frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲S}\\ S=\frac{۱}{۲}\text{ch}_c\Rightarrow h_c=\frac{۲S}{c}\Rightarrow \frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲s}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}$$
$$=\frac{a+b+c}{۲S}=\frac{۲p}{۲S}=\frac{p}{S}=\frac{۱}{r}\Rightarrow \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

۸۳ فرض کنیم نیمساز زاویه‌ی BAC دایره‌ی محاطی را در نقطه‌ی D قطع کند:

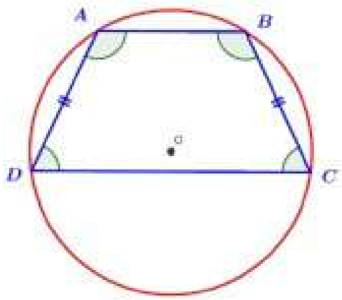
$$\widehat{\text{BAD}}=\widehat{\text{CAD}}\xrightarrow{\text{محاطی}}\overset{\frown}{\text{BD}}=\overset{\frown}{\text{CD}}$$

$$\xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}}\text{BD}=\text{CD}$$

فاصله‌ی نقطه‌ی D از دو نقطه‌ی B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمودمنصف نقطه‌ی D روی عمودمنصف پاره‌خط BC نیز قرار دارد.



۸۴ فرض: ذوزنقه متساوی‌الساقین است. حکم: ذوزنقه محاطی است.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{C}=\widehat{D}} \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}=\widehat{B}} \widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ ذوزنقه ABCD محاطی است

فرض: ذوزنقه محاطی است. حکم: ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

$$\left.\begin{array}{r}\text{AB} \parallel \text{DC}\ ,\ \text{AD}\ \text{مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{A}+D=\widehat{A}+\widehat{C} \Rightarrow \widehat{D}=\widehat{C} \xrightarrow{\text{ق زاویه های مکمل}} \widehat{A}=\widehat{B}$$

در این ذوزنقه زاویه‌های مجاور به ساق برابرند در نتیجه ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

۸۵ مجموع سه قطاع با زاویه‌ی ۱۲۰ درجه تشکیل یک دایره کامل می‌دهد بنابراین داریم:

$$\text{طول نخ} = ۲r+۲r+۲r+\text{محیط یک دایره} = ۶r+۲\pi r$$

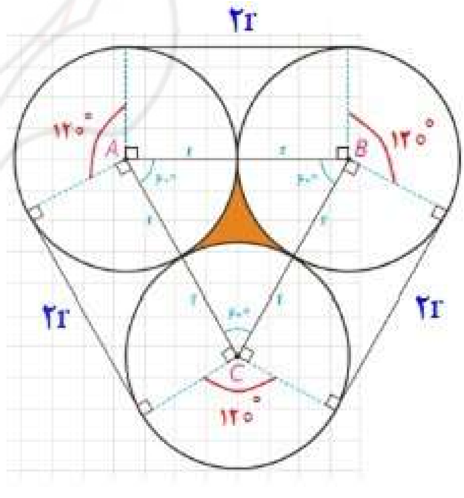
مجموع سه قطاع با زاویه ۶۰ درجه تشکیل یک نیم‌دایره می‌دهد بنابراین داریم:

= مساحت ناحیه هاشور خورده

مساحت نیم‌دایره - مساحت مثلث ABC

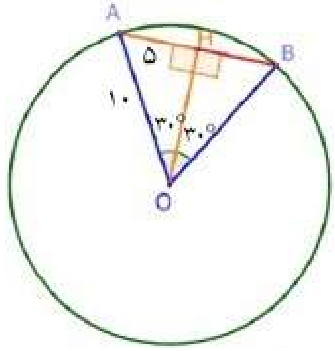
= مساحت ناحیه هاشور خورده

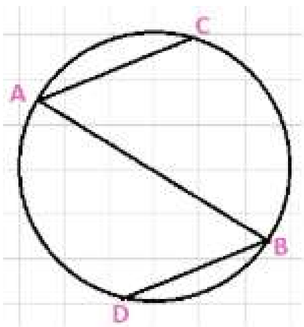
$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^۲-\frac{\pi r^۲}{۲}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۴}r^۲-\frac{\pi r^۲}{۲}=r^۲\left(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۳}\right)$$



۸۶ می‌دانیم که مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O را بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره‌خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند بنابراین $\mathrm{AH} = ۵$ پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH داریم:

$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^{۲} - \mathrm{AH}^{۲}} \Rightarrow \mathrm{OH} = \sqrt{۱۰^{۲} - ۵^{۲}} = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$





۸۷

$$\mathrm{AC} \parallel \mathrm{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{AD}} = \overset{\frown}{\mathrm{BC}}$$

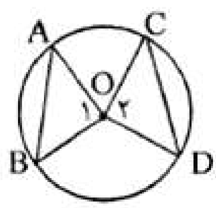
$$\mathrm{A\overset{\frown}{C}B} = \mathrm{A\overset{\frown}{D}B} = ۱۸۰^{\circ}$$

$$\mathrm{A\overset{\frown}{C}D} - \overset{\frown}{\mathrm{BC}} = \mathrm{A\overset{\frown}{D}B} - \overset{\frown}{\mathrm{AD}} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{AC}} = \overset{\frown}{\mathrm{BD}} \Rightarrow \mathrm{AC} = \mathrm{BD}$$

۸۸

$$\begin{cases} \mathrm{OA} = \mathrm{OC} \\ \mathrm{OB} = \mathrm{OD}\ ۰/۲۵ \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}\ ۰/۲۵ \\ \mathrm{AB} = \mathrm{BC} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ زاویه مرکزی $\widehat{O}_{۱} = \widehat{O}_{۲}\ ۰/۲۵ \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}}\ ۰/۲۵$



۸۹ فرض کنید در دایره به مرکز O وتر CD بزرگتر از وتر AB باشد. از O عمودهای OH و OH' را بر این دو وتر وارد می‌کنیم. می‌دانیم اگر از مرکز دایره به وتری از دایره عمود کنیم، آن وتر نصف می‌شود. داریم:

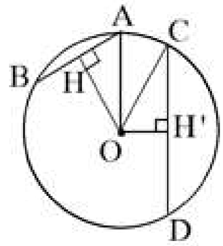
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{OAH}: OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲} \\ \overset{\triangle}{OCH'}: OC^{۲} = OH'^{۲} + CH'^{۲}\end{array}\right\} \xrightarrow{OA=OC} OH^{۲} + AH^{۲} = OH'^{۲} + CH'^{۲}$$

$$\Rightarrow OH^{۲} - OH'^{۲} = CH'^{۲} - AH^{۲}$$

چون $CH' = \frac{CD}{۲}$ و $AH = \frac{AB}{۲}$ نتیجه می‌گیریم:

$$OH^{۲} - OH'^{۲} = \frac{CD^{۲}}{۴} - \frac{AB^{۲}}{۴} \quad (۱)$$

اگر $AB < CD$ باشد، با توجه به (۱) نتیجه می‌گیریم $OH' < OH$ و برعکس.



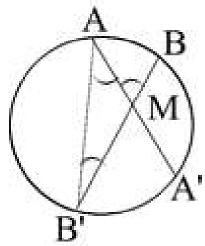
۹۰ وترهای AA' و BB' از دایره‌ی C در نقطه‌ی M یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. پاره‌خط AB' را رسم می‌کنیم.

زاویه‌های $AB'B$ و $A'AB'$ محاطی هستند.

$$\left\{\begin{array}{l} A\widehat{B}'B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ A'\widehat{A}B' = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\end{array}\right. \quad ۰/۲۵$$

(زاویه‌ی خارجی مثلث $\overset{\triangle}{AMB'}$) $A\widehat{M}B = A\widehat{B}'B + A'\widehat{A}B'$ ۰/۲۵

$$\Rightarrow A\widehat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \quad ۰/۲۵$$

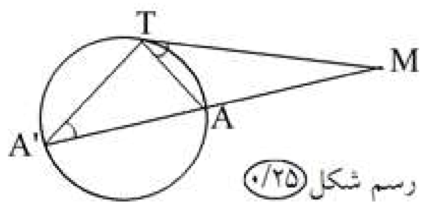


رسم شکل ۰/۲۵

۹۱ دایره‌ی C و نقطه‌ی M را خارج آن درنظر می‌گیریم. مماس MT و قاطع 'MAA را نسبت به این دایره رسم می‌کنیم. از T به A و 'A وصل می‌کنیم. دو مثلث $\overset{\triangle}{MAT}$ و $\overset{\triangle}{MA'T}$ متشابهند، زیرا:

$$\left.\begin{array}{c} A\widehat{T}M = A\widehat{A}'T = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \\ \widehat{M} = \widehat{M}\end{array}\right\} ۰/۲۵ \Rightarrow \frac{MT}{MA} = \frac{MA'}{MT} \quad ۰/۲۵$$

$$\Rightarrow MT^{۲} = MA.MA' \quad ۰/۲۵$$



رسم شکل ۰/۲۵

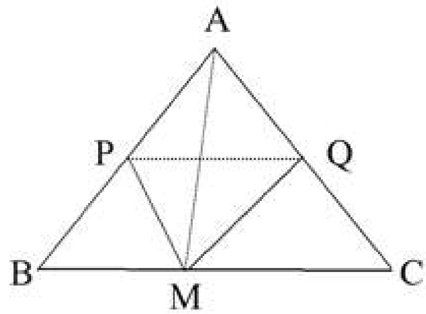
۹۲ غلط ۰/۲۵

۹۳ دو مماس ۰/۲۵

۹۴ مکمل ۰/۲۵

۹۵

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{\mathrm{AMC}} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{\mathrm{MQ}} \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MC}} = \dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}} \quad ۰/۲۵ \\ \overset{\triangle}{\mathrm{AMB}} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{\mathrm{MP}} \dfrac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \quad ۰/۲۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathrm{MC=MB}} \dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}} = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} \mathrm{PQ}||\mathrm{BC} \ ۰/۲۵$$



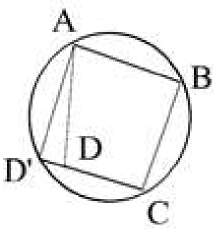
۹۶ نادرست ۰/۲۵

۹۷ درست ۰/۲۵

۹۸ درست ۰/۲۵

۹۹ برهان: از سه نقطه‌ی A و B و C از چهارضلعی ABCD یک دایره می‌گذرد با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم این دایره از نقطه‌ی D نیز می‌گذرد. فرض می‌کنیم نقطه‌ی برخورد خط CD با دایره D' باشد. از D' به A وصل می‌کنیم. چون چهارضلعی ABCD' محاطی است بنابراین: $\widehat{B} + \widehat{D}' = ۱۸۰^\circ$

بنابراین: $\widehat{D} = \widehat{D}'$ به تناقض رسیدیم: زیرا $\widehat{D} > \widehat{D}'$ (D زاویه خارجی $\overset{\triangle}{\mathrm{ADD}'}$) پس حکم برقرار است.



۱۰۰

$$\begin{array}{l} R = ۹ \\ R' = ۴ \end{array} \Rightarrow d = ۱۳ \ ۰/۲۵ \quad \mathrm{TT}' = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \quad ۰/۲۵$$

$$۵\mathrm{x} + ۲ = \sqrt{۱۳^۲ - (۹ - ۴)^۲} = \sqrt{۱۶۹ - ۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲ \quad ۰/۲۵ \quad \Rightarrow x = ۲$$