جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
دبیرستان غیردولتی پسرانه مُوحد
منطقه ۵ شهر تهران

پایه : **دهم** رشته : **ریاضی**	**نمونه سوالات** **نام درس : هندسه ۱**	نام استاد : آقای **گروسی**

۱ نقیض گزاره‌ی «a مساوی b است.» را بنویسید.

۲ عکس قضیه‌ی زیر را بنویسید.
«اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد آن‌گاه قطرها یک‌دیگر را نصف می‌کنند.»

۳ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:
«از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.»

۴ برای گزاره‌های زیر مثال نقض بیاورید.
الف) حاصل‌جمع دو عدد گنگ همیشه گنگ است.
ب) تمام عددهای حقیقی معکوس دارند.

۵ مربعی رسم کنید که طول قطرهای آن برابر با ۴ سانتی‌متر است؟

۶ جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب کامل کنید.
۱) فاصله هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن .... است.
۲) از یک نقطه خارج خط فقط .... خط عمود می‌توان به خط داده شده رسم کرد.

۷ عکس قضیه‌ی زیر را بنویسید.
در مثلث قائم‌الزاویه با وتر a رابطه‌ی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است:
توان دوم وتر برابر است با حاصل‌جمع توان دوم ضلع‌های دیگر.

۸ قضیه‌ی دوشرطی را تعریف کنید و مثال بزنید.

۹ مثال نقض را تعریف کنید.

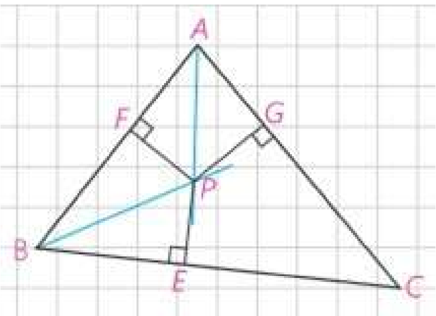
۱۰ با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که از هر نقطه خارج خط فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.

۱۱ به استقرا ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر است با $۱۸۰\times(n-۲)$.

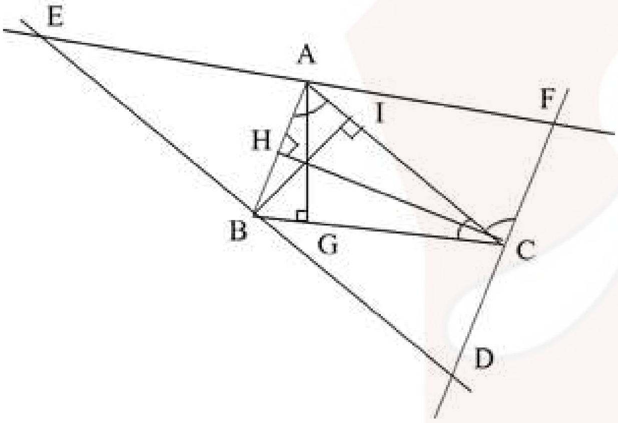
۱۲ نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید.
اگر در مثلثی دو ضلع با هم برابر نباشند. آن‌گاه زاویه‌های مقابل به آن‌ها نیز با هم برابر نیست.

۱۳ با استدلال استنتاجی ثابت کنید که سه عمودمنصف هر مثلث همرس هستند.

۱۴ مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را درنظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یک‌دیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطه‌ی P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.
۱- نقطه‌ی P روی نیمساز زاویه‌ی A است، بنابراین: ....
۲- نقطه‌ی P روی نیمساز زاویه‌ی B است، بنابراین: ....
از ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم:
...... بنابراین نقطه‌ی P روی .... در نتیجه نقطه‌ی P محل برخورد ....



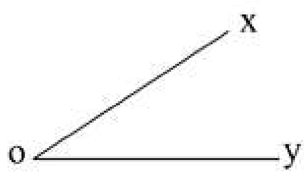
۱۵ استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.
استدلال: مثلث دلخواه ABC را درنظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF وجود دارد. چهارضلعی ABCF چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟



۱۶ می‌دانیم که هر نقطه‌ی روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سرِ آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند. (در یک نقطه به هم می‌رسند).
استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را درنظر می‌گیریم. چون پاره‌خط های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آن‌ها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند.

۱۷ یک لوزی رسم کنید که قطر آن ۵ سانتی‌متر و ضلع‌هایش برابر ۳ سانتی‌متر باشد.

۱۸ نیمساز زاویه‌ی $\widehat{xoy}$ را به دست آورید.



۱۹ نقطه‌ی T خارج از خط d قرار دارد. عمود وارد بر خط d را که از نقطه‌ی T عبور می‌کند رسم کنید.

۲۰ نقطه‌ی A و A' به روی یک خط راست واقع‌اند و فاصله‌ی آن‌ها از هم برابر با ۳ سانتی‌متر است. نقاطی از صفحه را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها از A و A' به‌ترتیب ۲ و ۴ سانتی‌متر باشد.

۲۱ فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه‌ی A باشد. دلایل هریک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجه‌ی نهایی که در پایان آمده است را کامل کنید.

الف) $\widehat{D}_۲ > \widehat{A}_۱$، زیرا ....

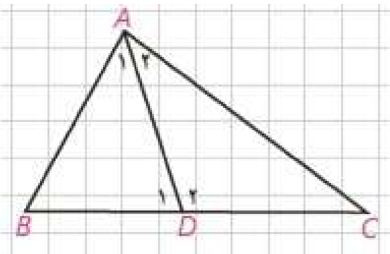
ب) $\widehat{D}_۲ > \widehat{A}_۲$، زیرا ....

پ) $\mathrm{AC} > \mathrm{DC}$، زیرا ....

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $\mathrm{AB} > \mathrm{BD}$

ث) حال نشان دهید $\mathrm{AB} + \mathrm{AC} > \mathrm{BC}$

نتیجه: در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی .... ، .... است.



۲۲ عکس هریک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آن‌ها را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آن‌ها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یک‌دیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آن‌گاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آن‌گاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۲۳ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ آن‌گاه $\widehat{B} \neq \widehat{C}$.

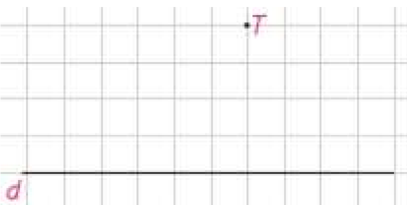
۲۴ خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه‌ی T بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط $d_۱$ را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه‌ی T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط $d_۲$ را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه‌ی T بگذرد و بر خط $d_۱$ عمود باشد.

۳- خط $d_۲$ نسب به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط $d_۱$ را مورّب درنظر بگیرید.)



۲۵ روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن‌را توضیح دهید.

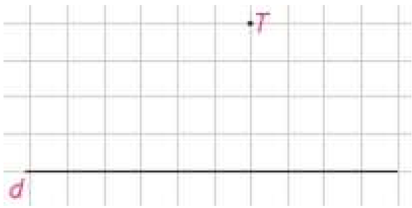
۲۶ خط d و نقطه‌ی T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و برخط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه‌ی T به یک فاصله باشند.

۲- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطه‌ی T می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d .... و از نقطه‌ی ....



۲۷ خط d و نقطه‌ی M را روی آن، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره‌خط AB باشد.

۲- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

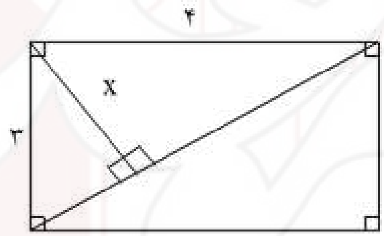
۳- عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d .... و از نقطه‌ی ....

۲۸ مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن‌را توضیح دهید.

۲۹ مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

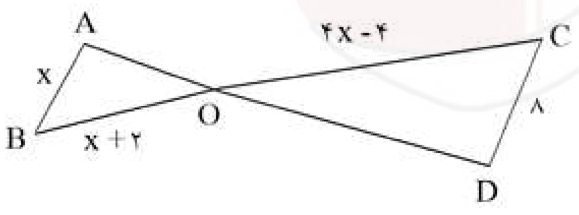
۳۰ قضیه: ثابت کنید سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.

۳۱ مقدار x را حساب کنید.

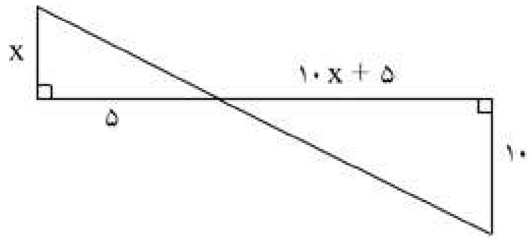


۳۲ اگر $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۵}{۳}=\frac{z-۲}{۴}$، آن‌گاه $\frac{x+y+۴}{x+y+z+۲}$ را حساب کنید.

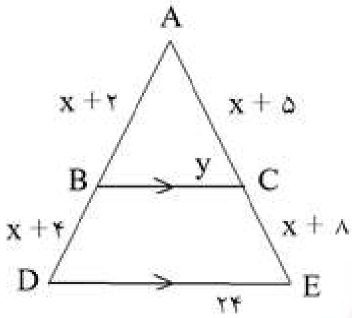
۳۳ مقدار x را حساب کنید. (AB || CD)



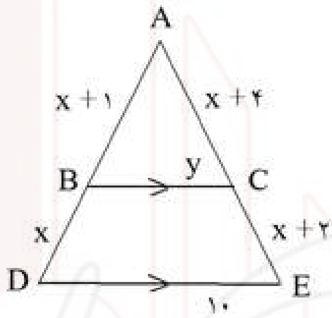
۳۴ مقدار x را حساب کنید.



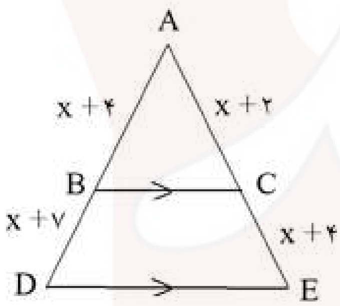
۳۵ اگر $DE \parallel BC$ باشد مقدار x و y را حساب کنید.



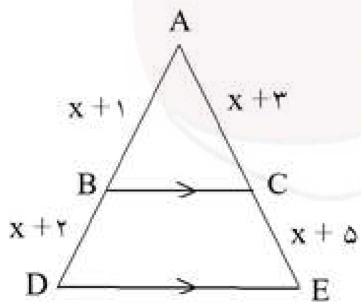
۳۶ اگر $DE \parallel BC$ باشد مقدار x و y را حساب کنید.



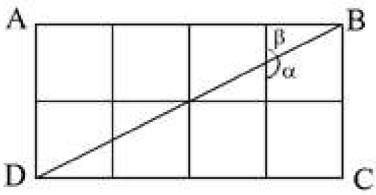
۳۷ اگر $DE \parallel BC$ باشد مقدار x را حساب کنید.



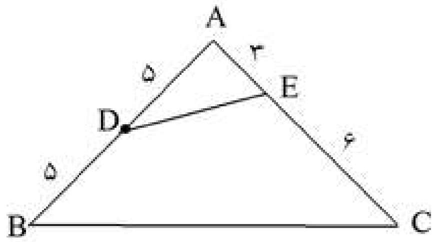
۳۸ اگر $DE \parallel BC$ باشد مقدار x را حساب کنید.



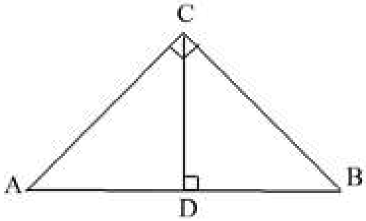
۳۹ در شکل مقابل طول ضلع هریک از مربع‌های کوچک برابر یک است. مقدار $\operatorname{tg} \alpha$ چه‌قدر است؟



۴۰ در شکل زیر مطلوب است محاسبه $\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$:

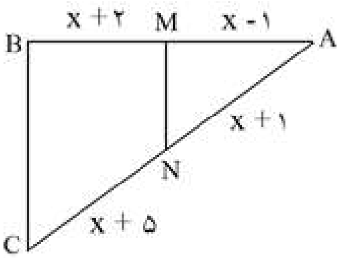


۴۱ با توجه به شکل ثابت کنید که: $\mathrm{DC}^۲ = \mathrm{AD} \times \mathrm{DB}$



۴۲ طول اضلاع یک مثلث به‌ترتیب ۶ و ۸ و ۹ است و طول کوچک‌ترین ضلع مثلث متشابه با آن برابر با ۸ است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

۴۳ در مثلث ABC پاره‌خط MN موازی BC است. به کمک قضیه‌ی تالس مقدار x را به دست آورید. سپس نسبت محیط AMN به محیط ABC را به دست آورید.



۴۴ اگر $\frac{۲}{۳} = \frac{x}{y}$ باشد آن‌گاه حاصل $\frac{۳y - ۳}{۳x - ۲}$ را به دست آورید.

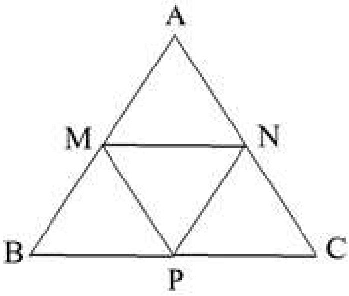
۴۵ اگر در مثلث ABC نقطه‌ی M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که داشته باشیم $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}}$ ثابت کنید که MN موازی BC است.

۴۶ طول ضلع‌های مثلث به‌ترتیب برابر است با ۶ و ۸ و ۱۰. اگر طول کوچک‌ترین ضلع مثلث متشابه به آن برابر با ۹ باشد، محیط این مثلث را به دست آورید.

۴۷ قضیه‌ی زیر را ثابت کنید:
«در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کنند.»

۴۸ درستی یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.
الف) نسبت بین ضلع‌ها را در دو مثلث متشابه نسبت تشابه گوییم. درست☐ نادرست☐
ب) نسبت بین محیط های دو مثلث متشابه برابر است با توان دوم نسبت تشابه. درست☐ نادرست☐

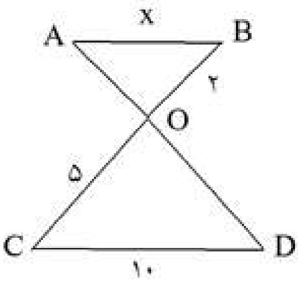
۴۹ در شکل مقابل M , N , P وسط اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند. چرا دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{MNP}$ با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه چند است؟



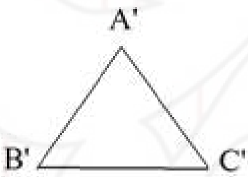
۵۰ قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها را بیان کنید.

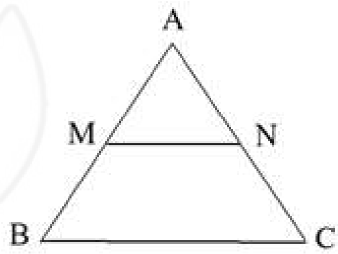
۵۱ حالت های تشابه دو مثلث را نام ببرید.

۵۲ ثابت کنید دو مثلث زیر با هم متشابه هستند. سپس مقدار x را به دست آورید. ($\mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}$)



۵۳ ۱- ثابت کنید هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.





(در فرض، به جای 'A'B و 'A'C مساوی‌های آن‌ها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $\mathrm{MN} \parallel \mathrm{BC}$؟)

۲- از قضیه‌ی اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۳- تعمیم قضیه‌ی تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه‌ی این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض نتیجه بگیرید:

$$\mathrm{MN} = B'C'$$

۴- مثلث‌های 'A'B'C و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از این‌جا درستی حکم را ثابت کنید.

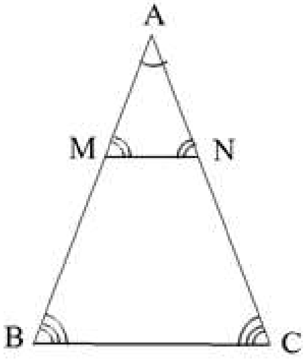
۵۴ اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (و یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است. (قضیه‌ی اساسی تشابه)

۱- زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به‌ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟

۲- با توجه به تعمیم قضیه‌ی تالس تناسب زیر را کامل کنید:

$$\frac{\mathrm{AM}}{\dots}=\frac{\dots}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{MN}}{\dots}$$

۳- از گزینه ۱ و ۲ در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟



۵۵ تعمیم قضیه‌ی تالس را بیان و اثبات کنید.

۵۶ عکس قضیه‌ی تالس را بیان و آن‌را اثبات کنید.

۵۷ در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند.

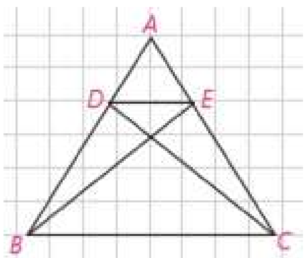
الف) قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟

ب) تناسب‌های زیر را کامل کنید.

$$\frac{S_{\mathrm{DAE}}}{S_{\mathrm{DEC}}}=\frac{\dots}{\dots},\ \frac{S_{\mathrm{ADE}}}{S_{\mathrm{DBE}}}=\frac{\dots}{\dots}$$

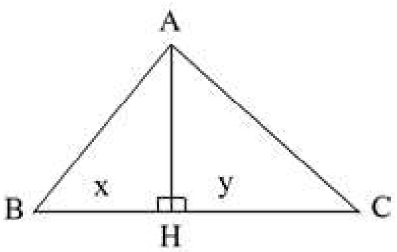
ج) مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحتند. چرا؟

د) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا چه تناسبی را نتیجه‌گیری می‌کنید.



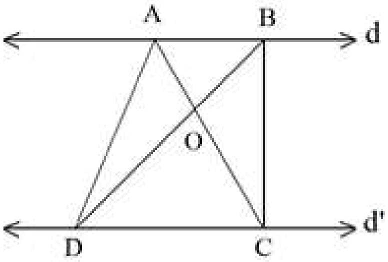
۵۸ ثابت کنید اگر دو مثلث هم‌قاعده باشند و رأس آن‌ها روی خطی موازی قاعده قرار گیرد، دارای مساحت معادل (برابر) هستند.

۵۹ با توجه به شکل زیر و این‌که $\mathrm{BC}=۶$ و $S_{\mathrm{ABH}}=۴$ و $S_{\mathrm{AHC}}=۹$. مقادیر x و y را به دست آورید.



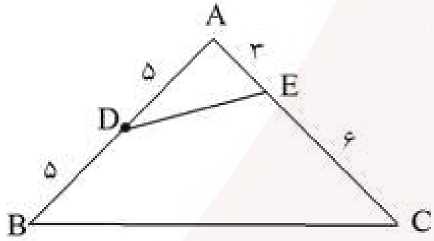
۶۰ ثابت کنید:
اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده‌ی مقابل به این رأس آن‌ها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت اندازه‌ی قاعده‌های آن‌ها.

۶۱ اگر دو خط d و 'd موازی باشند با توجه به شکل زیر اگر مساحت ΔOBC برابر S باشد، مساحت ΔOAD را برحسب S به دست آورید.



۶۲ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای برابر با ۹ شده است. اگر نقاط درونی برابر با ۴ باشد نقاط مرزی را به دست آورید.

۶۳ در شکل زیر مطلوب است محاسبه $\dfrac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}$:



۶۴ جمله‌ی زیر را کامل کرده و اثبات کنید.
در هر چهارضلعی محدب که دو قطر آن برهم عمود باشند مساحت برابر است با:

۶۵ با استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر با $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.

۶۶ با رسم چندضلعی‌های محدب تا شش ضلعی و رسم قطرهای مربوط:
الف) جدول مقابل را کامل کنید.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶		n
تعداد قطرهای رسم شده از یک راس	۰	۱				

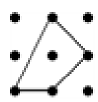
ب) به کمک استدلال استقرایی، رابطه‌ای برای تمام قطرهای n ضلعی محدب بیابید.

۶۷ فاصله‌ی M نقطه‌ی داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از هر ضلع برابر با $۵\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۳}$ است. محیط مثلث را محاسبه کنید.

۶۸ اندازه‌ی قطر لوزی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ است. قطر دیگر لوزی و محیط لوزی را محاسبه کنید.

۶۹ ثابت کنید که یک میانه در هر مثلث آن‌را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

۷۰ چندضلعی شبکه‌ای را تعریف کرده و مساحت چندضلعی زیر را به دست آورید.



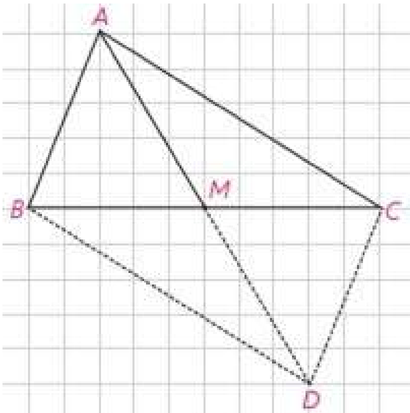
۷۱ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین برابر با ۸ است. محیط این مثلث را به دست آورید.

۷۲ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را حساب کنید.

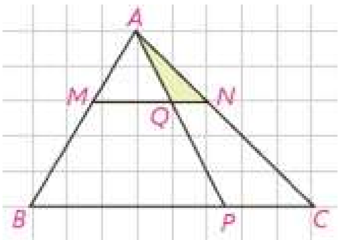
۷۳ در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BC}}{۲}$. روی نیم‌خط AM نقطه‌ی D را چنان درنظر می‌گیریم که $\mathrm{MD} = \mathrm{AM}$.

الف) آیا می‌توانید نتیجه بگیرید $\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ و قطرهای AD و BC منصف یک‌دیگرند؟

ب) چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟

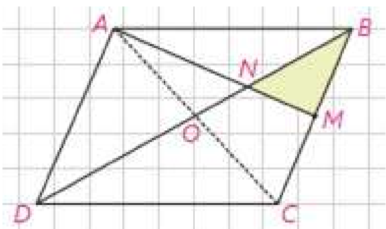


۷۴ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{۱}{۲} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}$. هم‌چنین $\frac{۱}{۳} = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PB}}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است.

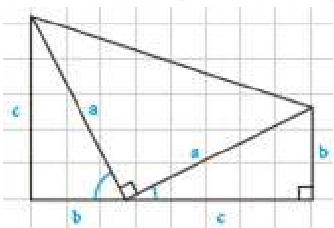


۷۵ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

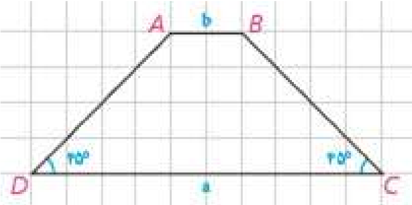
$$S_{\mathrm{BMN}} = \frac{۱}{۱۲} S_{\mathrm{ABCD}}$$



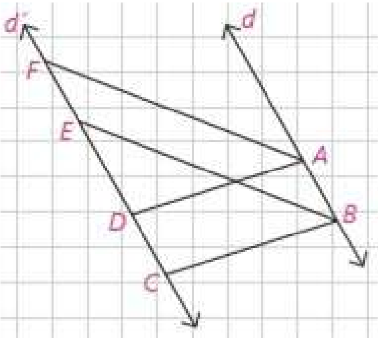
۷۶ مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



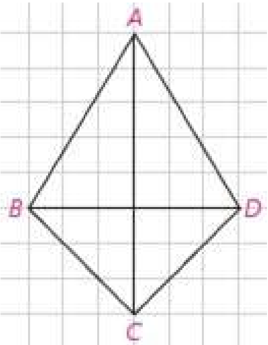
۷۷ در ذوزنقه‌ی شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده ۴۵° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



۷۸ در شکل دو خط d و 'd موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چه‌قدر است؟

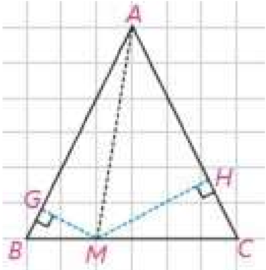


۷۹ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $\mathrm{AB}=\mathrm{AD}$ و $\mathrm{BC}=\mathrm{CD}$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



۸۰ در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

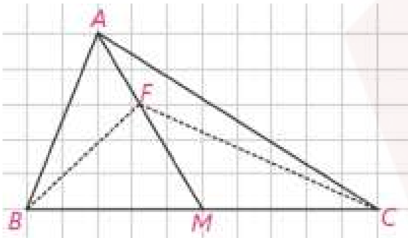
۸۱ در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ است، نقطه‌ی دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به‌ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMB} و S_{AMC} را بنویسید.
مساحت مثلث ABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید.
الف) چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن‌را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از .... برابر .... است.
ب) به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعده‌ی BC از خط های شامل دو ساق برابر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ساق است.



۸۲ ثابت کنید سه میانهٔ هر مثلث همرس‌اند.

۸۳ ثابت کنید اگر وسطهای سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.

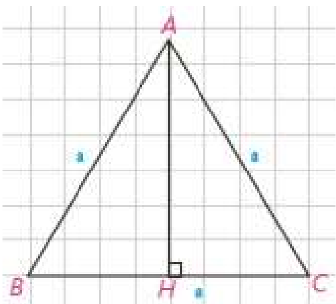
۸۴ الف) نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن‌را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.
ب) اگر F هر نقطه‌ای روی میانه‌ی AM به‌جز نقطه‌ی M باشد، آیا، $S_{\mathrm{FBM}}=S_{\mathrm{FMC}}$ است؟ چرا؟



۸۵ ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های دو قطر آن چهارضلعی.

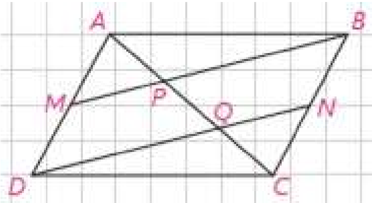
۸۶ الف) فرض کنیم اندازه‌ی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه است؛ چرا؟

ب) به کمک قضیه‌ی فیثاغورس نشان دهید $\mathrm{AH}=\dfrac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S=\dfrac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$.

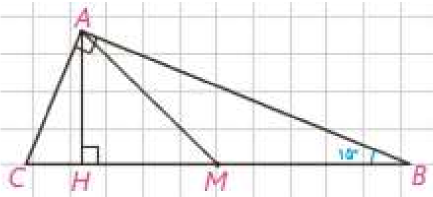


۸۷ ثابت کنید اگر وسط های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.
این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟
چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

۸۸ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به‌ترتیب وسط های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $\mathrm{AP}=\mathrm{PQ}=\mathrm{QC}$.



۸۹ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، اندازه‌ی زاویه‌ی B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازه‌ی وتر است.

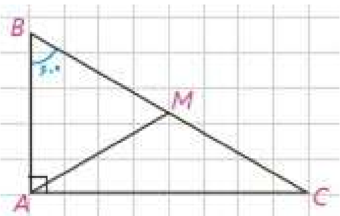


۹۰ مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\Delta\mathrm{ABC}$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه‌ی $\angle C$ برابر ۳۰° است، درنظر می‌گیریم. میانه‌ی وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند. نشان دهید $\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{BC}}{۲}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه‌ی یک زاویه ۳۰° باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن نصف اندازه‌ی وتر است.

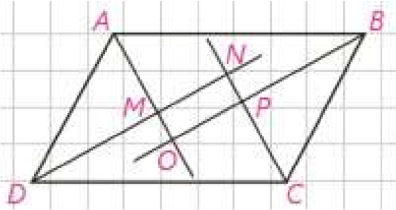
سپس با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورث نشان دهید، $\mathrm{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{BC}$.

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۶۰° باشد، اندازه‌ی ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازه‌ی وتر است.

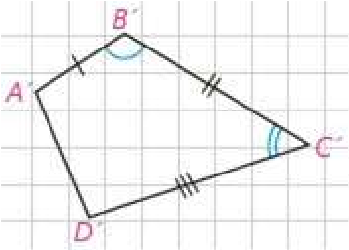
اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن ۴۵° باشد و نشان دهید که اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازه‌ی وتر است.

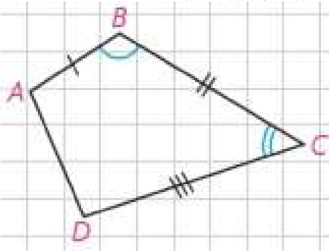


۹۱ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.



۹۲ الف) در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است.
چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟
ب) اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟





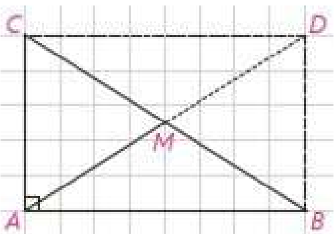
۹۳ در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

۹۴ ثابت کنید در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و برعکس.

۹۵ ثابت کنید در هر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

۹۶ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن برهم عمود باشند، لوزی است.

۹۷ مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانه‌ی وارد بر وتر است درنظر می‌گیریم.
روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان درنظر می‌گیریم که $AM = MD$.
الف) چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟
ب) چرا این چهارضلعی مستطیل است؟
پ) در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
ت) اندازه‌ی AM چه رابطه‌ای با اندازه‌ی BC دارد؟ آن‌را بیان کنید.



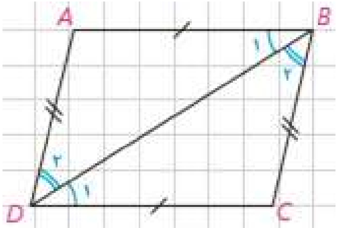
۹۸ ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

۹۹ ثابت کنید هر چهارضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

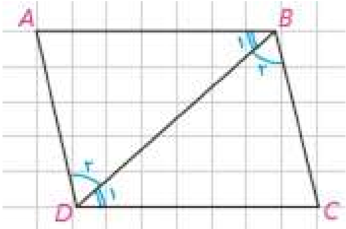
۱۰۰ ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

۱۰۱ ثابت کنید در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل‌اند.

۱۰۲ ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابل دو به دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



۱۰۳ وقتی در هر متوازی‌الاضلاع ABCD یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می‌کنیم، دو مثلث هم‌نهشت ABD و CDB پدید می‌آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم کنیم و $\Delta \mathrm{ABD}$ و $\Delta \mathrm{CDB}$ هم‌نهشت باشند، آیا چهارضلعی ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است؟



۱۰۴ ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه‌اند.

۱۰۵ درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید:

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت .... هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویه‌ی .... و .... هم‌اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

۱۰۶ ثابت کنید:

هرگاه هر قطر یک چهارضلعی، آن چهارضلعی را به دو مثلث همنهشت تقسیم کند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۱۰۷ ثابت کنید هر گاه وسطهای اضلاع مربعی را متوالیاً به هم وصل کنیم، چهارضلعی حاصل یک مربع می‌باشد.

۱۰۸ نسبت طول ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ باشد، طول وتر آن چقدر است؟

۱۰۹ ثابت کنید اگر قطرهای یک چهار ضلعی بر هم عمود باشند، مساحت چهار ضلعی برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌ی قطرها خواهد بود.

۱۱۰ ثابت کنید که اگر در یک چهار ضلعی اضلاع مقابل دو به دو متساوی باشند، چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۱۱۱ ثابت کنید که اگر در یک چهار ضلعی هر دو زاویه‌ی مجاور به یک ضلع، مکمل یکدیگر باشند، چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۱۱۲ ثابت کنید که اگر در یک چهار ضلعی زاویه‌های مقابل دو به دو متساوی باشند، چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

۱۱۳ ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.

۱۱۴ ثابت کنید یک چهارضلعی که قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند، متوازی الاضلاع است.

۱۱۵ با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید که در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

۱۱۶ ربع دایره‌ای به شعاع a را حول شعاع دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.

۱۱۷ هریک از عبارت‌های زیر را تعریف کنید.
الف) دو خط متنافر
ب) سطح مقطع
ج) فصل مشترک

۱۱۸ جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب پر کنید.
۱) در صفحه، دو خط موازی با یک خط ....
۲) اگر دو صفحه با هم نقطه‌ی اشتراکی نداشته باشند نسبت به هم .... هستند.

۱۱۹ درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.
۱- از یک نقطه خارج خط ، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. درست☐ نادرست☐
۲- هر دو مثلث متشابه، هم‌نهشت‌اند. درست☐ نادرست☐

۱۲۰ مستطیلی داریم به طول a و عرض b. حجم حاصل از دوران حول طول و عرض آن‌را به دست آورید. نسبت حجم‌ها را محاسبه کنید.

۱۲۱ مساحت شکل حاصل از برخورد صفحه P با کره به شعاع ۷ سانتی‌متر را به دست آورید. (فاصله صفحه تا مرکز کره ۴ سانتی‌متر است.)

۱۲۲ سطح مقطع یک شکل را تعریف کنید.

۱۲۳ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع‌های a و b دوران داده‌ایم. نسبت حجم شکل‌های حاصل از این دوران را به دست آورید.

۱۲۴ مخروط ناقص را تعریف کنید.

۱۲۵ نام شکل‌های سطح مقطع مخروط را در برخورد با صفحات افقی، صفحه مایلی که از قاعده بگذرد و صفحه مایلی که از قاعده نگذرد، بنویسید.

۱۲۶ گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

الف) از دوران دایره حول قطرش .... به دست می‌آید.

۱) کره ۲) بیضی

ب) در تفکر تجسمی از .... برای تفکر استفاده می‌کنیم.

۱) عبارت و جملات زبانی ۲) تصاویر

۱۲۷ جاهای خالی را با کلمات و یا عبارت‌های مناسب کامل کنید.

الف) شکل حاصل از دوران نیم‌کره حول قطرش .... است.

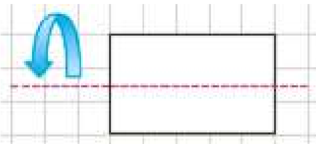
ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع‌هایش زاویه‌ی قائمه .... است.

۱۲۸ درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.

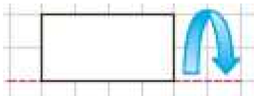
الف) سطح مقطع استوانه با یک صفحه افقی دایره است. درست☐ نادرست☐

ب) سطح مقطع مکعب مستطیل با یک صفحه عمودی مربع است. درست☐ نادرست☐

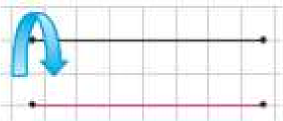
۱۲۹ اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟

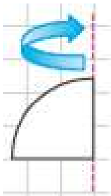


۱۳۰ اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم چه جسم هندسی حاصل می‌شود؟



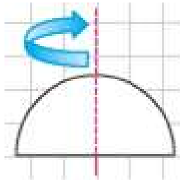
۱۳۱ دو خط موازی درنظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم چه جسم هندسی ساخته می‌شود؟

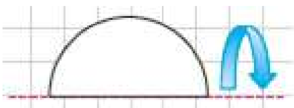




۱۳۲ اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟

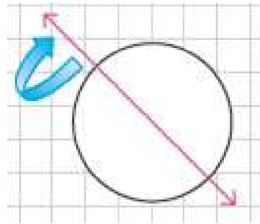
۱۳۳ یک نیم‌دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران می‌دهیم. چه شکلی ساخته می‌شود؟



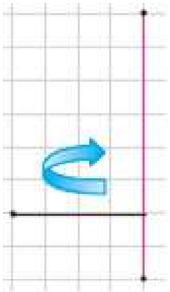


۱۳۴ یک نیم‌دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟

۱۳۵ دایره‌ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم، شکل حاصل چیست؟



۱۳۶ فرض کنید دو پاره‌خط بر هم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم، چه شکل هندسی ساخته می‌شود؟

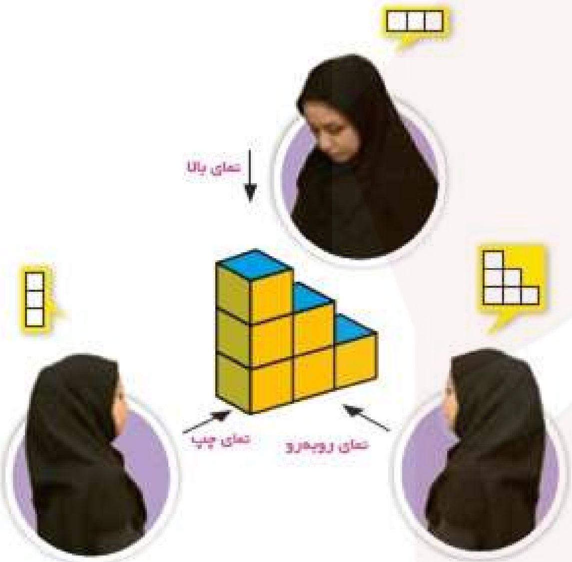


۱۳۷ الف) تصویر روبه‌رو چه چیزی را به شما نشان می‌دهد؟

ب) آیا می‌توان ادعا کرد که یکی از این تصاویر نسبت به بقیه کامل‌تر یا بهتر است؟

ج) آیا می‌توان بدون چرخاندن شکل یا تغییر زاویه‌ی دید، تمام این تصاویر را دید؟

د) آیا نمونه‌هایی شبیه به این موضوع را در زندگی واقعی دیده‌اید؟

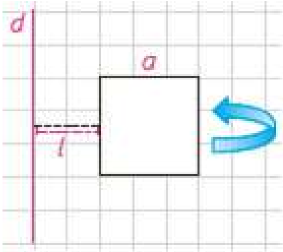


۱۳۸ ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحه‌ی موازی، موازی است با دیگری هم موازی است.

۱۳۹ از نقطه‌ی A خارج خط l، یک صفحه‌ی عمود بر l می‌گذرانیم. ثابت کنید این صفحه یکتا است.

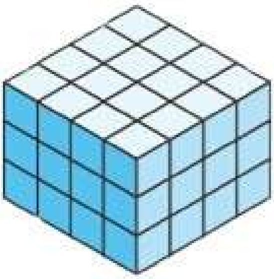
۱۴۰ چهار نقطه‌ی D و C و B و A که بر یک صفحه واقع نیستند، مفروض هستند. ثابت کنید پاره‌خط های AB و CD متنافر هستند.

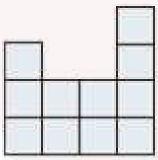
۱۴۱ مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.



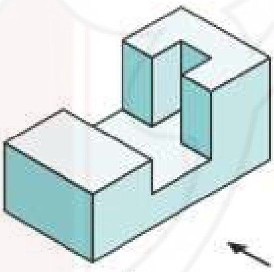
۱۴۲ دو پاره‌خط متقاطع را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر یکی از پاره‌خط ها را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟

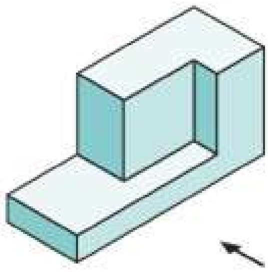
۱۴۳ شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟
حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟



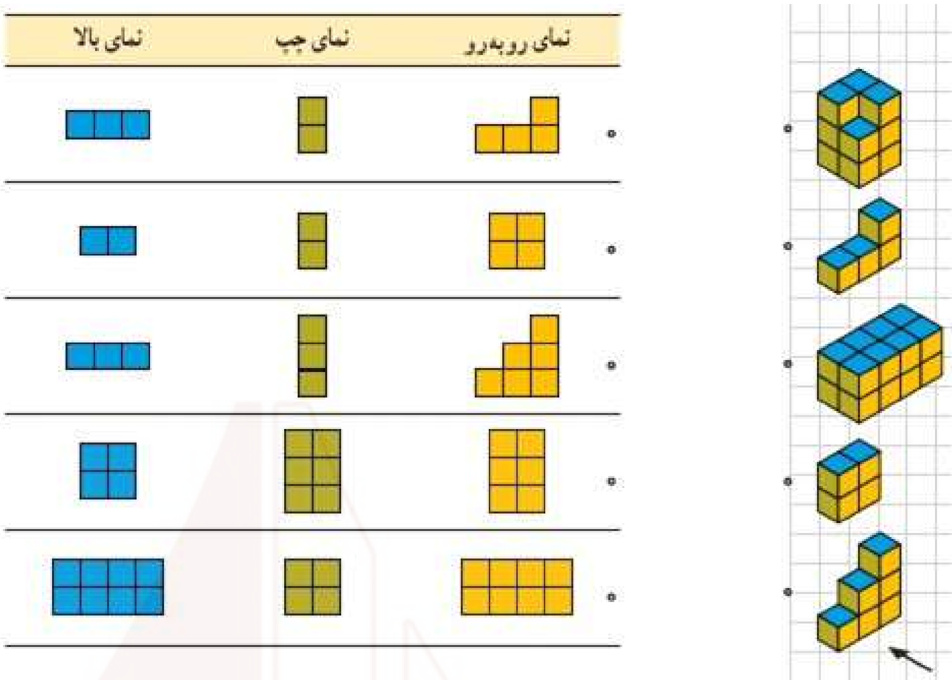


۱۴۴ در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و چپ را رسم کنید.

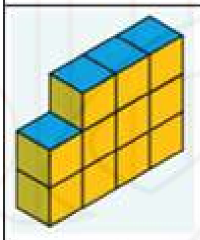
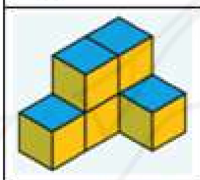
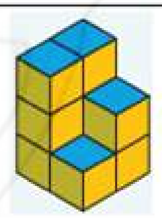

۲


۱

۱۴۵ نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.



۱۴۶ سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ	
			
			
			

۱۴۷ به این مکعب دقت کنید:

الف) خط های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

HG و DC چطور؟

EF و GC چطور؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

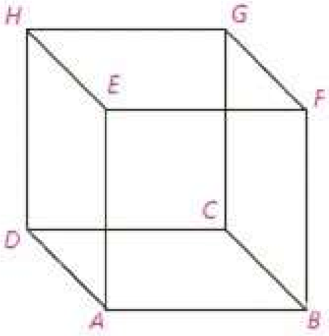
با چند خط متنافر است؟

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

با کدام متقاطع است؟

بر کدام واقع است؟

د) دو صفحه‌ی موازی و دو صفحه‌ی متقاطع نام ببرید.

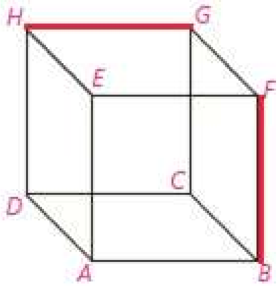


۱۴۸ دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با هم متنافرند.

الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

ب) اگر صفحه‌ی P شامل یکی از دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

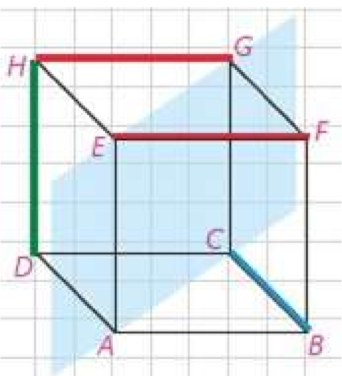
ج) اگر صفحه‌ی P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟



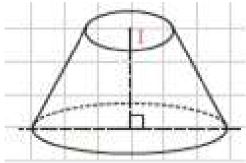
۱۴۹ مکعب روبه‌رو را درنظر بگیرید.

در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو درنظر گرفت؟

EF و HG:	HG و HD:
EA و GC:	EC و FD:
HD و BC:	GD و AB:



۱۵۰ اگر صفحه‌ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند و آن‌را به دو نیمه مساوی تقسیم کند، سطح مقطع حاصل چیست؟



پاسخنامه تشریحی

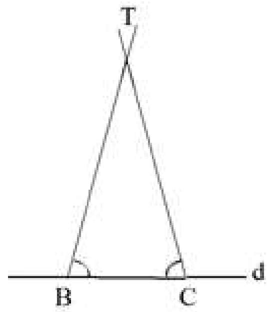
۱ این طور نیست که a مساوی b باشد، یعنی a مساوی b نیست به عبارت دیگر $a > b$ یا $a < b$

۲ اگر در یک چهارضلعی قطرها یک‌دیگر را نصف کنند آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۳ خط d و نقطه‌ی T بیرون خط d مفروض است.

فرض خلف: از نقطه‌ی T دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم. بنابراین دو عمود خط d را در ۲ نقطه‌ی B و C قطع کرده‌اند.

بنابراین یک مثلث داریم که مجموع زاویه‌های داخلی آن از ۱۸۰° بیش‌تر خواهد شد و این امکان وجود ندارد. بنابراین از نقطه‌ی T دو عمود نمی‌توان رسم کرد و فقط یک عمود می‌توانیم رسم کنیم.



۴ الف)

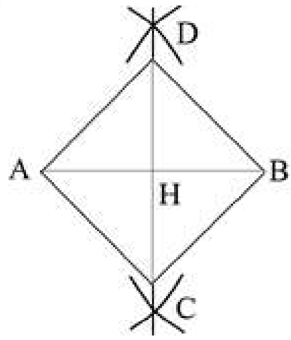
$$\begin{matrix} \sqrt{۲} \in \mathrm{Q} \\ -\sqrt{۲} \in \mathrm{Q} \end{matrix} \Rightarrow (\sqrt{۲}) + (-\sqrt{۲}) = ۰ \notin Q$$

ب) عدد صفر معکوس ندارد، چون معکوس صفر $\frac{۱}{۰}$ می‌شود که تعریف نشده است.

۵ در مربع قطرها عمودمنصف یک‌دیگر و برابر هستند. ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر را رسم کرده و سپس عمودمنصف آن‌را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصف و AB را H می‌نامیم.

نقاط D و C را چنان اختیار می‌کنیم که $\mathrm{HD} = \mathrm{HC} = ۲$.

نقاط A، B، C و D را به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم.



۶ ۱) به یک فاصله ۲) یک

۷ اگر در یک مثلث مربع یکی از ضلع‌ها با حاصل‌جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

۸ به قضیه‌هایی که عکس آن‌ها نیز درست باشد قضیه‌ی دوشرطی می‌گویند که با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان می‌شوند.

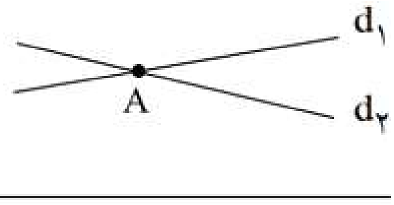
اگر در مثلثی، دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر از ضلع مقابل به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است و برعکس.

۹ به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است مثال نقض گفته می‌شود.

۱۰ برهان خلف: فرض کنیم از نقطه‌ی A دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را موازی با خط d رسم کرده باشیم. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d_۱ \parallel d \\ d_۲ \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow d_۱ \parallel d_۲$$

و این خلاف فرض متقاطع بودن $d_۱$ و $d_۲$ در نقطه‌ی A است پس $d_۱$ و $d_۲$ بر هم منطبق هستند.



۱۱ در جدول زیر با ترسیم قطرهای رسم شده از یک رأس چندضلعی را به مثلث تقسیم می‌کنیم تا مجموع زوایای n ضلعی را پیدا کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی	تعداد مثلث‌ها	تعداد ضلع‌ها
۱۸۰ = ۱۸۰ × ۱	۱	۳ ضلعی
۳۶۰ = ۱۸۰ × ۲	۲	۴ ضلعی
۵۴۰ = ۱۸۰ × ۳	۳	۵ ضلعی
⋮		⋮
۱۸۰ × (n - ۲)	(n - ۲)	n ضلعی

۱۲ این طور نیست که اگر در مثلثی دو ضلع با هم برابر نباشند، آن‌گاه زاویه‌های مقابل آن‌ها نیز با هم برابر نیست. که معادل جمله‌ی زیر است:

اگر در مثلثی دو ضلع با یک‌دیگر برابر باشند، آن‌گاه زاویه‌های مقابل به آن‌ها با هم برابر نیست.

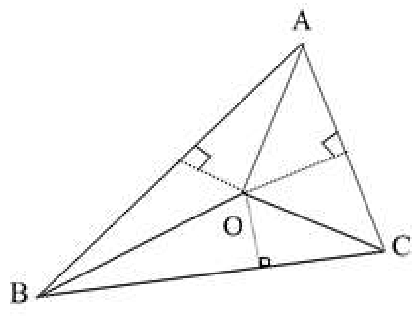
۱۳ مثلث دلخواه ABC را رسم می‌کنیم و از آن‌جا که پاره‌خط های AB و AC متقاطع هستند، عمودمنصف آن‌ها نیز با هم در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند.

۱- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس: $\mathrm{OA} = \mathrm{OC} \quad (۱)$

۲- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس: $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} \quad (۲)$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$$

طبق قضیه‌ی عمودمنصف‌ها هر نقطه که فاصله‌ی آن از دو سر پاره‌خط یکسان باشد روی عمودمنصف آن قرار دارد. نتیجه می‌گیریم O روی عمودمنصف BC است پس O محل تلاقی سه عمودمنصف است. بنابراین عمودمنصف‌های اضلاع مثلث همرسند.



۱۴ ۱- نقطه‌ی P روی نیمساز زاویه‌ی A است، بنابراین: $PF = PG$

۲- نقطه‌ی P روی نیمساز زاویه‌ی B است، بنابراین: $PE = PF$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $PG = PF$ بنابراین نقطه‌ی P روی نیمساز زاویه‌ی $\widehat{C}$ قرار دارد. در نتیجه نقطه‌ی P محل برخورد نیمسازهای مثلث ABC است. بنابراین نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.

۱۵ در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های مقابل مساویند پس:

$$\left.\begin{matrix} AB \parallel FC \\ BC \parallel AF \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ABCF} \Rightarrow AF = BC$$ متوازی‌الاضلاع است

$$\left.\begin{matrix} AE \parallel BC \\ AC \parallel BE \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ACBE} \Rightarrow AE = BC$$ متوازی‌الاضلاع است

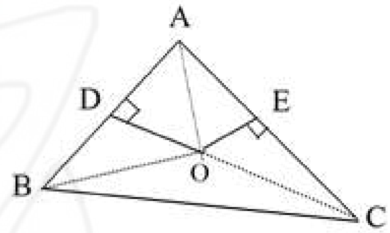
پس $AF = AE$ یعنی A وسط ضلع EF است.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد نقاط B و C به ترتیب وسط اضلاع DE و DF هستند. پس ارتفاع AG عمودمنصف ضلع EF و ارتفاع BI عمودمنصف DE و ارتفاع CH عمودمنصف DF است. بنابراین ارتفاع‌های مثلث ABC روی عمودمنصف‌های مثلث DEF است و می‌دانیم عمودمنصف‌های هر مثلث همرس‌اند پس ارتفاع‌های مثلث ABC همرس‌اند.

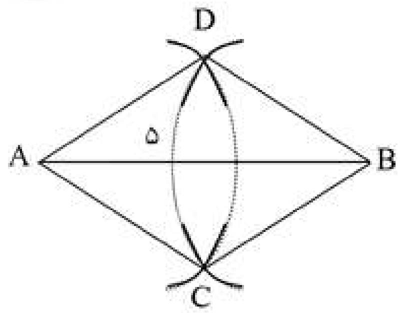
۱۶ ۱- نقطه‌ی O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است، بنابراین: $OA = OC$

۲- نقطه‌ی O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، بنابراین: $OA = OB$

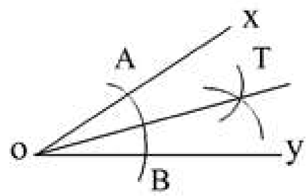
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $OC = OB$ بنابراین نقطه‌ی O روی عمودمنصف CB قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد عمودمنصف‌ها است.



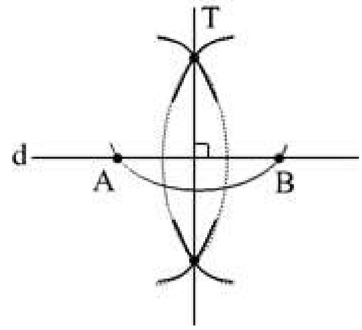
۱۷ ابتدا قطر ۵ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم و آن‌را A و B می‌نامیم. سپس دو کمان به مرکز دو سر پاره‌خط و به اندازه‌ی ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و آن‌ها را D و C می‌نامیم. نقاط A , B , C , D را به هم وصل می‌کنیم.



۱۸ دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کرده و کمانی به مرکز O رسم می‌کنیم. محل برخورد دو کمان را A و B می‌نامیم. دو کمان به مرکز A و B و به اندازه‌ی بیش‌تر از نصف A و B رسم می‌کنیم. محل برخورد دو کمان را T می‌نامیم. O را به T وصل کرده و امتداد می‌دهیم. خط حاصل نیمساز موردنظر خواهد بود.



۱۹ فرض می‌کنیم خط d و نقطه‌ی T را داریم. ابتدا به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه‌ی B و A قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.



۲۰ به مرکز A و A' به‌ترتیب ۲ دایره به شعاع ۲ و ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو دایره نقاط موردنظر هستند.

۲۱ الف) $\widehat{D}_۲$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABD است پس $\widehat{D}_۲ = \widehat{A}_۱ + \widehat{B}$ در نتیجه $\widehat{D}_۲ > \widehat{A}_۱$.

ب) چون AD نیمساز است پس $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$ از طرف دیگر $\widehat{D}_۲ > \widehat{A}_۱$ پس $\widehat{D}_۲ > \widehat{A}_۲$.

پ) در مثلث $\overset{\triangle}{ADC}$ چون $\widehat{D}_۲ > \widehat{A}_۲$ پس $\mathrm{AC} > \mathrm{DC}$.

ت)

$$\overset{\triangle}{ADC} \text{ زاویه خارجی } \widehat{D}_۱ \Rightarrow \widehat{D}_۱ = \widehat{A}_۲ + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{D}_۱ > \widehat{A}_۲ \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲} \widehat{D}_۱ > \widehat{A}_۱ \Rightarrow \mathrm{AB} > \mathrm{BD}$$

ث) با جمع نامساوی (پ) و (ت) نتیجه می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AC} > \mathrm{DC}\\ \mathrm{AB} > \mathrm{BD}\end{array}\right\} \xrightarrow{+} \mathrm{AC} + \mathrm{AB} > \mathrm{BC}$$

نتیجه: در هر مثلث مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوم بزرگتر است.

۲۲ الف) عکس قضیه: در هر مثلث اگر دو زاویه روبه‌رو به دو ضلع برابر باشند آن‌گاه آن دو ضلع برابرند.

قضیه‌ی دوشرطی: در هر مثلث اگر دو ضلع برابر باشند، زوایه‌های روبه‌رو به آن دو ضلع نیز برابرند وبرعکس.

ب) اگر قطرهای یک چهارضلعی عمودمنصف هم‌دیگر باشند آن چهارضلعی لوزی است.

قضیه‌ی دوشرطی: یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهای آن عمودمنصف هم‌دیگر باشند.

پ) در هر مثلث اگر سه زاویه مساوی باشند آن‌گاه سه ضلع مساویند.

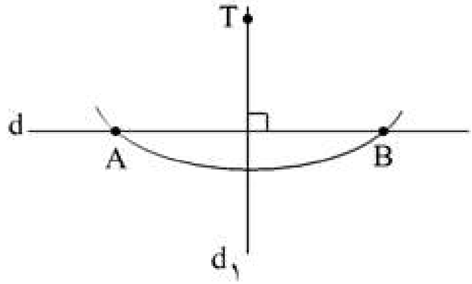
قضیه‌ی دو شرطی: اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه سه زاویه برابرند و برعکس

ت) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند آن‌گاه شعاع‌های آن‌ها برابرند.

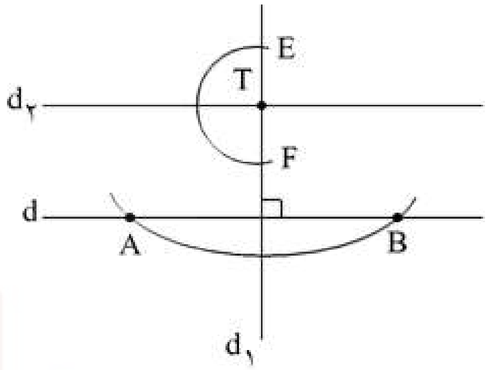
قضیه‌ی دوشرطی: اگر دو دایره شعاع‌های برابرداشته باشند، آن‌گاه مساحت های برابر دارند و برعکس

۲۳ فرض کنیم که $\widehat{B} = \widehat{C}$ لذا باید مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد پس باید $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ باشد و این مخالف فرض است.

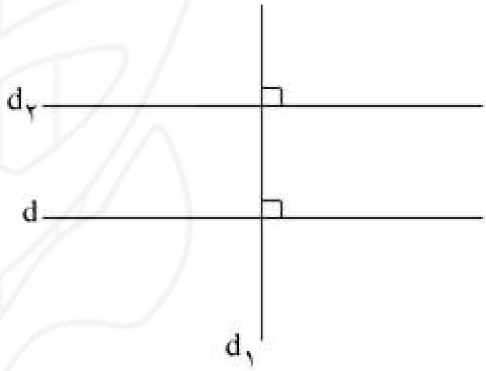
۲۴ ۱- به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d عمود است. (در شکل خط d_1 عمودمنصف AB است.)



۲- به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم تا خط d_1 را در نقاط E و F قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط EF بر خط d_1 عمود است. (در شکل خط d_2 عمودمنصف EF است.)



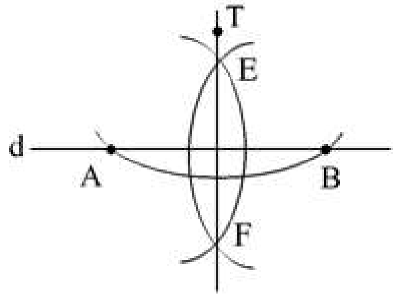
۳- دو خط d_2 و d بر خط d_1 عمودند پس بنابر عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب با هم موازیند ($d \parallel d_2$).



۲۵ ابتدا از نقطه‌ی دلخواه T کمانی رسم می‌کنیم که خط موردنظر را در نقاط A و B قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود است و از T عبور می‌کند.

۲۶ ۱- به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه‌ی متمایز A و B قطع کند.

۲- حال به مراکز A و B دو کمان مساوی به شعاع بزرگتر از نصف AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط E و F قطع کنند. در این صورت EF عمودمنصف AB است.

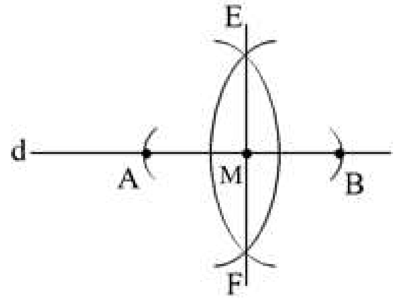


۳- بله، زیرا نقطه‌ی T از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.

عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود و از نقطه‌ی وسط AB بگذرد.

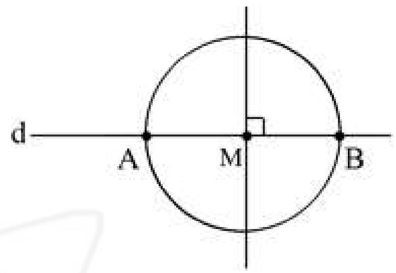
۲۷ ۱- به شعاع دلخواه کمانی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و A قطع کند. در این صورت M وسط پاره‌خط AB است.

۲- به مراکز A و B دو کمان به شعاعی بزرگتر از نصف AB رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقاط E و F قطع کنند. خط EF عمودمنصف AB است.



۳) عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود و از نقطه‌ی M می‌گذرد.

۲۸ ابتدا نقطه‌ای دلخواه روی خط d درنظر می‌گیریم. به شعاع دلخواه یک دایره به مرکز این نقطه رسم می‌کنیم. حال عمودمنصف پاره‌خط به دست آمده از محل تقاطع خط مفروض و دایره را رسم می‌کنیم.

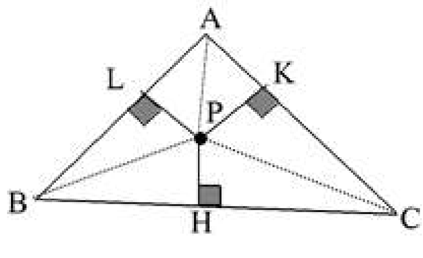


۲۹ پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف پاره‌خط AB باز کرده و از نقاط A و B دو کمان مساوی رسم می‌کنیم. خط حاصل از اتصال نقاط تقاطع این دو کمان عمودمنصف AB است.

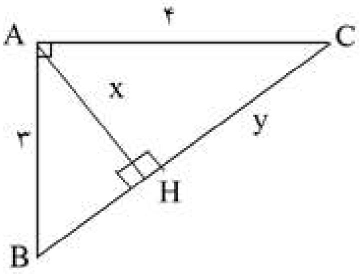
۳۰ در مثلث $\overset{\triangle}{\mathrm{ABC}}$ نیمسازهای داخلی زاویه‌های $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند. از P بر ضلع‌های AB و AC و BC عمود می‌کنیم. تا به ترتیب آن‌ها را در نقاط L و K و H قطع نمایند.

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ روی نیمساز } \widehat{B} \text{ است} \to \mathrm{PH}=\mathrm{PL} \\ P \text{ روی نیمساز } \widehat{C} \text{ است} \to \mathrm{PH}=\mathrm{PK} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{PL}=\mathrm{PK}$$

بنابراین P روی نیمساز $\widehat{A}$ نیز قرار دارد. یعنی P نقطه‌ی همرسی هر سه نیمساز است.



۳۱ در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:



$$\mathrm{BC}^{۲} = \mathrm{AB}^{۲} + \mathrm{AC}^{۲} \Rightarrow y^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} \Rightarrow y^{۲} = ۲۵ \Rightarrow y = ۵$$

$$\mathrm{AH} \times \mathrm{BC} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \Rightarrow x \times ۵ = ۳ \times ۴$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

۳۲

$$\frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۵}{۳} = \frac{z-۲}{۴} = t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} = t \Rightarrow x = ۲t + ۱ \\ \frac{y+۵}{۳} = t \Rightarrow y = ۳t - ۵ \\ \frac{z-۲}{۴} = t \Rightarrow z = ۴t + ۲ \end{cases}$$

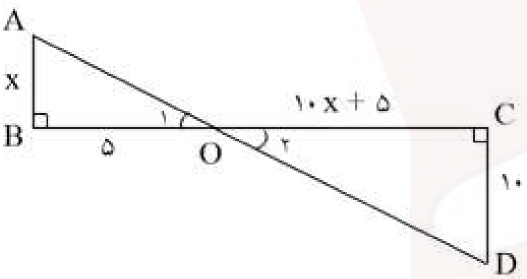
$$\frac{x+y+۴}{x+y+z+۲} = \frac{۲t + ۱ + ۳t - ۵ + ۴}{۲t + ۱ + ۳t - ۵ + ۴t + ۲ + ۲} = \frac{۵t}{۹t} = \frac{۵}{۹}$$

۳۳ این دو مثلث بنا به دو زاویه برابر متشابه هستند.

$$\begin{cases} \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲ \\ \widehat{A} = \widehat{D} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OC}} \Rightarrow \frac{x}{۸} = \frac{x+۲}{۴x-۴} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{x+۲}{x-۱} \Rightarrow x^{۲} - x = ۲x + ۴$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \ \text{ق ق} \\ x = -۱ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۳۴ این دو مثلث بنا به دو زاویه برابر متشابه هستند بنابراین داریم:



$$\begin{cases} \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲ \\ \widehat{B} = \widehat{C} = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۱۰} = \frac{۵}{۱۰x+۵} \Rightarrow ۱۰x^{۲} + ۵x = ۵۰$$

$$\Rightarrow ۱۰x^{۲} + ۵x - ۵۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۵} ۲x^{۲} + x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۱ - ۴(۲)(-۱۰) = ۸۱$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۸۱}}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-۱۰}{۴} = -۲/۵ \ \text{غ ق ق} \\ x = ۲ \ \text{ق ق} \end{cases}$$

۳۵ چون $\mathrm{BC} \parallel \mathrm{DE}$ است بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} \Rightarrow \frac{x+۲}{x+۴} = \frac{x+۵}{x+۸} \Rightarrow x^{۲} + ۱۰x + ۱۶ = x^{۲} + ۹x + ۲۰ \Rightarrow x = ۴$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DE}} \Rightarrow \frac{۶}{۱۴} = \frac{y}{۲۴} \Rightarrow y = \frac{۶ \times ۲۴}{۱۴} \Rightarrow y = \frac{۷۲}{۷}$$

۳۶ چون $\mathrm{DE} \parallel \mathrm{BC}$ است بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} \Rightarrow \frac{x+۱}{x} = \frac{x+۴}{x+۲} \Rightarrow \cancel{x^۲} + ۳x + ۲ = \cancel{x^۲} + ۴x \Rightarrow x = ۲$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DE}} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{y}{۱۰} \Rightarrow y = ۶$$

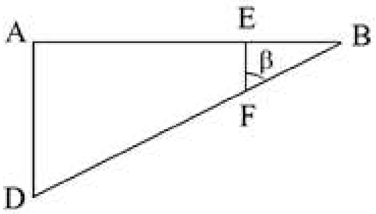
۳۷ چون $\mathrm{DE} \parallel \mathrm{BC}$ است بنابراین طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} \Rightarrow \frac{x+۴}{x+۷} = \frac{x+۲}{x+۴} \Rightarrow \cancel{x^۲} + ۸x + ۱۶ = \cancel{x^۲} + ۹x + ۱۴ \Rightarrow x = ۲$$

۳۸ چون $\mathrm{DE} \parallel \mathrm{BC}$ است، بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

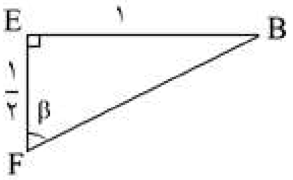
$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CE}} \Rightarrow \frac{x+۱}{x+۲} = \frac{x+۳}{x+۵} \Rightarrow \cancel{x^۲} + ۶x + ۵ = \cancel{x^۲} + ۵x + ۶ \Rightarrow x = ۱$$

۳۹



$$\overset{\triangle}{ABD} : \mathrm{EF} \parallel \mathrm{AD} \Rightarrow \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{AD}} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{\mathrm{EF}}{۲}$$

$$\Rightarrow \mathrm{EF} = \frac{۱}{۲}$$



$$\Delta\mathrm{BEF} : \mathrm{tg}\,\beta = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} = ۲$$

β مکمل $\alpha \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = -\,\mathrm{tg}\,\beta = -۲$

۴۰

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}\mathrm{AD} \times \mathrm{AE}\,\mathrm{Sin}\,A}{\frac{۱}{۲}\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}\,\mathrm{Sin}\,A} = \frac{\mathrm{AD} \times \mathrm{AE}}{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}} = \frac{۳ \times ۵}{۱۰ \times ۹} = \frac{۱}{۶}$$

۴۱ در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر آن‌را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند. بنابراین داریم:

$$\Delta\mathrm{ADC} \sim \Delta\mathrm{DCB} \Rightarrow \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}} \Rightarrow \mathrm{CD}^۲ = \mathrm{AD}.\mathrm{DB}$$

۴۲ نسبت تشابه برابر است با $\frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۸}$ که همان نسبت بین محیط است:

محیط مثلث اول $= ۶ + ۸ + ۱۳ = ۲۷$

$$\frac{۲۷}{x} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \frac{۴ \times \cancel{۲۷}^{\,۹}}{\cancel{۳}_{\,۱}} = ۳۶$$ محیط مثلث دوم

۴۳

$$\frac{x-۱}{x+۲}=\frac{x+۱}{x+۵}\Rightarrow (x-۱)(x+۵)=(x+۱)(x+۲)\Rightarrow \cancel{x^۲}+۴x-۵=\cancel{x^۲}+۳x+۲$$
$$\Rightarrow ۴x-۳x=۲+۵\Rightarrow x=۷$$

$$\mathrm{AM}=۶\,,\mathrm{BM}=۹\Rightarrow \mathrm{AB}=۱۵$$

در ضمن بنابر قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و از آن‌جا که نسبت محیط همان نسبت تشابه است:

$$\frac{\text{محیط } \mathrm{AMN}}{\text{محیط } \mathrm{ABC}}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

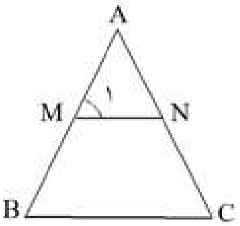
۴۴

$$\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{معکوس طرفین}}\frac{y}{x}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow[\text{در عددی ثابت ضرب کنیم}]{\text{می توان صورت و مخرج کسر را}}\frac{۳y}{۳x}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳y}{۳}=\frac{۳x}{۲}\Rightarrow \frac{۳y-۳}{۳}=\frac{۳x-۲}{۲}\Rightarrow \frac{۳y-۳}{۳x-۲}=\frac{۳}{۲}$$

حاصل همان $\frac{۳}{۲}$ است.

۴۵



$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}+\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AN}+\mathrm{NC}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}\quad (۱)$$

دو مثلث AMN و ABC بنا به حالت متناسب بودن دو ضلع (۱) و برابری یک زاویه با هم متشابه هستند. بنابراین داریم $\widehat{M}=\widehat{B}$ با درنظر گرفتن خط AB به عنوان خط مورب و برابری $\widehat{M}_۱=\widehat{B}$ می‌توان نتیجه گرفت که $\mathrm{MN}\parallel\mathrm{BC}$ است.

۴۶ نسبت تشابه برابر است با $\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$ می‌دانیم نسبت محیط های دو مثلث متشابه همانند نسبت تشابه است.

$$\frac{\cancel{(۱۰+۸+۶)}^{۲۴}}{x}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=\frac{\cancel{۲۴}^{۱۲}\times ۳}{۲}=۳۶$$

۴۷ AD نیمساز زاویه‌ی A است. باید ثابت کنیم که $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$

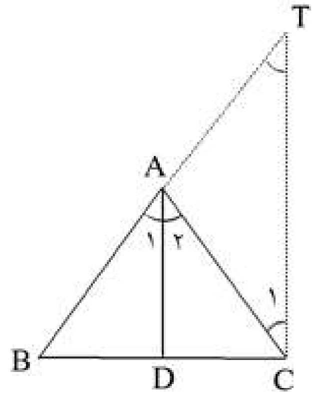
اثبات: از نقطه‌ی C موازی AD خطی رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطه‌ی T قطع کند. از آن‌جا که $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{CT}$ و BT خط مورب آن‌ها $\widehat{A}_1=\widehat{T}$ و با درنظر گرفتن AC به عنوان خط مورب $\widehat{A}_2=\widehat{C}_1$.

$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2 \Rightarrow \widehat{C}_1=\widehat{T} \Rightarrow \mathrm{ATC}$ مثلث متساوی‌الساقین

$\Rightarrow \mathrm{AT}=\mathrm{AC}\ \ (1)$

با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث BEC می‌توان نوشت: $(\mathrm{AD} \parallel \mathrm{EC})$

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AT}} \xrightarrow[\text{طبق ۱}]{\mathrm{AT=AC}} \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$$



۴۸ الف) درست ب) نادرست

۴۹ از آن‌جا که M و N وسط ضلع‌های AB و AC واقع هستند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$1=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}} \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} \mathrm{MN} \parallel \mathrm{BC}$$

هم‌چنین چون N و P وسط ضلع‌های AC و BC هستند، تناسب زیر را داریم:

$$1=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}}=\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \Rightarrow \mathrm{AB} \parallel \mathrm{NP}$$

$$\begin{matrix} \mathrm{NP} \parallel \mathrm{AB} \\ \mathrm{MN} \parallel \mathrm{BC} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{MNPB}\ \text{متوازی الاضلاع} \Rightarrow \widehat{N}=\widehat{B}\ (1) \\ \mathrm{MNCP}\ \text{متوازی الاضلاع} \Rightarrow \widehat{C}=\widehat{M}\ \ (2) \end{matrix}$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{MNP}$ برابری دو زاویه

نسبت تشابه: $\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2} \xrightarrow[\mathrm{NC=MP}]{\mathrm{NCPM}\ \text{متوازی الاضلاع}} \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}$

۵۰ اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

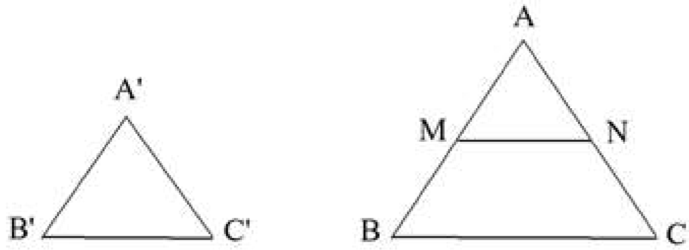
۵۱ متناسب بودن سه ضلع، برابری دو زاویه، متناسب بودن دو ضلع و برابری زاویه‌ی بین آن‌ها.

۵۲

$$\begin{matrix} \mathrm{AB} \parallel \mathrm{CD}\ \text{و}\ \mathrm{CB}\ \text{مورب} \Rightarrow \widehat{B}=\widehat{C} \\ \mathrm{AB} \parallel \mathrm{DC}\ \text{و}\ \mathrm{AD}\ \text{مورب} \Rightarrow \widehat{A}=\widehat{D} \end{matrix} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{OCD}\ \text{برابری دو زاویه}$$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}} \Rightarrow \frac{x}{10}=\frac{2}{5} \Rightarrow x=4$$

۵۳ در مثلث ABC، روی AB و AC، پاره‌خط های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازه‌ی A'B' و A'C' جدا کنید.



۱) $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

طبق قضیه‌ی اساسی تشابه نتیجه می‌گیریم: $MN \parallel BC$

۲- ضلع‌ها متناسب و زاویه‌ها برابرند، پس: $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

۳) $\left.\begin{array}{l} \text{تعمیم تالس}: \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \\ \text{فرض}: \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow MN=B'C'$

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} AMN \sim A'B'C'$

۴- بنابراین نتیجه می‌گیریم: $\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \\ \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

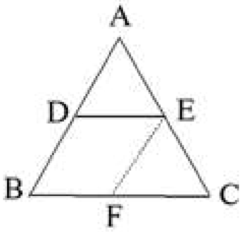
۵۴ ۱- $BC \parallel MN, AB$ مورب $\Rightarrow \angle M=\angle B$

$BC \parallel MN, AC$ مورب $\Rightarrow \angle N=\angle C$

۲- $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

۳- این دو مثلث با هم متشابه هستند.

۵۵ اگر خطی دو ضلع مثلث را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه‌های ضلع‌هایش با مثلث اصلی متناسب است. می‌دانیم طبق فرض $DE \parallel BC$ باید ثابت کنیم.



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

از نقطه‌ی E پاره‌خط EF را موازی DB رسم می‌کنیم چهارضلعی DEFB یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو دوبه‌دو موازی‌اند، بنابراین $DE=BF$ و $DB=EF$

در مثلث ABC با درنظر گرفتن $DE \parallel BC$ داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (۱)

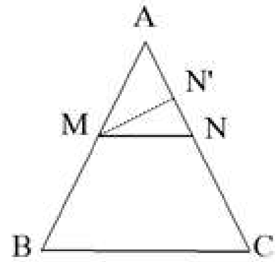
در مثلث ABC و با درنظر گرفتن $EF \parallel AB$ داریم: $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ (۲)

با توجه به ۱ و ۲ و جای‌گذاری DE به جای BF داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

۵۶ اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن‌ها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظر متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است اثبات از طریق برهان خلف: $\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$ و فرض کنیم برخلاف حکم $\mathrm{MN} \nparallel \mathrm{BC}$، پس از نقطه‌ی M پاره‌خط 'MN را موازی BC رسم می‌کنیم.

حال با توجه به قضیه‌ی تالس داریم: $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AN}'}{\mathrm{AC}}$ با توجه به رابطه‌ی فرض مسئله داریم:

$\frac{\mathrm{AN}'}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ که از آن نتیجه می‌شود که $\mathrm{AN}=\mathrm{AN}'$ و بنابراین N بر 'N منطبق است و MN همان 'MN است که موازی BC است.



۵۷ الف) در مثلث ADE قاعده‌ی AE و در مثلث DEC قاعده‌ی EC مقابل رأس D است.

ب) $\frac{S_{\mathrm{DAE}}}{S_{\mathrm{DEC}}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}\,,\,\frac{S_{\mathrm{ADE}}}{S_{\mathrm{DBE}}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}$

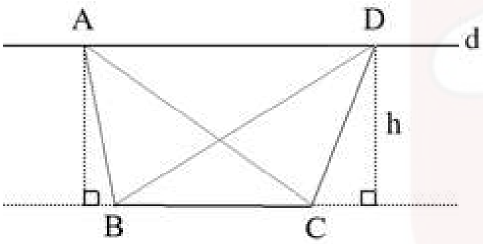
برای دو مثلث ADE و DBE قاعده‌های روبه‌رو به رأس مشترک E را درنظر می‌گیریم.

ج) چون هر دو یک قاعده دارند (DE) و نقاط رأس مقابل به قاعده آن‌ها در یک خط موازی DE قرار دارند، پس مساحت هر دوی آن‌ها برابر است.

د) چون $S_{\mathrm{DBE}}=S_{\overset{\triangle}{DEC}}$، پس دو کسر بالا با هم برابرند، در نتیجه: $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}$

۵۸ در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ و $D\overset{\triangle}{B}C$ را رسم می‌کنیم به طوری‌که قاعده‌های هر دو BC بوده و رأس آن‌ها روی خط d موازی قاعده قرار دارد. ارتفاع دو مثلث را رسم کرده و مساحت آن‌ها را می‌نویسیم.

هر دو مثلث دارای ارتفاع h هستند. چون $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$ است، پس فاصله‌ی آن دو در هر نقطه برابر است.



$$\left.\begin{array}{l} S_{\mathrm{ABC}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{BC}.\,h \\ S_{\mathrm{DCB}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{BC}.\,h \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\mathrm{ABC}}=S_{\mathrm{DCB}}$$

۵۹

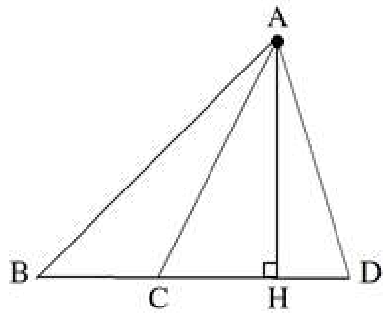
$$\frac{S_{\mathrm{ABH}}}{S_{\mathrm{AHC}}}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{HC}} \Rightarrow \frac{۴}{۹}=\frac{x}{y} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{۴}{۴+۹}=\frac{x}{x+y} \xrightarrow{x+y=\mathrm{BC}=۶}$$

$$\frac{۴}{۱۳}=\frac{x}{۶} \Rightarrow x=\frac{۲۴}{۱۳}$$

$$y=۶-\frac{۲۴}{۱۳}=\frac{۵۴}{۱۳}$$

۶۰ در شکل مقابل دو مثلث ABC و ADC در رأس A مشترک و قاعده‌ی مقابل به رأس A یعنی BC و CD روی یک خط راست هستند. با رسم ارتفاع AH داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\mathrm{ABC}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AH}\times\mathrm{BC} \\ S_{\mathrm{ACD}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AH}\times\mathrm{CD}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{\mathrm{ABC}}}{S_{\mathrm{ACD}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\mathrm{AH}\times\mathrm{BC}}{\frac{۱}{۲}\mathrm{AH}\times\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CD}}$$



۶۱ دو مثلث $\Delta\mathrm{DBC}$ و $\Delta\mathrm{DAC}$ هم‌قاعده‌اند و رئوس آن‌ها یعنی B و A روی خط موازی قاعده قرار دارند، پس ارتفاع وارد بر DC در هر دو مثلث با هم برابر است، یعنی این دو مثلث هم‌مساحت هستند.

$$S_{\mathrm{DAC}}=S_{\mathrm{DBC}}\xrightarrow[\text{از کم می کنیم}]{S_{\mathrm{DOC}}\ \text{از طرفین}}S_{\mathrm{DAC}}-S_{\mathrm{DOC}}=S_{\mathrm{DBC}}-S_{\mathrm{DOC}}\longleftrightarrow S_{\mathrm{OAD}}=S_{\mathrm{ABC}}$$

۶۲

$$S=\frac{b}{۲}-۱+i\xrightarrow{S=۹\ ,\ i=۴}۹=\frac{b}{۲}-۱+۴\Rightarrow ۹=\frac{b}{۲}+۳$$

$$\Rightarrow ۶=\frac{b}{۲}\Rightarrow b=۱۲\ \text{تعداد نقاط مرزی}$$

۶۳

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\mathrm{AD}\times\mathrm{AE}\,\mathrm{Sin}\,A}{\frac{۱}{۲}\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\,\mathrm{Sin}\,A}=\frac{\mathrm{AD}\times\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}}=\frac{۳\times۵}{۱۰\times۹}=\frac{۱}{۶}$$

۶۴ نصف حاصل‌ضرب دو قطر:

فرض می‌کنیم که ABCD یک چهارضلعی است که قطرهایش بر هم عمود است.

با توجه به شکل مساحت مثلث‌های ΔABC و ΔBCD را نسبت به قاعده‌ی BC به دست می‌آوریم:

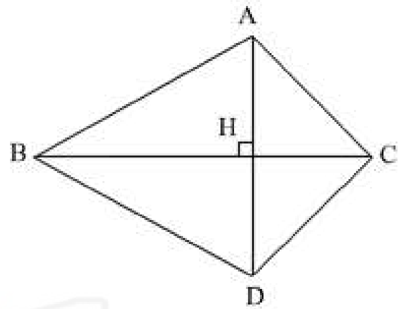
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BC.AH \quad (*)$$

$$S_{BCD} = \frac{۱}{۲}BC.DH \quad (**)$$

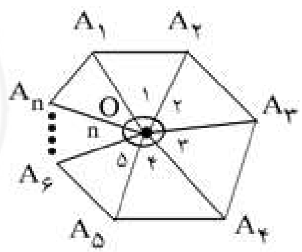
روابط (*) و (**) را جمع می‌کنیم.

$$\underbrace{S_{ABC} + S_{BCD}}_{\downarrow} = \frac{۱}{۲}BC.AH + \frac{۱}{۲}BC.AH + \frac{۱}{۲}BC.HD$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BC(AH + HD) \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}BC.AD$$



۶۵ از نقطه‌ی دلخواه O به رأس‌های n ضلعی وصل می‌کنیم. در این صورت n ضلعی به n مثلث تقسیم می‌شود و مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰° است. بنابراین:



$$\text{مجموع زوایای n ضلعی محدب} = ۱۸۰n - (\widehat{O}_۱ + \widehat{O}_۲ + \cdots + \widehat{O}_n) = ۱۸۰n - ۳۶۰ = ۱۸۰(n-۲)$$

۶۶ الف)

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	...	n
تعداد قطرهای رسم شده از یک راس	۰	۱	۲	۳		n -۳

ب) با توجه به جدول برای هر رأس $n-۳$ قطر وجود دارد. از طرفی کلا n رأس وجود دارد، پس تعداد قطرها برابر $n(n-۳)$ است و چون قطرها با این روش دو بار شمرده می‌شود، پس تعداد قطرها برابر است با: $\frac{n(n-۳)}{۲}$

۶۷ می‌دانیم مجموع فاصله‌های نقطه‌ی M از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ارتفاع مثلث است.

$$\text{ارتفاع مثلث } ۲\sqrt{۳} + \sqrt{۳} + ۵\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$$

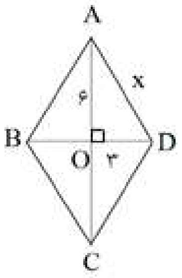
ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۱۶ \Rightarrow \text{محیط} = ۳\times۱۶ = ۴۸$$

۶۸ طول قطر دیگر لوزی را a در نظر می‌گیریم.

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{\text{حاصلضرب دو قطر}}{۲} \Rightarrow \frac{۱۲a}{۲} = ۳۶ \Rightarrow a = ۶$$

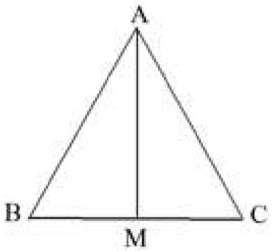
از آن‌جا که قطرها عمودمنصف هستند، اندازه‌ی ضلع را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس می‌توان حساب کرد.



$$\overset{\triangle}{AOD} : x^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ + ۹ \Rightarrow x^۲ = ۴۵ \Rightarrow x = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

$$\text{محیط} = ۴ \times ۳\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

۶۹ ABC یک مثلث است و M وسط ضلع BC. از آن‌جا که این دو مثلث در رأس A مشترک هستند. پس:



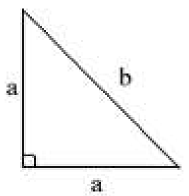
$$\frac{S_{\text{AMC}}}{S_{\text{AMB}}} = \frac{\text{MB}}{\text{MC}} \xrightarrow{\text{MB=MC}} \frac{S_{\text{AMC}}}{S_{\text{AMB}}} = ۱ \Rightarrow S_{\text{AMC}} = S_{\text{AMB}}$$

۷۰ چندضلعی که تمام رئوس آن روی نقاط شبکه‌ای قرار گیرد، چندضلعی شبکه‌ای نام دارد.

$$\begin{matrix} b = ۴ \\ i = ۱ \end{matrix} \Rightarrow S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow S = \frac{۴}{۲} - ۱ + ۱ \Rightarrow S = ۲$$

۷۱ طول هر ضلع زاویه‌ی قائمه را a در نظر می‌گیریم پس $\frac{۱}{۲}a.a = ۸$ در نتیجه $a^۲ = ۱۶$ و $a = ۴$

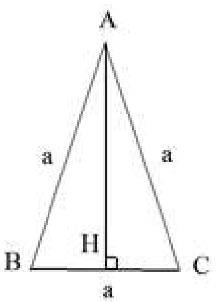
داریم:



$$b^۲ = ۴^۲ + ۴^۲ \Rightarrow b^۲ = ۳۲ \Rightarrow b = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\text{محیط} : ۴ + ۴ + ۴\sqrt{۲} = ۸ + ۴\sqrt{۲}$$

۷۲ در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان میانه است. ارتفاع را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس محاسبه می‌کنیم:

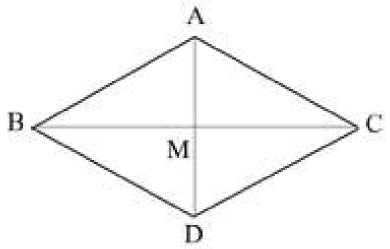


$$a^۲ = (\text{HA})^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ \Rightarrow (\text{HA})^۲ = a^۲ - \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ \Rightarrow (\text{HA})^۲$$

$$= a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow \text{AH} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

مساحت برابر است با: $\frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a.a\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

۷۳ الف)



$$\left.\begin{array}{l} AM=\frac{BC}{۲} \\ AM=\frac{AD}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BC}{۲}=\frac{AD}{۲} \Rightarrow BC=AD$$

پس قطرها برابر و منصف یک‌دیگرند.

ب) از آن‌جا که قطرها برابر و منصف‌اند و با توجه به این‌که هر چهارضلعی که در آن قطرها برابر و منصف باشند یک مستطیل است، می‌توان نتیجه گرفت که زاویه‌ی $\angle A$ قائمه است.

۷۴

$$\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{PC}{BC}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{ABC}=۴S_{APC}\ (۱)$$

$$\Delta ABC\ ;\ MN \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳} \\ \Delta AQN \sim \Delta APC \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{ANQ}}{S_{APC}}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}$$

$$\Rightarrow S_{APC}=۹S_{ANQ}\ (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow S_{\Delta ABC}=۴(۹S_{ANQ})=۳۶S_{ANQ} \Rightarrow \frac{S_{ANQ}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس مساحت AQN مساوی $\frac{۱}{۳۶}$ مساحت ABC است.

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{PB}{BC}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{S_{APB}}{S_{ABC}}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow S_{APB}=\frac{۳}{۴}S_{ABC}\ \ (۳)$$

$$\overset{\triangle}{ABC}\ ;\ MQ \parallel BP \Rightarrow \overset{\triangle}{AQM} \sim \overset{\triangle}{ABP} \Rightarrow \frac{S_{AMQ}}{S_{APB}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{S_{BPQN}}{S_{APB}}=\frac{۸}{۹}\ (۴)$$

$$(۳),(۴) \Rightarrow S_{BPQM}=\frac{۸}{۹}\left(\frac{۳}{۴}S_{ABC}\right)=\frac{۲}{۳}S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{BPQM}}{S_{ABC}}=\frac{۲}{۳}$$

۷۵

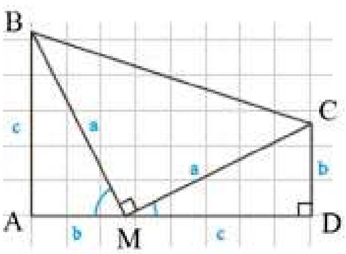
$$\Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow S_{ABC}=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\ (۱)$$

میانه‌های هر مثلث آن‌را به شش قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنند:

$$\Delta ABC\ ; BM=MC, AO=OC \Rightarrow S_{MNB}=\frac{۱}{۶}S_{ABC}\ \ (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow S_{MNB}=\frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۲}S_{ABCD}\right)=\frac{۱}{۱۲}S_{ABCD}$$

۷۶



$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}(AB+CD)\times AD=\frac{۱}{۲}(b+c)(b+c)=\frac{۱}{۲}(b+c)^{۲}$$

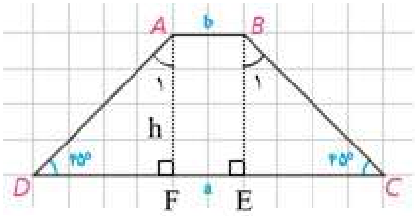
$$S_{ABCD}=S_{ABM}+S_{ABM}+S_{CDM}+S_{MBC}$$

$$=\frac{۱}{۲}bc+\frac{۱}{۲}bc+\frac{۱}{۲}a^{۲}=bc+\frac{۱}{۲}a^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(b+c)^{۲}=bc+\frac{۱}{۲}a^{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} (b+c)^{۲}=۲bc+a^{۲} \Rightarrow b^{۲}+\cancel{۲bc}+c^{۲}=\cancel{۲bc}+a^{۲} \Rightarrow b^{۲}+c^{۲}=a^{۲}$$

به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه می‌رسیم.

۷۷ عمودهای BE و AF را بر CD وارد می‌کنیم چهارضلعی ABCD مستطیل است. پس:



$$AB = EF = b$$
$$\Delta ADF; \angle A_۱ = \angle D = ۴۵^\circ \Rightarrow AF = DF = h$$
$$\Delta BCE; \angle B_۱ = \angle C = ۴۵^\circ \Rightarrow BE = CE = h$$

$$\Rightarrow CD = ۲h + b = a \Rightarrow h = \frac{a-b}{۲}$$

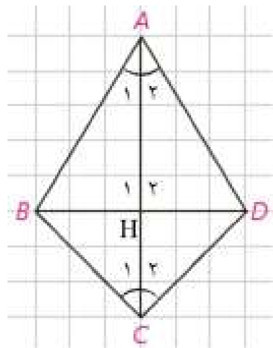
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b)h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a+b}{۲} \times \frac{a-b}{۲} = \frac{a^۲ - b^۲}{۴}$$

۷۸ فرض کنیم فاصله‌ی دو خط موازی 'd و d برابر h باشد در این صورت:

$$S_{ABCD} = S_{ABEF} = AB \times h$$

پس مساحت هر دو متوازی‌الاضلاع برابر S است.

۷۹



$$\left.\begin{array}{c} AB = AD \\ \angle A_۱ = \angle A_۲ \\ AH = AH \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ADH \Rightarrow \angle H_۱ = \angle H_۲ = ۹۰^\circ$$

پس قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند.

$$\left.\begin{array}{c} AB = AD \\ CB = CD \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \ , \ \widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲$$

پس قطر AC نیمساز زاویه‌های A و C است.

$$AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ = ۲۴$$

در ضمن از همنهشتی دو مثلث ABH و ADH نتیجه می‌گیریم $DH = BH$ پس قطر AC عمودمنصف BD است.

۸۰ a را بزرگ‌ترین قطر در نظر می‌گیریم. بنابراین $a=۳b$ از طرفی در لوزی داریم: (بنا به رابطه‌ی فیثاغورس)

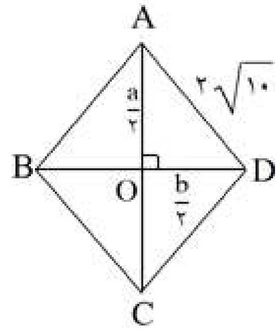
$$\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲}=(۲\sqrt{۱۰})^{۲}$$

$$\left(\frac{۳b}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲}=۴۰\Rightarrow\frac{۱۰b^{۲}}{۴}=۴۰\Rightarrow b=\frac{۴\times۴۰}{۱۰}$$

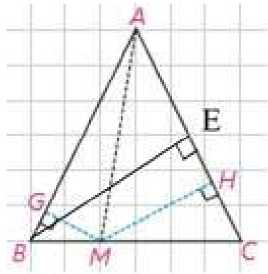
$$b^{۲}=۱۶\Rightarrow b=\sqrt{۱۶}=۴\Rightarrow a=۱۲$$

مساحت برابر است با:

$$\frac{a.\,b}{۲}=\frac{۴\times۱۲}{۲}=\frac{۴۸}{۲}=۲۴$$



۸۱ الف) در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از دو ساق AB , AC برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است. زیرا:

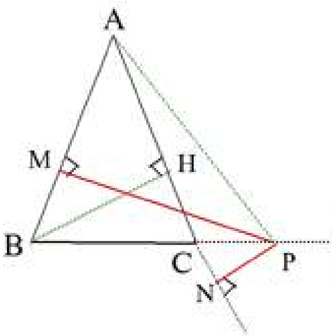


$$S_{\Delta \mathrm{ABM}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AB}\times \mathrm{MG}, S_{\Delta \mathrm{ACM}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times \mathrm{MH}, S_{\Delta \mathrm{ABC}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times \mathrm{BE}$$

$$S_{\Delta \mathrm{ABM}}+S_{\Delta \mathrm{ACM}}=S_{\Delta \mathrm{ABC}}\xrightarrow{\mathrm{AB}=\mathrm{AC}}\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times \mathrm{MG}+\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times \mathrm{MH}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times \mathrm{BE}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}}\times (\mathrm{MG}+\mathrm{MH})=\cancel{\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}}\times \mathrm{BE}\Rightarrow \mathrm{MG}+\mathrm{MH}=\mathrm{BE}$$

ب) فرض کنیم P نقطه‌ای روی امتداد ضلع BC باشد. اگر PM و PN فاصله‌های نقطه P از دو ساق مثلث ABC $(\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=a)$ باشند، پاره‌خط AP و ارتفاع BH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم.



$$S_{\Delta \mathrm{ABP}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AB}\times \mathrm{PM}, \ S_{\Delta \mathrm{ACP}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times \mathrm{PN}$$

$$S_{\Delta \mathrm{ABC}}=\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}\times \mathrm{BH}$$

$$|S_{\Delta \mathrm{ABP}}-S_{\Delta \mathrm{ACP}}|=S_{\Delta \mathrm{ABC}}\xrightarrow{\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=a}\left|\frac{۱}{۲}a\times \mathrm{PM}-\frac{۱}{۲}a\times \mathrm{PN}\right|=\frac{۱}{۲}a\times \mathrm{BH}$$

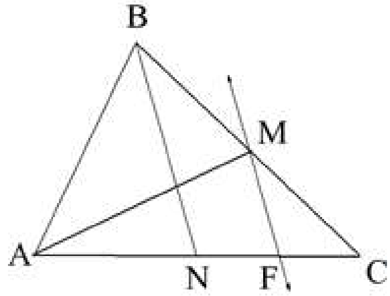
$$\Rightarrow \cancel{\frac{۱}{۲}a}\times |\mathrm{PM}-\mathrm{PN}|=\cancel{\frac{۱}{۲}a}\times \mathrm{BH}\Rightarrow |\mathrm{PM}-\mathrm{PN}|=\mathrm{BH}$$

۸۲ دو میانه‌ی AM و BN از ΔABC را رسم می‌کنیم. یک‌دیگر را در نقطه‌ی G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانه‌ی BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند.

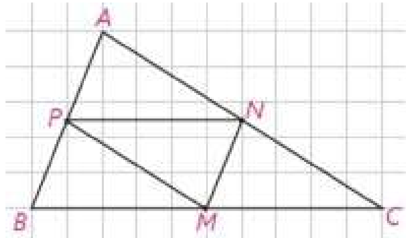
$$\Delta BCN\ ;\ MF \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MB} = ۱ \Rightarrow CF = FN$$
$$AN = NC = ۲NF \Rightarrow AF = AN + FN = ۲FN + FN = ۳\,FN$$

$$\Delta AMF\ ;\ MF \parallel GN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AG}{GM} = \frac{AN}{NF} = ۲$$
$$AG = ۲GM \Rightarrow AM = ۳\,GM$$

بنابراین، $GM = \frac{۱}{۳}AM$ و $AG = \frac{۲}{۳}AM$ و G بین A و M است. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{۲}{۳}BN$ پس برای هر دو میانه‌ی دلخواه نقطه‌ی G آن میانه را به نسبت خاص ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.



۸۳



پاره‌خط PN موازی ضلع BC است و پاره‌خط PM موازی ضلع AC است. از آن‌جا که P و N به‌ترتیب وسط AB و AC هستند، پس:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} PN \parallel BC$$

$$\frac{BP}{PA}=\frac{BM}{MC}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} PM \parallel AC$$

بنابراین چهارضلعی PNCM متوازی‌الاضلاع می‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} MN=MN \text{ مشترک} \\ \text{ضلع های مقابل در متوازی الاضلاع}\begin{cases} PN=MC \\ PM=NC \end{cases}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta MNP \cong \Delta NMC \quad (۱)$$

حال ثابت می‌کنیم PNMB یک متوازی‌الاضلاع است زیرا:

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{PB}\xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} PN \parallel BC \Rightarrow PN \parallel BM \ (۱)$$

$$\frac{NC}{AN}=\frac{MC}{MB}\xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} NM \parallel AB \Rightarrow NM \parallel BD \ \ (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که چهارضلعی PNMB چون ضلع‌های روبه‌رویش دو به دو با هم موازی هستند پس متوازی‌الاضلاع است. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} PM \text{ ضلع مشترک} \\ \text{ضلع های متقابل در متوازی الاضلاع}\begin{cases} BP=MN \\ PN=BM \end{cases}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta PBM \cong \Delta PNM \ (۲)$$

در ادامه‌ی کار ثابت می‌شود که ANMP یک متوازی‌الاضلاع است چون:

$$\text{نتایج قسمت های قبل}\begin{cases} MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel AP \\ PM \parallel AC \Rightarrow PM \parallel AN \end{cases} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } ANMP$$

پس: $APN \cong PNM\ (۳)$ بنا به حالت (ض ض ض)

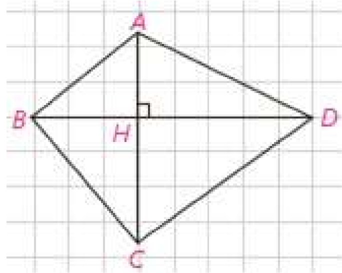
با مقایسه رابطه‌ی (۱) و (۲) و (۳) داریم: $\Delta APN \cong \Delta BPM \cong \Delta MNP \cong \Delta MNC$

۸۴ الف) در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در این صورت AH ارتفاع هر دو مثلث ABM و ACM است.

$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta ABM}=\frac{۱}{۲}AH\times BM \\ S_{\Delta ACM}=\frac{۱}{۲}AH\times CM \end{array}\right\}\xrightarrow{BM=MC} S_{\Delta ABM}=S_{\Delta ACM}$$

ب) بله زیرا FM نیز میانه مثلث BFC است.

۸۵ در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB برهم عمودند.



$$\left.\begin{array}{l} S_{\text{ADB}} = \frac{۱}{۲}\text{BD} \times \text{AH} \\ S_{\text{DBC}} = \frac{۱}{۲}\text{BD} \times \text{CH} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} S_{\text{ABCD}} = \frac{۱}{۲}\text{BD} \times (\text{AH} + \text{HC}) = \frac{۱}{۲}\text{BD} \times \text{AC}$$

۸۶ الف)

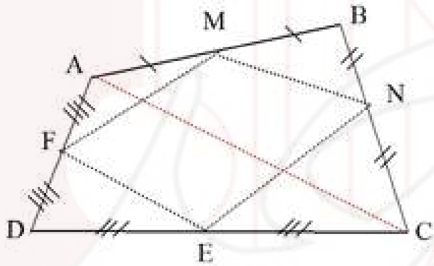
$$\left.\begin{array}{c} \text{AH} = \text{AH} \\ \text{AB} = \text{AC} \\ \widehat{H} = \widehat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta\text{ABH} \cong \Delta\text{ACH} \Rightarrow \text{BH} = \text{CH} = \frac{a}{۲}$$

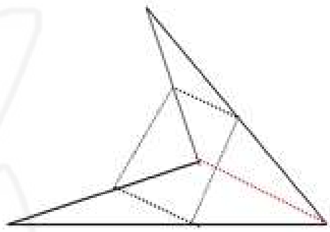
ب)

$$\Delta\text{ABH}; \angle H = ۹۰^\circ \Rightarrow \text{AH}^۲ + \text{BH}^۲ = \text{AB}^۲ \Rightarrow \text{AH}^۲ = a^۲ - \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow \text{AH} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{\Delta\text{ABC}} = \frac{۱}{۲}\text{AH} \times \text{BC} \Rightarrow S_{\Delta\text{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \times a = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۸۷





برهان: فرض کنیم نقاط F , E , N , M به‌ترتیب وسط های اضلاع AB و BC و CD و AD از چهارضلعی ABCD باشند باید ثابت کنیم چهارضلعی MNEF متوازی‌الاضلاع است. قطر AC را رسم می‌کنیم:

$$\Delta\text{ABC}; \frac{\text{BM}}{\text{AB}} = \frac{\text{BN}}{\text{BC}} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} \text{MN} \parallel \text{AC}, \text{MN} = \frac{\text{AC}}{۲} \ (۲)$$

$$\Delta\text{ACD}; \frac{\text{DE}}{\text{DC}} = \frac{\text{DF}}{\text{DA}} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} \text{EF} \parallel \text{AC}, \text{EF} = \frac{\text{AC}}{۲} \ (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \text{MN} \parallel \text{EF}, \text{MN} = \text{EF}$$

به عبارت دیگر در چهارضلعی MNEF دو ضلع موازی و مساوی‌اند لذا چهارضلعی MNEF متوازی‌الاضلاع است.

اگر قطرهای چهارضلی ABCD برهم عمود باشند. چهارضلعی MNEF مستطیل است. زیرا قطرهای چهارضلعی ABCD با اضلاع چهارضلعی MNEF موازی‌اند.

اگر قطرهای چهارضلعی ABCD با هم مساوی باشند. چهارضلعی MNEF لوزی است و اندازه هر ضلع این لوزی نصف طول قطر چهارضلعی ABCD است.

$$\text{MN} = \text{EF} = \frac{\text{AC}}{۲}, \text{FM} = \text{EN} = \frac{\text{BD}}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{MN} + \text{NE} + \text{EF} + \text{FM} = ۲\left(\frac{\text{AC}}{۲} + \frac{\text{BD}}{۲}\right) = \text{AC} + \text{BD}$$

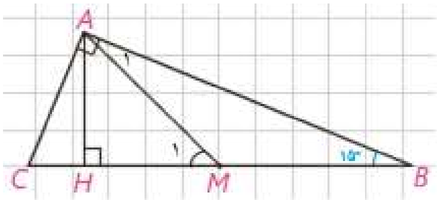
۸۸ اگر در یک چهارضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. در چهارضلعی BMDN داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{AD}=\mathrm{BC} \xrightarrow{\div ۲} \mathrm{BN}=\mathrm{MD} \\ \mathrm{BN} \parallel \mathrm{MD}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{چهارضلعی BMDN متوازی الاضلاع است}} \mathrm{BM} \parallel \mathrm{DN}$$

$$\Delta \mathrm{ADQ}\ ;\ \mathrm{MP} \parallel \mathrm{DQ} \Rightarrow \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PQ}}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MD}}=۱ \Rightarrow \mathrm{AP}=\mathrm{PQ}\ (۱)$$

$$\Delta \mathrm{BCP}\ ;\ \mathrm{BP} \parallel \mathrm{QN} \Rightarrow \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QP}}=\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NB}}=۱ \Rightarrow \mathrm{CQ}=\mathrm{PQ} \xrightarrow{\text{از } ۱} \mathrm{AP}=\mathrm{PQ}=\mathrm{QC}$$

۸۹ در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد وتر نصف وتر است پس:



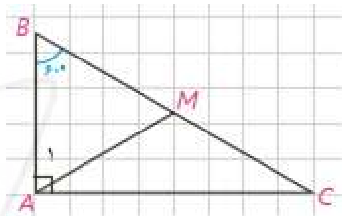
$$\Delta \mathrm{ABC}\ ;\ \mathrm{AM}=\mathrm{MB}=\frac{\mathrm{BC}}{۲} \Rightarrow \angle A_۱=\angle B=۱۵^\circ$$

$$\overset{\triangle}{AMB} \text{ زاویه خارجی مثلث } \angle M_۱=\angle A_۱+\angle B=۳۰^\circ$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.

$$\Delta \mathrm{AMH};\angle H=۹۰^\circ,\angle M_۱=۳۰^\circ \Rightarrow \mathrm{AH}=\frac{\mathrm{AM}}{۲} \Rightarrow \mathrm{AH}=\frac{\frac{\mathrm{BC}}{۲}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{\mathrm{BC}}{۴}$$

۹۰



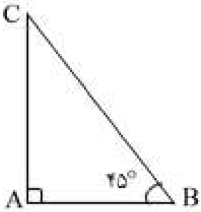
در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس:

$$\Delta \mathrm{ABC};\angle A=۹۰^\circ,\angle C=۳۰^\circ \Rightarrow \angle B=۶۰^\circ$$

$$\Delta \mathrm{ABM}\ ;\ \mathrm{AM}=\mathrm{BM} \Rightarrow \angle A_۱=\angle B=۶۰^\circ \Rightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\mathrm{AB} \Rightarrow \mathrm{AB}=\frac{\mathrm{BC}}{۲}$$

$$\Delta \mathrm{ABC};\angle A=۹۰^\circ \Rightarrow \mathrm{AB}^۲+\mathrm{AC}^۲=\mathrm{BC}^۲ \xrightarrow{\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{BC}}{۲}} \mathrm{AC}^۲=\mathrm{BC}^۲-\left(\frac{\mathrm{BC}}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \mathrm{AC}^۲=\frac{۳\mathrm{BC}^۲}{۴} \Rightarrow \mathrm{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{BC}$$



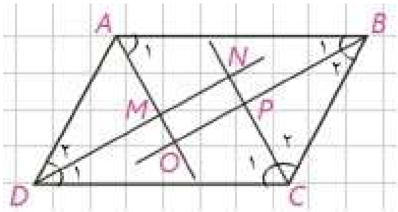
$$\Delta \mathrm{ABC};\angle A=۹۰^\circ\ ,\ \angle B=۴۵^\circ \Rightarrow \angle B=\angle C=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{AB}=\mathrm{AC} \\ \mathrm{AB}^۲+\mathrm{AC}^۲=\mathrm{BC}^۲ \end{cases}$$

$$۲\mathrm{AB}^۲=\mathrm{BC}^۲ \Rightarrow \mathrm{AB}^۲=\frac{\mathrm{BC}^۲}{۲} \Rightarrow \mathrm{AB}=\frac{\mathrm{BC}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathrm{BC}$$

۹۱ در متوازی‌الاضلاع دو زاویه مجاور مکملند پس:

$$\angle A+\angle B=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\angle A}{۲}+\frac{\angle B}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}\Rightarrow \widehat{A}_۱+\widehat{B}_۱=۹۰^\circ$$



پس در مثلث OAB زاویه‌ی O قائمه است.

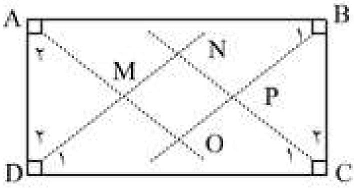
به روش مشابه ثابت می‌شود:

$\Delta \mathrm{NDC}; \angle C_۱+\angle D_۱=۹۰^\circ \Rightarrow \angle N=۹۰^\circ\ (۲)$

$\Delta \mathrm{PBC}; \angle B_۲+\angle C_۲=۹۰^\circ \Rightarrow \angle P=۹۰^\circ\ (۳)$

$(۱),(۲),(۳)\Rightarrow \angle M=\angle N=\angle P=\angle O=۹۰^\circ \Rightarrow$ چهارضلعی MNPO مستطیل است.

بد نیست بدانید اگر چهارضلعی ABCD مستطیل باشد، آن‌گاه چهارضلعی MNPO مربع است. زیرا:



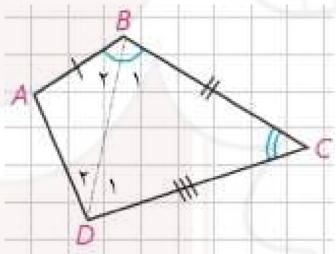
$$C\overset{\triangle}{D}N; \widehat{C}_۱=\widehat{D}_۱=۴۵^\circ \Rightarrow \mathrm{CN}=\mathrm{DN}\ (۱)$$

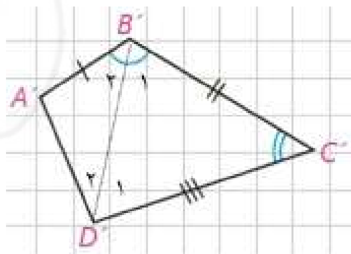
$$\left.\begin{array}{c}\widehat{A}_۲=\widehat{B}_۲=۴۵^\circ\\ \mathrm{AD}=\mathrm{BC}\\ \widehat{D}_۲=\widehat{C}_۲=۴۵^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ز ض ز}} B\overset{\triangle}{C}P\cong A\overset{\triangle}{D}M\Rightarrow \mathrm{PC}=\mathrm{DM}\ (۲)$$

$(۱),(۲)\Rightarrow \mathrm{CN}-\mathrm{PC}=\mathrm{DN}-\mathrm{DM}\Rightarrow \mathrm{PN}=\mathrm{MN}$

پس طول و عرض مستطیل MNPO با هم برابرند. به عبارت دیگر MNPO مربع است.

۹۲ الف) قطرهای BD و B'D' را در دو چهارضلعی رسم می‌کنیم بدیهی است که دو مثلث BCD و B'C'D' به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند پس:





$$\angle B_۱=\angle B'_۱ \xrightarrow{\angle B=\angle B'} \angle B_۲=\angle B'_۲,\ \angle D_۱=\angle D'_۱$$

در دو مثلث ABD و A'B'D':

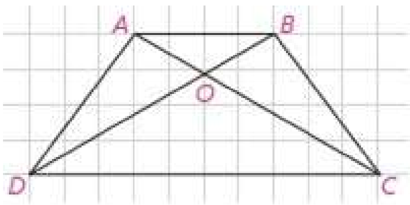
$$\left.\begin{array}{c}\mathrm{AB}=A'B'\\ \angle B_۲=\angle B'_۲\\ \mathrm{BD}=B'D'\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta \mathrm{ABD}\cong \Delta \mathrm{A'B'D'}\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{A}'_۱, \mathrm{AD}=A'D', \widehat{D}_۲=\widehat{D}'_۲\Rightarrow \widehat{D}=\widehat{D}'$$

ب) در این حالت کافی است قطرهای AC و A'C' را رسم نموده و مانند قسمت الف عمل کنیم.

۹۳

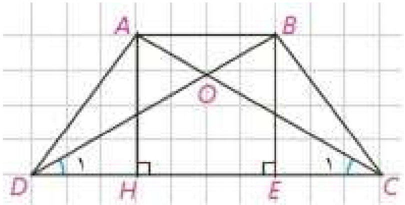
$$\frac{n(n-۳)}{۲}=n\Rightarrow \cancel{n}(n-۳)=۲\cancel{n}\Rightarrow n-۳=۲\Rightarrow n=۵$$

۹۴ فرض کنیم ABCD ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین باشد. داریم:



$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AD}=\mathrm{BC}\\ \mathrm{DC}=\mathrm{DC}\\ \widehat{D}=\widehat{C}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ADC}\cong \overset{\triangle}{BDC}\Rightarrow \mathrm{AC}=\mathrm{BD}$$

برعکس فرض کنیم در ذوزنقه‌ی ABCD دو قطر AC و BD برابر باشند. ارتفاع‌های AH و BE را رسم می‌کنیم. چون $\mathrm{AB} \parallel \mathrm{DC}$ پس دو ارتفاع AH و BE مساویند. داریم:



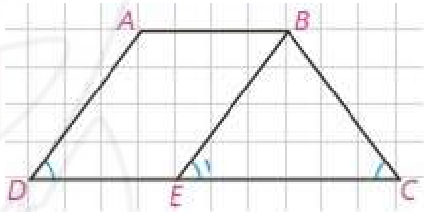
$$\left.\begin{matrix}\mathrm{BE}=\mathrm{AH}\\ \mathrm{DB}=\mathrm{AC}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع)}} \overset{\triangle}{AHC}\cong \overset{\triangle}{BED}\Rightarrow \widehat{C}_۱=\widehat{D}_۱$$

حال ثابت می‌کنیم که دو مثلث $\Delta\mathrm{ADC}$ و $\Delta\mathrm{BDC}$ با هم هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AC}=\mathrm{BD}\\ \mathrm{DC}\ \text{مشترک}\\ \angle D_۱=\angle C_۱\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta\mathrm{BDC}\cong\Delta\mathrm{ADC}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\mathrm{BC}=\mathrm{AD}\\ \angle C=\angle D\end{matrix}\right.$$

پس ذوزنقه ABCD متساوی‌الساقین است.

۹۵ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD را که در آن $\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ است، درنظر می‌گیریم، از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده‌ی DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی ABED متوازی‌الاضلاع است.



در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های مقابل مساویند پس $\mathrm{AD}=\mathrm{BE}$ در ضمن بنابر فرض $\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ پس $\mathrm{BE}=\mathrm{BC}$ یعنی مثلث BEC متساوی‌الساقین است. پس $\widehat{E}_۱=\widehat{C}$.

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{Ad}\parallel\mathrm{BE}\\ \mathrm{DC}\ \text{مورب}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \widehat{D}=\widehat{E}_۱\xrightarrow{\widehat{E}_۱=\widehat{C}}\widehat{D}=\widehat{C}$$

در ضمن $\mathrm{AB}\parallel\mathrm{DC}$ پس $\widehat{B}+\widehat{C}=\widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ$ بنابراین از $\widehat{D}=\widehat{C}$ نتیجه می‌گیریم $\widehat{A}=\widehat{B}$.

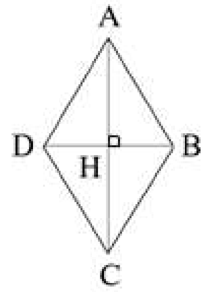
۹۶ فرض:

$$AB \parallel CD, AD \parallel BC, AC \perp BD$$

حکم:

$$AB = BC = CD = DA$$

برهان: قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یک‌دیگر را نصف می‌کنند و از طرف دیگر $BD \perp AC$ پس در ΔABD، AH عمودمنصف BD است. لذا مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد. به طریق مشابه در ΔABC نیز BH عمودمنصف AC می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $AB = BC = CD = DA$ پس چهارضلعی ABCD لوزی است.



۹۷ الف) زیرا قطرهایش یک‌دیگر را نصف می‌کنند.

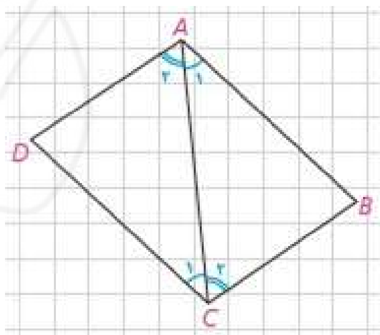
ب) زیرا زاویه A قائمه است و هر متوازی‌الاضلاعی که زاویه قائمه دارد مستطیل است.

پ) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند.

ت) $\text{از پ} \Rightarrow AD = BC \Rightarrow \frac{AD}{۲} = \frac{BC}{۲} \Rightarrow AM = \frac{BC}{۲}$

بنابراین در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر وتر نصف اندازه‌ی وتر است.

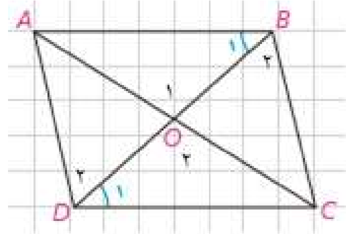
۹۸ در چهارضلعی ABCD فرض کنیم $AB \parallel CD$ و $AB = CD$ با رسم قطر AC داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AC \ \text{مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ \\ AB = DC \\ AC = AC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC} \Rightarrow \widehat{A}_۲ = \widehat{C}_۲ \Rightarrow AD \parallel BC$$

بنابراین چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۹۹ فرض کنیم در چهارضلعی ABCD نقطه‌ی O وسط‌های دو قطر AC و BD باشد.

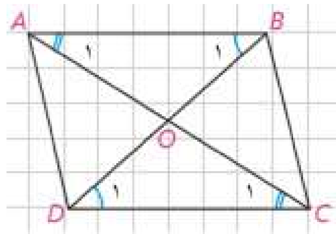


$$\left.\begin{array}{r} OA=OC \\ \text{متقابل به راس}\ \widehat{O}_{۱}=\widehat{O}_{۲} \\ OB=OC\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta OAB\cong\Delta OCD \Rightarrow \widehat{B}_{۱}=\widehat{D}_{۱}\Rightarrow AB\,||\,CD$$

به روش مشابه ثابت می‌شود: $\Delta OAD\cong \Delta OBC\Rightarrow \widehat{B}_{۲}=\widehat{D}_{۲} \Rightarrow AD\,||\,BC$

آز آنجا که ضلع‌های روبه‌رو موازی هستند پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۱۰۰ فرض کنیم ABCD متوازی‌الاضلاع باشد و O نقطه تلاقی دو قطر آن باشد.



$$\left.\begin{array}{c} \text{مورب}\ AC\,,\ AB\,||\,CD\Rightarrow \angle A_{۱}=\angle C_{۱} \\ AB=CD\ \text{دو ضلع مقابل متوازی الاضلاع مساویند} \\ \text{مورب}\ BD\,,\ AB\,||\,CD\Rightarrow \angle B_{۱}=\angle D_{۱}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta OAB\cong\Delta OCD$$

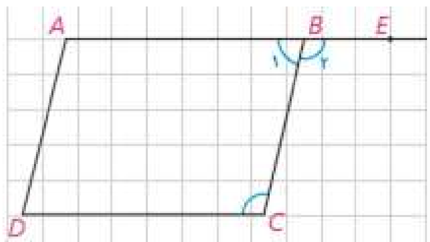
بنابراین، $OB=OD$ و $OA=OC$.

۱۰۱ در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل داریم:

$$\left.\begin{array}{r} AB\,||\,DC \\ \text{مورب}\ BC\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{B}_{۲}=\widehat{C}\xrightarrow{\widehat{B}_{۱}+\widehat{B}_{۲}=۱۸۰^\circ}\widehat{C}+\widehat{B}_{۱}=۱۸۰^\circ$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

$$\widehat{A}+\widehat{B}_{۱}=\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{D}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$$



۱۰۲ در چهارضلعی ABCD فرض کنیم $AB = DC$ و $AD = BC$ حال قطر BD را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ AD = BC \\ BD = BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط}} AB \parallel DC \\ \widehat{B}_2 = \widehat{D}_2 \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط}} AD \parallel BC \end{cases}$$

پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۱۰۳ چهارضلعی ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است زیرا دو مثلث ABD و BDC با هم هم‌نهشت هستند. بنابراین $\angle B_1 = \angle D_1$ و $\angle B_2 = \angle D_2$ می‌شود با توجه به این برابری و با کمک عکس قضیه‌ی توازی خطوط می‌توان نتیجه گرفت که $AD \parallel BC$ و $AB \parallel DC$ است. هر چهارضلعی که ضلع‌های مقابل آن دو به دو موازی باشند، متوازی‌الاضلاع نام دارد.

۱۰۴ در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \text{مورب } BD,\ AD \parallel BC \Rightarrow \angle B_2 = \angle D_2 \\ \text{مورب } BD,\ AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \\ BD = BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta ABD \cong \Delta CDB \Rightarrow \left| \begin{array}{l} AD = BC \\ AB = CD \end{array}\right.$$

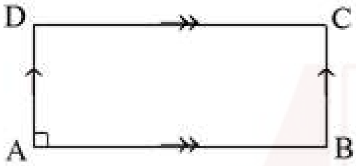
۱۰۵ الف) فرض: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

حکم: $AD \parallel BC\,,\, AB \parallel CD$

برهان: $\left.\begin{matrix} AD \perp AB \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \parallel BC\,,\ \left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel CD$

پس ABCD متوازی الاضلاع است.

ب) فرض: $\angle A = 90^\circ, AD \parallel BC, AB \parallel CD$



حکم: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

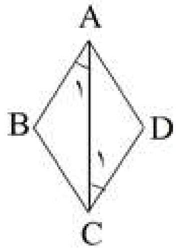
برهان: مورب $AB, AD \parallel BC \Rightarrow \angle A = \angle B = 90^\circ \quad (1)$

مورب $AD, AB \parallel CD \Rightarrow \angle A = \angle D = 90^\circ \quad (2)$

$1, 2 \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ \Rightarrow \angle C = 90^\circ$

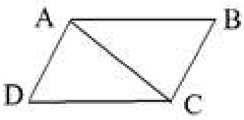
پ) در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویه‌ی $\angle A_1$ و $\angle C_1$ هم‌اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

ت) بنا به تعریف مربع، هر چهار ضلع مربع با هم برابرند پس هر مربع نوعی لوزی است. از طرف دیگر هر لوزی نیز نوعی متوازی‌الاضلاع است. پس مربع یک متوازی‌الاضلاع است.



۱۰۶ $\overset{\triangle}{ABC} \cong A\widehat{D}C \Rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ BC = AD \end{cases}$

این ویژگی متوازی‌الاضلاع است، پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.



۱۰۷ فرض: ABCD مربع و M و E و F و N وسط اضلاع

حکم: MEFN مربع

برهان: بنا به فرض $\left.\begin{matrix} \mathrm{MB}=\mathrm{BE} \\ \widehat{B}=۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Longleftarrow$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{\mathrm{MBE}} \Longleftarrow \widehat{E}_۱ = ۴۵^\circ$

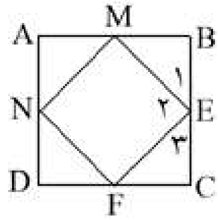
بنا به فرض $\left.\begin{matrix} \mathrm{CE}=\mathrm{CF} \\ \widehat{C}=۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Longleftarrow$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{\mathrm{CEF}} \Longleftarrow \widehat{E}_۳ = ۴۵^\circ$

$\widehat{E}_۱+\widehat{E}_۲+\widehat{E}_۳=۱۸۰^\circ$ نیم صفحه است $\widehat{E} \Rightarrow \widehat{E}_۲ = ۹۰^\circ$

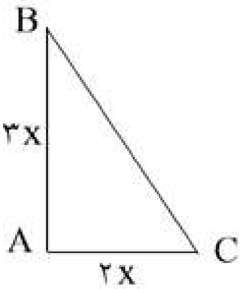
به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد زاویه‌های M و N و F هم ۹۰° هستند.

$\overset{\triangle}{\mathrm{MBE}} \cong \overset{\triangle}{\mathrm{CFE}}$ (ض ز ض) $\Rightarrow \mathrm{ME}=\mathrm{EF}$ اجزای نظیر

چهارضلعی که همه‌ی زوایای آن قائمه باشند و دو ضلع مجاورش برابر باشند مربع است.



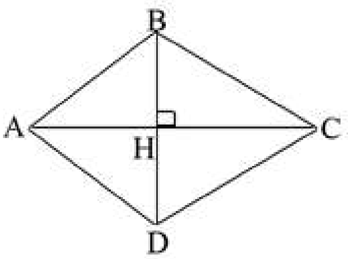
۱۰۸ فرض کنیم $\mathrm{AC}=۲x$ و $\mathrm{AB}=۳x$ باشند داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}AB\times AC$$
$$۲۷=\frac{۱}{۲}(۲x)(۳x)$$
$$x^۲=۹$$
$$x=۳$$

$$\begin{cases} AB=۹\ ,\ AC=۶ \\ BC^۲=AB^۲+AC^۲ \\ BC^۲=۹^۲+۶^۲=۱۱۷ \\ BC=\sqrt{۱۱۷} \end{cases}$$

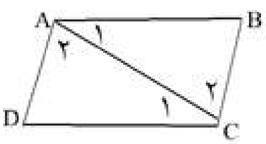
۱۰۹ فرض کنید اقطار چهار ضلعی ABCD بر هم عمود باشند.



$$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}$$
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AH\times BD+\frac{۱}{۲}CH\times BD$$
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}BD\,(AH+CH)$$
$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}BD\times AC$$

پس مساحت این چهارضلعی مساوی نصف حاصل ضرب قطرهای آن می‌باشد.

۱۱۰ فرض کنید در چهارضلعی ABCD اضلاع مقابل مساوی باشند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

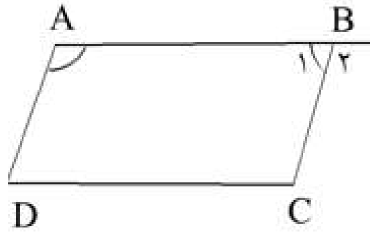


$$\left.\begin{matrix} AB=DC \text{ فرض} \\ AD=BC \text{ فرض} \\ AC=AC \text{ مشترک} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \overset{\text{(ض ض ض)}}{\simeq} \overset{\triangle}{ADC} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_۱=\widehat{C}_۱ \xrightarrow[\text{موزای و مورب}]{\text{عکس خطوط}} AB \parallel DC \\ \widehat{A}_۲=\widehat{C}_۲ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس خطوط}} AD \parallel BC \end{cases}$$

پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۱۱۱ با توجه به فرض $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B}_1 = 180^\circ$

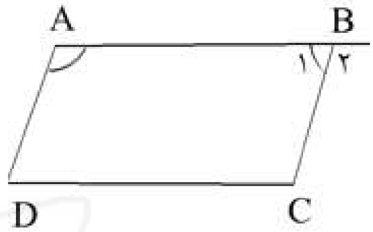
از طرفی $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ بنابراین $\widehat{A} = \widehat{B}_2$ در نتیجه $AD \parallel BC$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $AB \parallel DC$. پس چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.



۱۱۲ فرض کنید در چهارضلعی ABCD داشته باشیم $\widehat{A} = \widehat{C}$ و $\widehat{B} = \widehat{D}$، مجموع زوایای هر چهارضلعی 360° است.

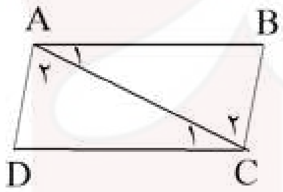
داریم: $\widehat{A} + \widehat{B}_1 + \widehat{C} + \widehat{D} = 360 \Rightarrow 2\widehat{A} + 2\widehat{B}_1 = 360 \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B}_1 = 180^\circ$

از طرفی $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ بنابراین $\widehat{A} = \widehat{B}_2$ در نتیجه $AD \parallel BC$. به همین ترتیب ثابت می‌شود $AB \parallel DC$ پس ABCD متوازی‌الاضلاع است.



۱۱۳ فرض کنید در چهارضلعی ABCD دو ضلع AB و CD موازی و مساوی باشند. قطرAC را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب}\ AC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AC = AC \\ AB = DC \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{D}C \to \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه ی خطوط}} AD \parallel BC$$



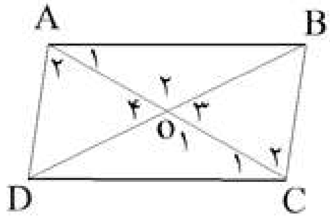
پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۱۱۴) فرض کنید در چهارضلعی ABCD نقطه‌ی O وسط اقطار AC و BD باشد.

$$\left.\begin{matrix} OA = OC \\ OB = OD \\ \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{A}B \overset{\text{(ض ز ض)}}{\simeq} O\overset{\triangle}{C}D \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ \xrightarrow[\text{خطوط موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه}} AB \| DC$$

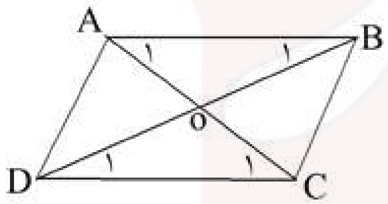
$$\left.\begin{matrix} OA = OC \\ OB = OD \\ \widehat{O}_۳ = \widehat{O}_۴ \end{matrix}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{A}D \overset{\text{(ض ز ض)}}{\simeq} O\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \widehat{A}_۲ = \widehat{C}_۲ \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط}} AD \| BC$$

پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع می‌باشد.



۱۱۵) فرض کنیم O نقطه‌ی تلاقی اقطار متوازی‌الاضلاع ABCD باشد.

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} AB \| CD \\ \text{مورب } AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ \\ \left.\begin{matrix} AB \| CD \\ \text{مورب } BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{B}_۱ = \widehat{D}_۱ \\ \text{اضلاع مقابل متوازی الاضلاع مساویند } AB = CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{O}B \overset{\text{(ز ض ز)}}{\simeq} D\overset{\triangle}{O}C \Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$



بنابراین در متوازی الاضلاع اقطار منصف یکدیگرند.

۱۱۶) شکل حاصل از دوران یک نیم‌کره است.

$$\text{حجم کره } V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow \text{حجم نیم کره} = \left(\frac{۴}{۳}\pi a^۳\right) \div ۲ = \frac{۲}{۳}\pi a^۳$$

۱۱۷) الف) دو خط متنافر: دو خط در فضا که نقطه‌ی اشتراکی نداشته و هیچ صفحه‌ای هم وجود نداشته باشد که شامل هر دو باشد را دو خط متنافر می‌گویند.

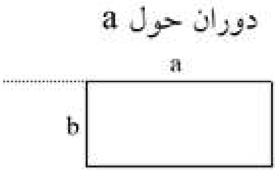
ب) سطح مقطع: شکلی را که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع گویند.

ج) فصل مشترک: خط راستی که اشتراک دو صفحه‌ی متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

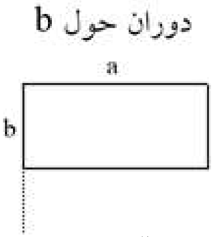
۱۱۸) ۱) با هم موازی‌اند ۲) موازی

۱۱۹) ۱) درست ۲) نادرست

۱۲۰



$U_۱ = a(\pi b^۲)$ استوانه به ارتفاع a و شعاع قاعده b



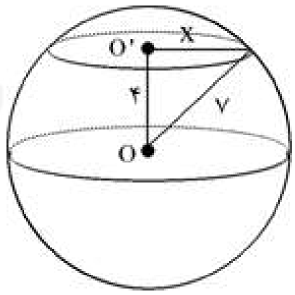
$U_۲ = b(\pi a^۲)$ استوانه به ارتفاع b و شعاع قاعده‌ی a

نسبت : $\frac{U_۱}{U_۲} = \frac{ab^۲\pi}{ba^۲\pi} = \frac{b}{a}$

۱۲۱ شکل سطح مقطع، دایره است که شعاع آن از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

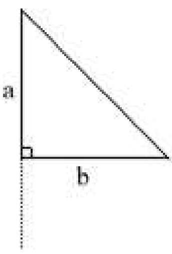
شعاع دایره سطح مقطع $۷^۲ = ۴^۲ + x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۴۹ - ۱۶ \Rightarrow x^۲ = ۳۳ \Rightarrow x = \sqrt{۳۳}$

مساحت دایره $= \pi r^۲ \Rightarrow$ مساحت سطح مقطع $= \pi(\sqrt{۳۳})^۲ = ۳۳\pi$



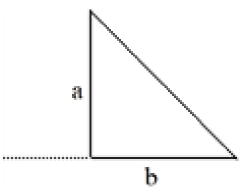
۱۲۲ شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

۱۲۳ حول ضلع a مخروطی حاصل می‌شود که ارتفاع آن a و شعاع قاعده b



$V_۱ = \frac{۱}{۳}a(\pi b^۲)$

و حول ضلع b مخروطی حاصل می‌شود که ارتفاع آن b و شعاع قاعده a



$V_۲ = \frac{۱}{۳}b(\pi a^۲)$

$$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۳}}\cancel{a}(\cancel{\pi}b^{\cancel{۲}})}{\cancel{\frac{۱}{۳}}\cancel{b}(\cancel{\pi}a^{\cancel{۲}})} = \frac{b}{a}$$

۱۲۴ از برخورد مخروط با صفحه افقی و موازی قاعده دو قسمت به وجود می‌آید که به قسمت پایین مخروط ناقص می‌گوییم. در حقیقت، مخروط ناقص دارای ۲ قاعده‌ی نامساوی است.

۱۲۵ صفحه موازی قاعده $\longleftarrow$ دایره
صفحه مایلی که از قاعده بگذرد $\longleftarrow$ سهمی
صفحه مایلی که از قاعده نگذرد $\longleftarrow$ بیضی

۱۲۶ الف) گزینه‌ی ۱ (کره) ب) گزینه‌ی ۲ (تصاویر)

۱۲۷ الف) کره ب) مخروط

۱۲۸ الف) درست ب) نادرست

۱۲۹ استوانه

۱۳۰ استوانه

۱۳۱ استوانه‌ی توخالی که از هر دو طرف باز است.

۱۳۲ نیم‌کره

۱۳۳ نیم‌کره

۱۳۴ کره

۱۳۵ کره

۱۳۶ صفحه‌ای دایره شکل تشکیل می‌شود که خطی که حول آن دوران داده‌ایم بر مرکز آن عمود است.

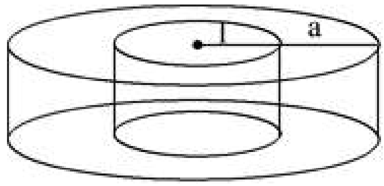
۱۳۷ الف) بستگی به زاویه‌ی دید دارد.
ب) خیر
ج) خیر
د) بله، به طور مثال دیدن یک ساختمان که از زاویه‌های مختلف نماهای مختلف دارد.

۱۳۸ فرض کنیم که صفحه‌های P و 'P موازی‌اند و l با P موازی است.
فرض خلف: صفحه‌ی 'P با خط l موازی نیست، بنابراین خط l، صفحه‌ی 'P را قطع می‌کند، چون «اگر خطی یکی از صفحات موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند»، خط l صفحه‌ی P را نیز باید قطع کنند که خلاف فرض اولیه است. پس l، 'P را قطع نکرده و با آن موازی است.

۱۳۹ فرض خلف: فرض می‌کنیم که از نقطه‌ی A دو صفحه‌ی P و 'P وجود دارد که بر l عمود است.
P بر l عمود است، تمام خطوط که از محل تلاقی P و l می‌گذرد نیز بر e عمود است و فقط یک خط در P وجود دارد که از A عبور کرده و بر l عمود می‌شود که آن‌را l_1 می‌نامیم. از عمود بودن 'P بر l نیز می‌توان نتیجه گرفت که خط دومی، مانند l_2 وجود دارد که از A عبور کرده و بر l عمود است.
یعنی دو خط l_2 و l_1 از نقطه‌ی A عبور کرده و بر l عمود شده‌اند که این متناقض است با این‌که «از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان بر آن رسم کرد». پس P و 'P یکی و بر هم منطبق‌اند.

۱۴۰ برهان خلف: فرض می‌کنیم که AB و CD متنافر نباشند در آن صورت یا متقاطع هستند و یا موازی که در هر دو صورت صفحه‌ای وجود دارد که شامل این دو پاره‌خط می‌شود. پس ۴ نقطه در یک صفحه قرار می‌گیرد که با فرض اولیه در تناقض است. بنابراین AB و CD متنافر هستند.

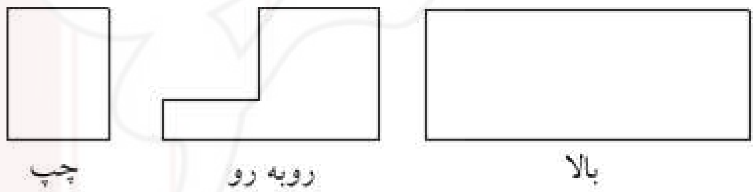
۱۴۱ یک استوانه که استوانه‌ی دیگری از آن جدا شده است.



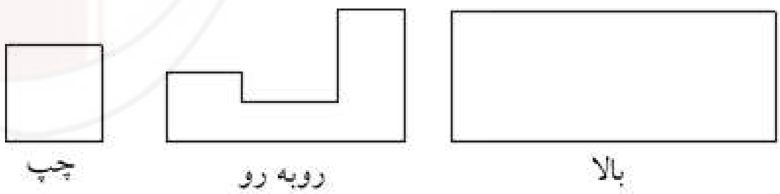
۱۴۲ دو مخروط در بالا و پایین نقطه تلاقی دو پاره‌خط

۱۴۳ مکعب بزرگ از $۴۸ = ۳ \times ۴ \times ۴$ مکعب کوچک تشکیل شده است.
روی ردیف بالای مکعب مستطیل داده شده ۵ مکعب کوچک باید برداشته شود و همین تعداد مکعب کوچک در دو ردیف زیرین آن باید برداشته شود تا نمای بالای داده شده ایجاد شود. پس حداقل $۱۵ = ۵ \times ۳$ مکعب کوچک باید حذف شود.
از طرف دیگر اگر همه مکعب‌های کوچک را در دو ردیف بالا و وسط برداریم و از ردیف آخر ۵ مکعب حذف کنیم باز نمای بالای شکل به صورت خواسته شده درمی‌آید. پس حداکثر تعداد مکعب‌های کوچک حذف شده برابر $۳۷ = ۴ \times ۴ \times ۲ + ۵$ است.

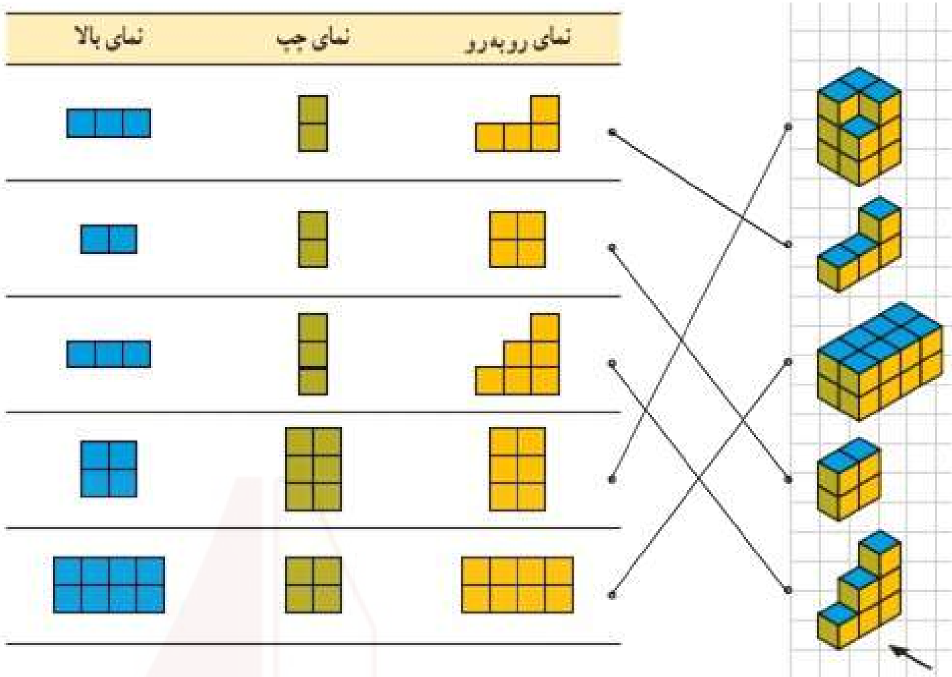
۱۴۴ شکل ۱



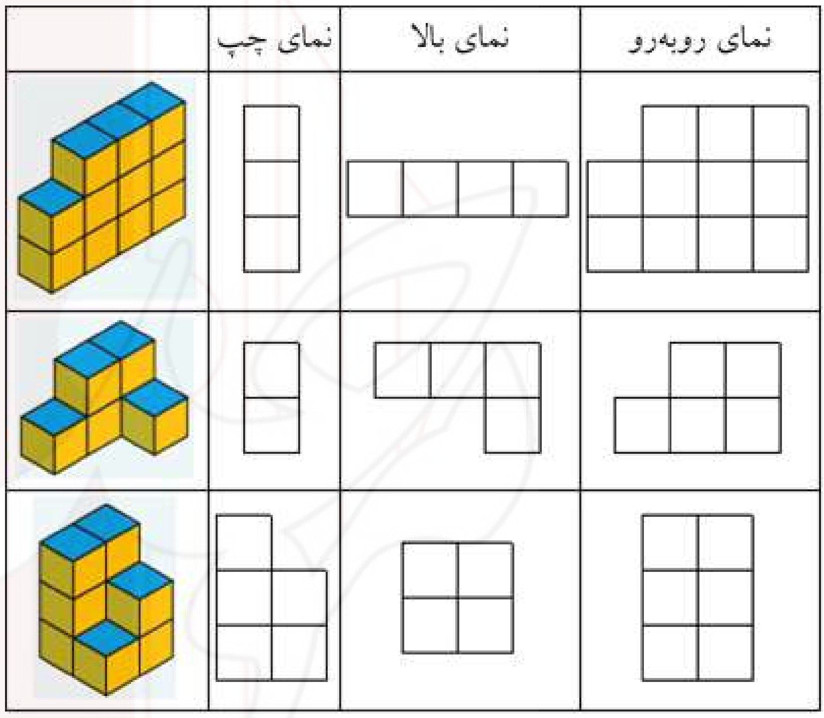
شکل ۲



۱۴۵



۱۴۶



۱۴۷ الف) موازی - موازی - متنافر

ب) ۴ خط - ۳ خط - ۴ خط

ج) با صفحات GFBC و EFBA موازی است - با صفحات BCDA و HGFE متقاطع است - بر صفحات HEAD و HGCD واقع است.

د) صفحه‌ی موازی: HGCD و EFBA

صفحه‌ی متقاطع: GCDH , HGFE

۱۴۸ می‌توان از شکل صورت مسئله استفاده کرد و به راحتی به جواب‌ها رسید.

الف) متقاطع

ب) متقاطع یا موازی

ج) موازی یا منطبق یا متقاطع

۱۴۹ EF و HG: موازی، بله (صفحه HGFE)

HG و HD: متقاطع، بله (HGCD)

EA و GC: موازی، بله (صفحه‌ای به صورت EGCA می‌توان درنظر گرفت.)

EC و FD: متقاطع، بله (صفحه‌ای به صورت FEDC می‌توان درنظر گرفت.)

HD و BC: متنافر، خیر

GD و AB: متنافر، خیر

۱۵۰ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین