



پایه : یازدهم	نمونه سوالات	نام استاد : آقای گروسی
رشته ریاضی	نام درس : آمار و احتمال	

۱ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هریک از حاصل ضرب‌های  $A \times B$  و  $B \times A$  را رسم کنید.

الف)  $A = \{2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$       ب)  $A = \{3, 4\}, B = \{1, 5\}$

پ)  $A = [2, 6], B = [3, 8]$       ت)  $A = N, B = [1, 4]$

ث)  $A = R, B = \{2, 3\}$

۲ اگر  $A = \{y + 2, 5, z\}$  و  $B = \{x + 1, 4, -2\}$  در این صورت، با فرض  $A \times B = B \times A$  بیش‌ترین مقدار برای  $(x + y + z)$  را بیابید.

۳ هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف)  $(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)$

ب)  $(A \cup B) - B$

پ)  $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

۴ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)  $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$       ب)  $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

پ)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$       ت)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۵ با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره‌ها، هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف)  $A \cap B = B \cap A$

ب)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

پ)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۶ فرض کنید:  $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  کدام‌یک از حالت‌های زیر یک افراز برای  $X$  محسوب می‌شود.

الف)  $\{a, c, e\}$  و  $\{b\}$  و  $\{d, g\}$       ب)  $\{a, e, g\}$  و  $\{c, d\}$  و  $\{b, e, f\}$

پ)  $\{a, b, e, g\}$  و  $\{c\}$  و  $\{d, f\}$       ت)  $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

ث)  $\{a\}$  و  $\{b, c\}$  و  $\{d\}$  و  $\{f, g\}$  و  $\{e\}$

۷ هرگاه  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند و  $A \cap B = \emptyset$  در این صورت ثابت کنید:

الف)  $B - A = B$       ب)  $B \subseteq A'$

۸ الف) فرض کنید:  $A \subseteq \emptyset$  ثابت کنید:  $A = \emptyset$ .  
 ب) فرض کنید  $U \subseteq A$  ثابت کنید:  $A = U$ .

۹ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر  $A \subseteq B$  آن گاه:  
 الف)  $A \cup C \subseteq B \cup C$  ب)  $A \cap C \subseteq B \cap C$

۱۰ اگر  $A = \{۲, x + ۲y, ۴\}$  و  $B = \{۴, ۵, x - y\}$  و  $A = B$  در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

۱۱ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه دارد؟

۱۲ کدامیک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < ۲\} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^۲ = x\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^۲ \leq ۲y\} \quad D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^۲ \leq ۱\}$$

$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^۳ + ۲m = ۳m^۲\}$$

۱۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.  
 الف)  $\emptyset = \{\emptyset\}$  ب)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$   
 پ)  $\emptyset \notin \{\emptyset\}$  ت)  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$

۱۴ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، درنظ بگیرید:

$$A = \{x \mid x \text{ یک چهارضلعی است}\} \quad C = \{x \mid x \text{ یک لوزی است}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یک مستطیل است}\} \quad D = \{x \mid x \text{ یک مربع است}\}$$

الف)  $D \subseteq C$  ب)  $B \subseteq C$  پ)  $A \subseteq B$  ت)  $D \subseteq A$

کدامیک از روابط زیر درست است؟ (با ذکر دلیل)

۱۵ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف)  $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} = x + ۱$  ب)  $\forall n \in \mathbb{N}; (۲^n + ۱) \in \mathbb{P}$

پ)  $\forall x \in (-\infty, ۰); x - \frac{۱}{x} \leq -۲$  ت)  $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - ۳}{۵} = ۰$

۱۶ هرگاه  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid ۰ < x \leq ۵\}$  دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف)  $\exists x \in A; x + ۴ = ۱۰$  ب)  $\forall x \in A; x + ۲ \leq ۹$

پ)  $\exists x \in A; x + ۳ \leq ۴$  ت)  $\forall x \in A; x + ۱ \geq ۶$

۱۷ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای  $\forall, \exists$  بنویسید و ارزش هریک را با ذکر دلیل مشخص کنید.  
 الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم:  $a^۲ < ۰$ .  
 پ) همه‌ی اعداد اول فرداند.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که  $۱ - ۲x > ۵$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم  $x^۳ = x$ .

۱۸ ثابت کنید هرگاه  $n$  عددی صحیح و  $n^2$  مضرب ۳ باشد، آن گاه  $n$  نیز مضرب ۳ است.

۱۹ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که:

$p \vee F \equiv p$ (ب)	$p \Rightarrow p \equiv T$ (الف)
$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ (ت)	$p \wedge T \equiv p$ (پ)
$p \vee (q \wedge p) \equiv p$ (ج)	$p \wedge (q \vee p) \equiv p$ (ث)
$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ (ح)	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ (چ)

۲۰ جدول ارزش‌های هریک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

$\sim p \wedge p$ (ب)	$p \wedge \sim q$ (الف)
$(p \vee q) \wedge \sim p$ (ت)	$\sim p \vee p$ (پ)
$\sim p \Leftrightarrow \sim q$ (ج)	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$ (ث)

۲۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره‌ی $p$	گزاره‌ی $q$	ارزش $p$	ارزش $q$	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۲ زوج است.					د
	$1 \neq 2$			ن	
$2 \in \{1, 2\}$					ن
	عدد ۷ اول است				د

۲۲ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

- (الف)  $4 \leq 3$   
 (ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است.  
 (پ)  $a \in \{b, c, d\}$   
 (ت) ۲ عددی زوج است یا عدد  $\pi$  گویاست.  
 (ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.  
 (ج) اگر ۳ زوج باشد، آن گاه ۲ فرد است.

$$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$$

۲۳ درستی تساوی زیر را به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

۲۴ تمام افرازهای مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c\}$  را بنویسید.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = 1 \text{ (ب)}$$

۲۵ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

$$\forall x \in \mathbb{N} : x(x+1) = 2k, (k \in \mathbb{N}) \text{ (ا)}$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 + 3x = 0 \text{ (پ)}$$

۲۶ هرگاه  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 2\}$  دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

$$\forall x \in A : 2x + 1 > -3 \text{ (ب)}$$

$$\forall x \in A : x + 3 \leq 4 \text{ (ا)}$$

۲۷ ثابت کنید هرگاه  $n$  عدد صحیح و  $n^2$  مضرب ۵ باشد، آن گاه  $n$  نیز مضرب ۵ است.

۲۸ نشان دهید اگر  $n^2$  عددی فرد باشد، آن گاه  $n$  نیز فرد است.

۲۹ ارزش‌های گزاره‌ای سوری زیر را تعیین کنید و نقیض هریک را بنویسید.

$$\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \in \mathbb{Z} \quad (۱)$$

$$\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > 1000 \quad (۲)$$

۳۰ گزاره‌های زیر را به زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن‌ها را مشخص کنید.

$$\forall x \in \mathbb{N} : (x)(x+1)(x+2) = 3k, (k \in \mathbb{N}) \quad (۱)$$

$$\forall y \in \mathbb{P} : 2y + 1 > 5 \quad (ب)$$

$$\exists x \in \mathbb{N} : n^2 + n < 3 \quad (پ)$$

۳۱ سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره آبی و ظرف سوم شامل

۶ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که مهره انتخابی آبی باشد چه قدر است؟

۳۲ جدول زیر را کامل کنید.

P(A)	P(B)	P(A ∪ B)	P(A ∩ B)	P(A B)	P(B A)
۰/۷		۰/۹	۰/۵		

۳۳ جدول زیر را کامل کنید؟ (A و B مستقل هستند).

P(A)	P(B)	P(A ∪ B)	P(A ∩ B)	P(A B)	P(B A)
۰/۶		۰/۸			

۳۴ عبارت مناسب را انتخاب کنید.

دو پیشامد A و B را ..... گوییم هرگاه وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. (مستقل - ناسازگار - سازگار)

۳۵ جدول زیر را کامل کنید.

P(A)	P(B)	P(A ∪ B)	P(A ∩ B)	P(A B)	P(B A)
۰/۴	۰/۶				۰/۵

۳۶ در پرتاب دو تاس می‌دانیم هر دو عدد رو شده متوالی هستند، احتمال آن‌که حداقل یکی ۳ باشد را حساب کنید.

۳۷ در پرتاب دو تاس می‌دانیم حداقل یکی از اعداد رو شده ۳ است. احتمال آن‌که متوالی باشند را حساب کنید.

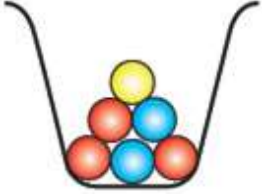
۳۸ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این دو

گروه به ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

۳۹ اگر  $P(A) = \frac{1}{5}$ ،  $P(B) = \frac{1}{6}$  و  $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$  باشد،  $P(A|B)$  و  $P(B|A)$  را حساب کنید.

۴۰ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده،  $\frac{9}{10}$  است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال این که داروی ساخته شده، روی همه‌ی افراد جواب منفی داشته باشد، چه قدر است؟

۴۱ در یک جعبه که شامل ۳ مهره‌ی قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۱ مهره‌ی زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن که:  
(الف) هر دو مهره قرمز باشند.  
(ب) حداقل یک مهره آبی باشد.  
(پ) هر دو مهره هم‌رنگ باشند.



۴۲ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آن‌ها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن‌را به دست آورید که:  
(الف) هر سه لامپ معیوب باشند.  
(ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۴۳ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار  $\frac{6}{10}$  و روی بیمار دیگر  $\frac{8}{10}$  است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال این که:  
(الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.  
(ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.  
(پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

۴۴ یک سکه و دو تاس به طور هم‌زمان پرتاب می‌شوند. احتمال این که سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چه قدر است؟

۴۵ از مجموعه‌ی  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۴۶ در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۴۷ یک شرکت بیمه، بیمه‌گذاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال  $\frac{4}{10}$  تصادف می‌کنند و گروه «کم‌خطر» که احتمال تصادف کردن آن‌ها در یک سال  $\frac{2}{10}$  است. می‌دانیم که ۳۰ درصد از بیمه‌گذاران پرخطرند.  
(الف) احتمال این که یک بیمه‌گذار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.  
(ب) اگر یک بیمه‌گذار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال این که جزء گروه پرخطر باشد چه قدر است؟

۴۸ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسه‌ی انتشاراتی‌اند که به ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال این که این سه نفر صفحه‌ای که به آن‌ها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به ترتیب  $\frac{9}{10}$ ،  $\frac{95}{100}$  و  $\frac{99}{100}$  است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال این که مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چه قدر است؟

۴۹ علی و مازیار هر کدام به ترتیب، با احتمال‌های  $\frac{3}{10}$  و  $\frac{4}{10}$  برای دیدن یک مسابقه‌ی ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال  $\frac{8}{10}$  به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

۵۰ امیر و بابک عضو تیم ده نفره‌ی والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال این‌که امیر بلندترین عضو تیم باشد چه قدر است؟ احتمال این‌که امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چه قدر است؟

۵۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده  $0.02$  و برای کودکی که واکسن نزده  $0.1$  است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال این‌که یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چه قدر است؟

۵۲ در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه‌ی اول ۴ لامپ و در جعبه‌ی دوم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آن‌که لامپ انتخابی از جعبه‌ی جدید معیوب باشد را محاسبه کنید.

۵۳ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

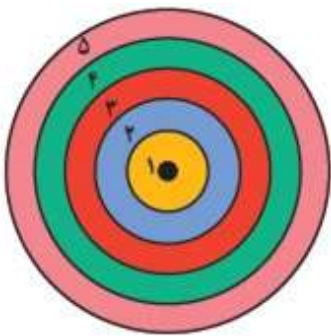
۵۴ در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال این‌که یک راننده‌ی مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند  $0.05$  است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال  $0.01$  انجام می‌دهند. احتمال این‌که یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چه قدر است؟

۵۵ دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن‌را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۵۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه‌ی تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که گواهینامه‌ی تراکتور داشته باشد چه قدر است؟

۵۷ درباره‌ی خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست‌کم یکی از فرزندان آن‌ها پسر است. احتمال این‌که دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چه قدر است؟

۵۸ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه‌ی اول،  $x$  باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه‌ی  $k$  ام،  $(2k - 1)x$  باشد: الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید. ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیش‌تر است، یا اصابت به دو ناحیه‌ی دوم یا پنجم؟



۵۹ اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و  $A = \{a, b\}$ ،  $B = \{a, b, c, d\}$  و  $C = \{a, b, e\}$  سه پیشامد باشند به طوری که  $P(A) = \frac{2}{7}$  و  $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار  $P(C')$  را به دست آورید.

۶۰ در یک تجربه‌ی تصادفی،  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه‌ای است. اگر  $P(x)$ ،  $P(y)$  و  $P(z)$  یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت  $\frac{1}{4}$  تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

۶۱ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده‌ی هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال این‌که عدد مشاهده شده، کم‌تر از ۴ باشد را تعیین کنید.

۶۲ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید:  
الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.  
ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.  
پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.

۶۳ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:  
الف) اگر  $B \subseteq A$  داریم:  $P(A - B) = P(A) - P(B)$ .  
ب) اگر  $B \subseteq A$ ، آن‌گاه  $P(A) \leq P(B)$ .

۶۴ یک شرکت بازرگانی فقط به یک کارمند نیاز دارد. از بین متقاضیان خانم اکبری، خانم معینی و خانم حیدری واجد شرایط هستند. به دلیل مهارت‌های حرفه‌ای خانم معینی، احتمال این‌که ایشان استخدام شوند، ۲۰٪ بیشتر از خانم اکبری و ۲۰٪ بیشتر از خانم حیدری است. احتمال این‌که خانم معینی استخدام شود چه قدر است؟

۶۵ آمار نشان می‌دهد که در یکی از شهرهای بزرگ، ۲۰٪ جرائم در طول روز و ۱۸٪ جرائم در درون شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ۱۰٪ جرائم در حومه‌ی شهر و در طول روز اتفاق بیفتند، در این صورت چند درصد جرم‌ها درون شهر و در طول شب رخ می‌دهند؟ چند درصد جرم‌ها در حومه‌ی شهر و در طول شب اتفاق می‌افتد؟

۶۶ یک کیسه محتوی ۲۰ مهره‌ی قرمز، ۱۰ مهره‌ی سفید و ۱۵ مهره‌ی سبز است. یک مهره را به‌طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است:  
الف) احتمال آن‌که این مهره سفید باشد.  
این مهره را به کیسه برگردانده ۲ مهره را به‌طور تصادفی بیرون می‌آوریم.  
ب) احتمال آن‌که یک مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

۶۷ ۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال، امکان استخدام تنها برای ۵ نفر از آن‌ها وجود دارد احتمال انتخاب ۵ نفر را در حالت‌های زیر پیدا کنید:  
الف) ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.  
ب) ۵ زن انتخاب شوند  
پ) حداقل ۴ مرد انتخاب شوند

۶۸ از مجموعه‌ی اعداد  $\{1, 2, \dots, 1000\}$  عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم:  
الف) احتمال آن‌که عدد انتخابی بر ۳ یا ۵ بخش‌پذیر شده را بیابید.  
ب) احتمال آن‌که عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد را بیابید.

۶۹ احتمال این‌که دانش‌آموزی در درس جبر و احتمال قبول شود ۳۴٪ و در درس حسابان قبول شود ۲۳٪ است و احتمال این‌که دست‌کم در یکی از این دو درس قبول شود ۳۸٪ است. احتمال این‌که این دانش‌آموز در هر دو درس قبول شود، چه قدر است؟

۷۰ ظرف A حاوی ۳ مهره‌ی سفید و ۲ مهره‌ی سیاه و ظرف B حاوی ۲ مهره‌ی سفید و ۱ مهره‌ی سیاه است. یک مهره به تصادف از ظرف A بیرون آورده بدون مشاهده در ظرف B قرار می‌دهیم و سپس یک مهره از ظرف B بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که این مهره‌ی سفید باشد، چه قدر است؟

۷۱ در داده‌های زیر:

۱۷, ۱۲, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۵, ۴, ۷, ۱۵, ۸, ۱۹

- الف) میانه را به دست آورید.
- ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.
- ج) مد را مشخص کنید.

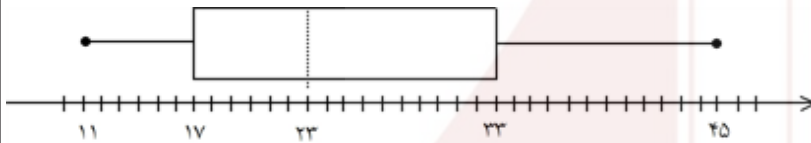
۷۲ نمرات مربوط به دروس دانش‌آموزی همراه با واحد دروس مربوطه در جدول زیر آمده است. معدل این دانش‌آموز را محاسبه کنید.

نمرات دروس	۱۶	۱۳	۱۵	۱۷
واحد دروس	۴	۳	۲	۴

۷۳ در نمودار جعبه‌ای زیر:

- الف) چارک اول چقدر است؟
- ب)  $Q_2$  چقدر است؟
- پ) میانه را به دست آورید.

ت) چرا دنباله سمت چپ از دنباله سمت راست کوتاه‌تر است؟



۷۴ برای داده‌های زیر نمودار جعبه‌ای رسم کنید.

۱۷, ۱۲, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۵, ۴, ۷, ۱۵, ۸, ۱۹

۷۵ فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بوته را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است:

۷, ۴, ۳, ۸, ۶, ۴, ۱, ۷, ۴, ۲, ۱, ۱, ۱, ۳, ۲, ۲, ۲, ۲, ۵, ۵, ۱, ۲

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

۷۶ میانگین، میانه، مد و چارک‌های اول و سوم داده‌های زیر را به دست آورید. کدام معیار به عنوان معیار گرایش به مرکز

۹, ۷, ۸, ۳۶, ۱۰, ۸, ۷, ۹, ۱۰

برای این داده‌ها مناسب است؟ چرا؟

۷۷ اگر میانگین ده داده‌ی آماری برابر ۵ و ضریب تغییرات ۳ باشد:

الف) واریانس داده‌ها کدام است؟

ب) اگر دو داده‌ی ۵ به داده‌های قبلی اضافه شود، ضریب تغییرات ۱۲ داده را بیابید.

۷۸ برای اعداد زیر مطلوب است واریانس، انحراف معیار، ضریب تغییرات.

۶۳ - ۵۰ - ۶۴ - ۲۳ - ۴۵ - ۱۷ - ۷۴ - ۵۳ - ۲۶ - ۵۹ - ۳۲

درجه حرارت بدن ۸ بیمار (به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد شده است) در زیر آمده است:

۳۸ ۳۸ ۳۹ ۳۹ ۴۰ ۴۰ ۴۱ ۴۱

به ۴ سؤال بعدی پاسخ دهید.

۷۹ میانگین و انحراف معیار را حساب کنید.



۸۰ درجه حرارت واقعی به قرار زیر می‌باشند:

۳۸/۵ ۳۸/۴ ۳۹/۵ ۳۹/۴ ۳۹/۸ ۴۰/۲ ۴۰/۹ ۴۱/۲

میانگین و انحراف معیار درجات را حساب کنید.

۸۱ گرد کردن داده‌ها چه تأثیری در میانگین و انحراف معیار داشت؟

۸۲ آیا گرد کردن همواره تأثیری بر میانگین و انحراف معیار دارد؟

۸۳ در داده‌های آماری زیر ابتدا چارک اول و سوم را مشخص کنید و سپس میانگین داده‌ها بین چارک اول و سوم را به دست

آورید.  $1, 5, 2, 3, 7, 7, 7, 8, 10, 11, 13, 19, 19$

۸۴ ضریب تغییرات داده‌های  $1, 2, 3, 4, 5$  را به دست آورید.

۸۵ انحراف معیار داده‌های  $1, 1, 2, 2, 3, 3$  را به دست آورید.

۸۶ پارامتر واریانس و انحراف معیار جامعه را با چه آماره‌هایی می‌توان برآورد کرد؟

۸۷ طول فاصله‌ی اطمینان، برابر تفاضل حدّ بالا و پایین بازه‌ی اطمینان است.

الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، طول فاصله‌ی اطمینان ..... می‌یابد. چرا؟  
ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان ..... می‌یابد. چرا؟

۸۸ رئیس یک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سنّ دانشجویانی که در سال جاری ثبت‌نام کرده‌اند را بداند. برای این منظور، او

یک نمونه‌ی تصادفی از سنّ ۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند. میانگین سنّ آن‌ها برابر ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار طول قد دانشجویان این دانشگاه برابر  $1/9$  سال باشد، بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سنّ جامعه را محاسبه کنید.

۸۹ از اعداد  $0$  تا  $N$ ،  $10$  عدد به تصادف انتخاب شده است. اگر اعداد انتخابی به صورت زیر باشند با دو روش مختلف  $n$  را

برآورد کنید.



۹۰ چگونه از ارقام  $0$  تا  $9$  عدد تصادفی انتخاب می‌کنید؟ آیا با روش پیشنهادی شما می‌توان عدد تصادفی بین اعداد  $0$  تا  $99$

انتخاب کرد؟ آیا امکان توسعه‌ی روش پیشنهادی شما به انتخاب تصادفی از فهرستی  $1000$  تایی امکان‌پذیر است؟

۹۱ نوع روش نمونه‌گیری مناسب‌تر را انتخاب کنید.

الف) شرکت واردکننده‌ی خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آن‌ها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی را که به مرور زمان وارد کشور می‌شوند بازرسی کند.

ب) مدیر مدرسه‌ی  $600$  نفری می‌خواهد نظر دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه براساس یک نمونه‌ی  $12$  تایی بداند.

پ) در قسمت قبل اگر مدرسه، شش پایه داشته باشد و ما حدس بزنیم که نظر  $6$  پایه با هم تفاوت دارد (با فرض برابر بودن تعداد دانش‌آموزان در پایه‌های مختلف).

۹۲

دلایل اریبی در نمونه‌گیری‌های زیر را ذکر کنید. کدام روش گردآوری داده‌ها برای آن‌ها مناسب‌تر است؟  
 الف) نمونه‌گیری راحت: افراد در دسترس را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.  
 ب) نمونه‌ی غیرتصادفی: عامل شانس در انتخاب نمونه نقشی ندارد.  
 پ) نمونه‌گیری ایملی (رایانه‌ای): پرسش‌نامه‌ای به ایمیل‌های انتخاب شده ارسال می‌شود.  
 ت) نمونه‌گیری تلفنی: از دفترچه‌ی راهنمای تلفن تعدادی شماره به تصادف انتخاب می‌شود.  
 ث) برخی از اعضای انتخاب شده در نمونه حاضر به پاسخگویی نمی‌باشند.

۹۳

کدام روش گردآوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.  
 میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه‌ی برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آن‌ها.  
 سنّ همهی دانش‌آموزان مدرسه برحسب ماه در پایه‌ی دهم.  
 تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

۹۴

در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاهای گیاهی، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟  
 الف) متغیّر را مشخص کنید. این متغیّر کمی است یا کیفی؟  
 ب) کدام روش گردآوری داده‌ها برای مطالعه مناسب است؟  
 پ) جامعه‌ی آماری در این‌جا چیست؟ در این مطالعه پارامتر و آماره چه چیزی می‌توانند باشند؟

۹۵

در یک جامعه‌ی آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازه‌ی یکسان از یک جامعه داشته باشیم، می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟

۹۶

فرق بین آماره با پارامتر چیست؟

۹۷

فرق بین داده و متغیّر چیست؟

۹۸

الف) آیا در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است؟ چرا؟ ب) احتمال انتخاب خوشه‌ها چطور؟ آیا این روش نمونه‌گیری احتمالی است؟

۹۹

فرض کنید که از ۱۰۰ دانش‌آموز تهرانی پرسیده‌ایم که «آیا از تلفن همراه استفاده می‌کنید؟» و ۸۴ نفر به سوال ما جواب مثبت داده‌اند. در این صورت، چند درصد از دانش‌آموزان تهران جوابشان به این سوال مثبت خواهد بود؟ پاسخ با اطمینان ۹۵ درصد مدنظر است. فاصله اطمینان پاسخ را نیز تعیین نمایید.

۱۰۰

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- اگر همه داده‌ها در عددی ثابت مانند  $K$  ضرب شوند، میانگین، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات چه تغییری می‌کنند؟

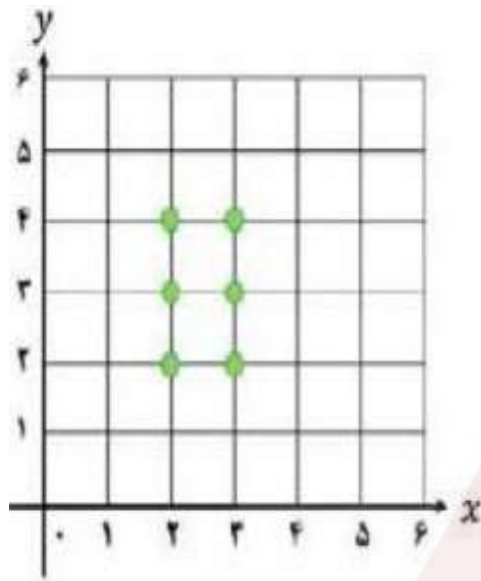
۲- اگر با عدد ثابت  $K$  جمع شوند، موارد بالا چه تغییری می‌کنند؟



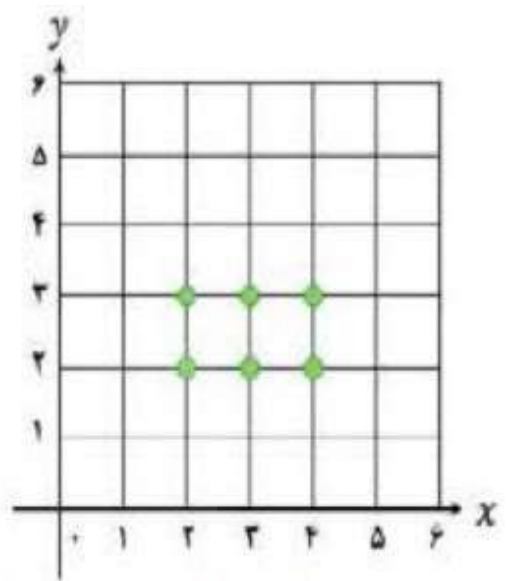
الف)  $A = \{2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$

$A \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

$B \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$

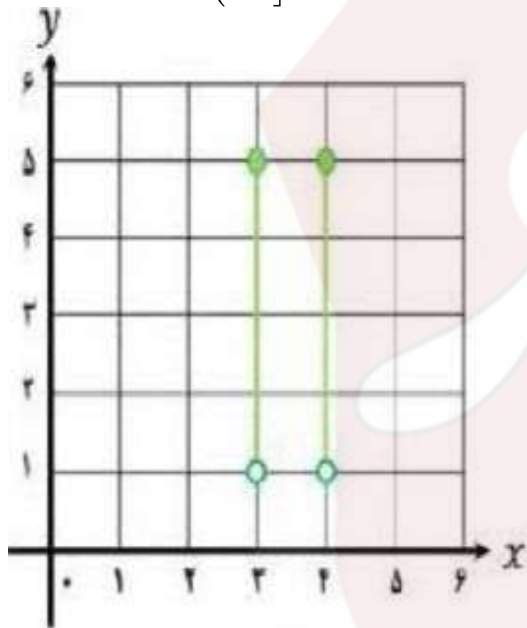


$A \times B$

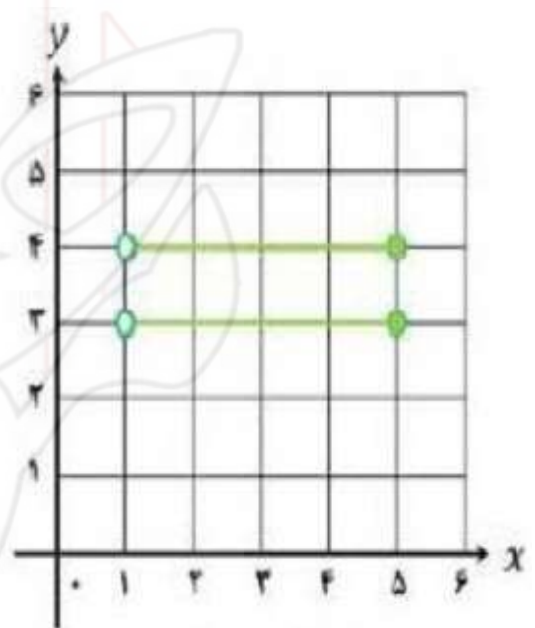


$B \times A$

ب)  $A = \{3, 4\}, B = \{1, 5\}$

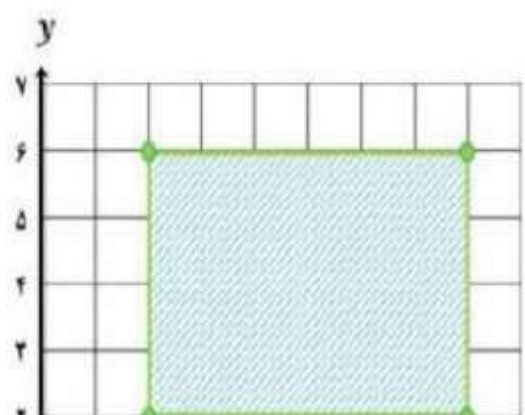
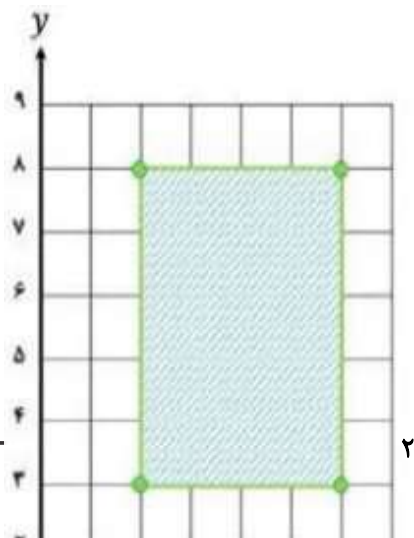


$A \times B$



$B \times A$

ج)  $A = [2, 6], B = [3, 8]$



می‌دانیم اگر  $A \times B = B \times A$  باشد، خواهیم داشت  $A = B$ ، بنابراین  $\{x + 1, 4, -2\} = \{y + 2, 5, z\}$  واضح است که ۵ فقط می‌تواند با  $x + 1$  برابر باشد، لذا  $x = 4$  است. اما در دو مورد دیگر دو حالت داریم:

$$[(y + 2) \wedge (z = -2)] \vee [(y + 2 = -2) \wedge (z = 4)] \Rightarrow [(y = -2) \wedge (z = -2)] \vee [(y = 4) \wedge (z = 4)]$$

$$\Leftrightarrow yA = zA, B = x + 1 + y + z = 4$$

الف)  $(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A) \Rightarrow$

$$(B \cap A) \cup [(B \cap A) \cap B'] \cap (B \cup A) = (B - A) \cup (B \cup A)$$

$$\xrightarrow{(B-A) \subseteq (B \cup A)} = (B \cup A)$$

ب)  $(A \cup B) - B \Rightarrow (A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = (A - B) \cup \emptyset = A - B$

$$= (B \cap A') \cup (B \cap A) = B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B$$

پ)  $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B) = [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B) = (B \cap A) \cup (A \cap B) = B \cap (A \cup A) = B \cap U = B$

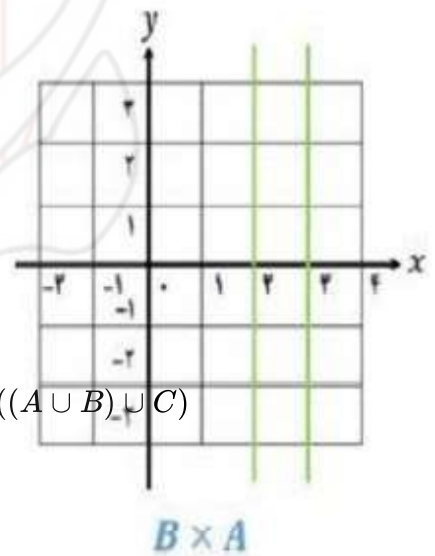
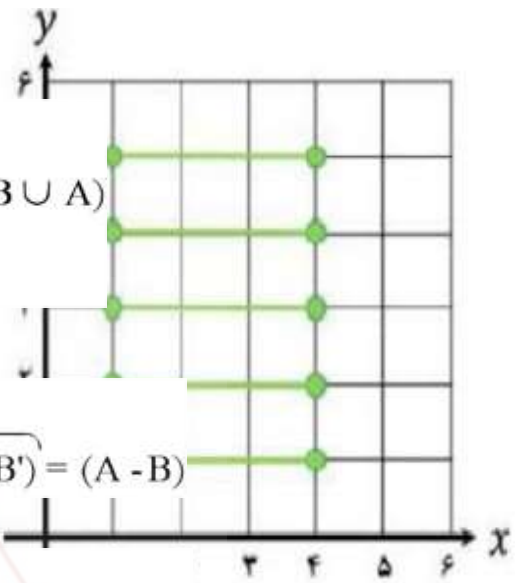
$$= (B \cap A) \cup (A \cap B) = B \cap (A \cup A) = B$$

الف)  $(A \cap B) \cup (A \cap B') \Rightarrow (A \cap (B \cup B')) = A \cap U = A$

ب)  $(A' \cap A) \cap (B' \cap A) = \emptyset$

پ)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap A) \cap (B \cap C) = A \cap (A \cap (B \cap C)) = A \cap ((A \cap B) \cap C) = A \cap (C \cap (A \cap B)) = (A \cap C) \cap (A \cap B) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

ت)  $A \cup (B \cup C) = (A \cup A) \cup (B \cup C) = A \cup (A \cup (B \cup C)) = A \cup ((A \cup B) \cup C) = A \cup (C \cup (A \cup B)) = (A \cup C) \cup (A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$



$$\text{الف)} A \cap B = B \cap A \Rightarrow A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$$

$$\text{ب)} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \Rightarrow A \cap (B \cap C) = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \cap C\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in A \wedge \{x \in B \wedge x \in C\}\} = \{x \in U \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\}$$

$$= (A \cap B) \cap C$$

$$\text{پ)} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{x \in A \mid x \in B \cup C\}$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \cup C) \Rightarrow \{x \in A \wedge x \in B\} \vee \{x \in A \wedge x \in C\}$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

به طور مشابه ثابت می‌شود  $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$  بنابراین دو مجموعه با هم برابرند.

الف) افراز نیست زیرا اجتماع مجموعه‌ها برابر با X نیست.

ب) افراز نیست زیرا مجموعه اول و آخر با هم اشتراک دارند.

پ) افراز است.

ت) افراز نیست زیرا افراز تنها از یک مجموعه تشکیل نمی‌شود.

ث) افراز است.

$$\text{الف)} \forall x; x \in (B - A) \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B \Rightarrow B - A \subseteq B \quad (۱)$$

$$\forall x; x \in B \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow B \subseteq B - A \quad (۲)$$

$$B - A = B \quad \text{از ۱ و ۲ داریم:}$$

$$\text{ب)} A \cap B = \emptyset \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A' \Rightarrow B \subseteq A'$$

الف) چون تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است بنابراین  $\emptyset \subseteq A$  و از طرفی طبق فرض  $A \subseteq \emptyset$  در نتیجه  $A = \emptyset$ .

ب) چون هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی مرجع است بنابراین  $A \subseteq U$  و طبق فرض  $U \subseteq A$  در نتیجه  $A = U$ .

$$\text{الف)} \forall x; [x \in A \cup C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \text{ یا } \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \text{ یا } \Rightarrow x \in B \cup C$$

$$\text{ب)} \forall x; [x \in A \cap C] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \text{ و } \Rightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \text{ و } \Rightarrow x \in C \cap B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$$

$$x + 2y = 5$$

$$x - y = 4 \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{13}{2} - y = 4 \Rightarrow \frac{13}{2} - 4 = y \Rightarrow \frac{1}{2} = y$$

$$2^x - 384 = 2^{x-2} \Rightarrow 2^x - 384 = 2^x \div 2^2 \Rightarrow 2^x - 284 = 2^x \div 4$$

$$2^x - \frac{2^x}{4} = 384 \Rightarrow 2^x \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 384 \Rightarrow 2^x = 384 \times \frac{4}{3} = 512 = 2^9 \Rightarrow x = 9$$

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\} = \{-1, 0, 1\} \quad -2 < m < 2$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\} = \{-1, +1, 0\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\} = \{0, 1, 2\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\} = \{-1, 0, 1\}$$

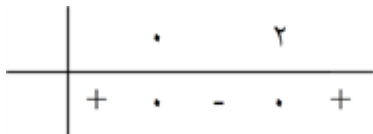
$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + 2m = 3m^2\} = \{0, 1, 2\}$$

$$m^2 - 2m^2 + 2m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 2m + 2) = 0 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow (m - 2)(m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 2, m = 1$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1 \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$y^2 - 2y \leq 0 \Rightarrow y(y - 2) \leq 0$$



$$A = B = D, C = E$$

۱۳ الف) نادرست است. زیرا  $\{\emptyset\}$  دارای یک عضو است ولی  $\emptyset$  عضوی ندارد.

ب) درست است زیرا  $\emptyset$  زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها است.

پ) نادرست است زیرا تنها عضو مجموعه  $\emptyset$  است.

ت) درست است زیرا  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  دقیقاً یکی از اعضاء مجموعه است.

۱۴ الف) درست است. زیرا مربع حالت خاصی از لوزی است.

ب) نادرست است. زیرا نمی‌توان ادعا کرد که همه‌ی مستطیل‌ها مربع هستند.

پ) نادرست است. زیرا نمی‌توان ادعا کرد که همه‌ی چهارضلعی‌ها مستطیل هستند، مانند ذوزنقه

ت) درست است زیرا مربع نوعی چهارضلعی است.

۱۵ الف)  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1 \quad \exists x \in \mathbb{R}$  - نادرست

ب)  $(2^{2n} + 1) \notin P \quad \exists n \in \mathbb{N}$  - درست

پ)  $x - \frac{1}{x} \geq -2 \quad \exists x \in (-\infty, 0)$  - نادرست

ت)  $\frac{y - 3}{5} \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$  - درست

ت) نادرست

پ) درست

ب) درست

۱۶ الف) نادرست

۱۷ الف)  $(x = 2k) \vee (x = 2k - 1) \quad \forall x \in \mathbb{N}$  - درست

ب)  $a^2 < 0 \quad \exists a \in \mathbb{W}$  - نادرست

پ)  $d - 2k - 1 \quad \forall d \in \mathbb{P}$  - نادرست

ت)  $1 - 2x > 5 \quad \forall x \in \mathbb{Z}; x \geq 0$  - نادرست

ث)  $\left(x + \frac{1}{x} \geq 2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}; x \neq 0$  - درست

ج)  $x^2 = x \quad \exists x \in \mathbb{R}$  - درست

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

$$n \text{ مضرب } ۳ : \begin{cases} n = ۳q + ۱ \Rightarrow n^۲ = ۹q^۲ + ۶q + ۱ = ۳ \text{ نیست} \\ n = ۳q + ۲ \Rightarrow n^۲ = ۹q^۲ + ۱۲q + ۴ = ۳ \text{ نیست} \end{cases} \Rightarrow \text{پس گزاره درست است.}$$





p	T	$p \wedge T$
د	د	$\text{د} \equiv p$
ن	د	$\text{ن} \equiv p$
د	ن	ن
ن	ن	$\text{ن} \equiv p$

$$p \wedge T \equiv p \text{ (ب)}$$

p	f	$p \vee f$
د	د	$\text{د} \equiv p$
ن	د	د
د	ن	$\text{د} \equiv p$
ن	ن	$\text{ن} \equiv p$

$$p \vee F \equiv p \text{ (ب)}$$

p	p	$p \Rightarrow p$
د	د	د
ن	د	د
د	ن	ن
ن	ن	ن

$$p \Rightarrow p \equiv T \text{ (الف)}$$

١٩

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \text{ (ت)}$$

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	$\text{د} \equiv p$
د	ن	ن	$\text{د} \equiv p$
ن	د	ن	$\text{ن} \equiv p$
ن	ن	ن	$\text{ن} \equiv p$

$$p \vee (q \wedge p) \equiv p \text{ (ج)}$$

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
د	د	د	د
ن	د	د	ن
د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن

$$p \wedge (q \vee p) \equiv p \text{ (ث)}$$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \text{ (ج)}$$

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \text{ (ج)}$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د	ن	د	ن	د	ن

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

الف)  $p \wedge \sim q$  (٢٠)

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	د	ن

ب)  $\sim p \wedge p$

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	د	د

پ)  $\sim p \vee p$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	ن	د	ن	ن
د	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د

ت)  $(p \vee q) \wedge \sim p$

$p \vee q$	q	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	ن	ن
د	د	د
ن	ن	د
د	د	د

ث)  $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

ج)  $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

گزاره‌ی p	گزاره‌ی q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $(p \wedge q)$
عدد ۲ زوج است.	عدد ۳ فرد است	د	د	د	د
شهریور ۳۱ روز دارد	$1 \neq 2$	د	ن	ن	ن
$2 \in \{1, 2\}$	عدد ۵ مضرب ۲ است	د	ن	د	ن
$3 > 5$	عدد ۷ اول است	ن	د	د	ن

۲۱

۲۲ الف)  $4 > 3$

ب) ابوالوفای بوزجانی ریاضی‌دان نیست.

پ)  $a \notin \{b, c, d\}$

ت) ۲ عدد زوج نیست و عدد  $\pi$  گویا نیست.

ث) زمین به دور خورشید می‌چرخد یا سنندج مرکز استان کردستان نیست.

ج) اگر n فرد باشد. آن‌گاه  $a + 1$  زوج است.

۲۳

$$\text{طرف راست} = (A \cup B) \cap (C - A)' = (A \cup B) \cap (C \cap A')' = (A \cup B) \cap (C' \cup A) =$$

$$A \cup (B \cap C') = A \cup (B - C) = \text{طرف چپ}$$

۲۴

$\{a\}, \{b\}, \{c\}$

$\{a, b, c\}$

$\{a\}, \{b, c\}$

$\{c\}, \{a, b\}$

$\{b\}, \{a, c\}$

۲۵

آ) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی متوالی زوج است، بنابراین برای هر عضو از دامنه‌ی متغیر (N)، گزاره‌ها به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

ب) نادرست است، زیرا به عنوان مثال اگر  $x = \frac{\pi}{4}$  باشد، گزاره‌ها به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌شود.

$$\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \neq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2} \neq 1 \Rightarrow \sqrt{2} \neq 1$$

پ) درست است، زیرا دو عدد صحیح  $\{0, -3\}$  وجود دارند که در معادله صدق می‌کنند، پس مجموعه جواب گزاره‌ها ناتمام است.

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

۲۶

آ) ارزش این گزاره سوری درست است، زیرا به ازای هر  $x \in A$  گزاره‌ها درست می‌باشد.

$$A = \{-2, -1, 0, 1\} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 3 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq 4 \\ -1 + 3 \leq 4 \Rightarrow 2 \leq 4 \\ 0 + 3 \leq 4 \Rightarrow 3 \leq 4 \\ 1 + 3 \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 4 \end{cases}$$

ب) ارزش این گزاره سوری نادرست است، زیرا  $x = -2$  از دامنه متغیر وجود دارد که به ازای آن ارزش گزاره‌ها نادرست

$$x = -2 \Rightarrow 2(-2) + 1 \neq -3 \Rightarrow -3 \neq -3 \text{ است.}$$

به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

$$(n^2 \text{ مضرب } 5) \Rightarrow (n \text{ مضرب } 5) \equiv (n \text{ مضرب نیست } 5) \Rightarrow (n^2 \text{ مضرب نیست } 5)$$

در این قسمت دو روش برای اثبات داریم:

روش اول: اگر  $n$  مضرب ۵ نباشد، یعنی  $n \neq 5k$  و خواهیم داشت:

$$n^2 \neq (5k)^2 \neq 25k^2 \neq 5 \underbrace{(5k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} \neq 5k'$$

در نتیجه  $n^2$  مضرب ۵ نیست.

روش دوم: اگر  $n$  مضرب ۵ نباشد، پس به صورت زیر است:

$$n = 5k + r \quad (1 \leq r \leq 4) \xrightarrow{\text{طرفین را به توان می‌رسانیم}} n^2 = (5k + r)^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$$

$$5 \underbrace{(5k^2 + 2kr)}_{k' \in \mathbb{Z}} + r^2 = 5k' + r^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \Rightarrow n^2 = 5k' + 1 \text{ (مضرب نیست } 5) \\ r = 2 \Rightarrow n^2 = 5k' + 4 \text{ (مضرب نیست } 5) \\ r = 3 \Rightarrow n^2 = 5k' + 9 \text{ (مضرب نیست } 5) \\ r = 4 \Rightarrow n^2 = 5k' + 16 \text{ (مضرب نیست } 5) \end{cases}$$

در نتیجه در هر ۴ حالت،  $n^2$  مضرب ۵ نیست.

به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:

$$(n^2 \text{ زوج است}) \Rightarrow (n \text{ عددی زوج است}) \equiv (n \text{ عددی فرد است}) \Rightarrow (n^2 \text{ فرد است})$$

اگر  $n$  عدد زوج باشد، یعنی  $n = 2k$  است و داریم:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 2k^2 = 2 \underbrace{(k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} = 2k'$$

در نتیجه  $n^2$  عددی زوج است.

۱) درست است، زیرا به ازای  $x = 0$  زیر رادیکال برابر صفر شده و متعلق به اعداد صحیح است، پس مجموعه جواب آن

نا تهی است.

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \notin \mathbb{Z}$$

۲) درست است، زیرا به ازای  $n \geq 10$  نامساوی برقرار می‌شود.

$$n = 10 \Rightarrow (2^{10} = 1024 > 1000)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > 1000) \equiv \forall n \in \mathbb{N} : 2^n \not> 1000 \equiv \forall n \in \mathbb{N} : 2^n \leq 1000$$

۳۰) حاصل ضرب هر سه عدد متوالی طبیعی مضرب ۳ است. ارزش این گزاره درست است، زیرا از هر سه عدد طبیعی متوالی، یکی مضرب ۳ است.

ب) به ازای هر عدد اول، دو برابر آن به اضافه‌ی یک از ۵ بزرگ‌تر است.

$$y = 2 \Rightarrow 2(2) + 1 = 5 < 5$$

ارزش این گزاره نادرست است، زیرا به ازای  $y = 2$  نامساوی نادرست است.

پ) وجود دارد عددی طبیعی که مجموع آن عدد با مربعش کوچک‌تر از ۳ باشد. ارزش این گزاره درست است، زیرا  $n = 1$  وجود دارد که به ازای آن نامساوی برقرار است.

$$n = 1 \Rightarrow 1^2 + 1 = 2 < 3$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{11}{24}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0/9 = 0/7 + P(B) - 0/5 \Rightarrow P(B) = 0/7$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/5}{0/7} = \frac{5}{7}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0/5}{0/7} = \frac{5}{7}$$

P(A)	P(B)	P(A ∪ B)	P(A ∩ B)	P(A B)	P(B A)
0/7	0/7	0/9	0/5	5/7	5/7

$$P(B) = x \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Rightarrow 0/8 = 0/6 + x - 0/6x$$

$$\Rightarrow 0/4x = 0/2 \Rightarrow x = 0/5 \Rightarrow P(B) = 0/5$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0/6 \times 0/5 = 0/3$$

چون دو پیشامد مستقل هستند. بنابراین شرط بی‌تأثیر است، در نتیجه:

$$P(A|B) = P(A) = 0/6$$

$$P(B|A) = P(B) = 0/5$$

P(A)	P(B)	P(A ∪ B)	P(A ∩ B)	P(A B)	P(B A)
0/6	0/5	0/8	0/3	0/6	0/5

۳۴) مستقل

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Rightarrow 0/5 = \frac{P(A \cap B)}{0/4} \Rightarrow P(A \cap B) = 0/2$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/4 + 0/6 - 0/2 = 0/8$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/2}{0/6} = \frac{1}{3}$$

P(A)	P(B)	P(A ∪ B)	P(A ∩ B)	P(A B)	P(B A)
0/4	0/6	0/8	0/2	1/3	0/5

۳۵)



$$\begin{array}{ccc}
 m_1 & m_2 & m_3 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \text{اولی} & \text{دومی} & \text{سومی} \\
 \text{معیوب} & \text{معیوب} & \text{معیوب}
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{مستقل}}
 \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{220}$$

$$\frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{55}$$

ب) احتمال این که تمام لامپ‌ها سالم باشند را به دست می‌آوریم:

و با استفاده از احتمال متمم داریم:

$$1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$$

احتمال این که حداقل یک لامپ معیوب باشد

۴۳ پیشامد موفقیت‌آمیز بودن پیوند کلیه روی بیمار اول را A و پیشامد موفقیت‌آمیز بودن پیوند کلیه روی بیمار دوم را B در نظر می‌گیریم. بنابراین با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد داریم:

$$P(A) = 0/6, P(B) = 0/8$$

الف)  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/6 \times 0/8 = 0/48$

ب) با توجه به این که هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، متمم آن‌ها نیز مستقلند، داریم:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0/6 = 0/4$$

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0/8 = 0/2$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0/4 \times 0/2 = 0/8$$

پ) هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، هر کدام از آن‌ها مستقل از متمم دیگری است. داریم:

$$\begin{cases} P(A') = 0/4 \\ P(B) = 0/8 \end{cases} \Rightarrow P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) = 0/4 \times 0/8 = 0/32$$

$$n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 72, A = \{(r, 6, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{72}$$

۴۴ روش اول:

روش دوم: اگر A را پیشامد رو آمدن سکه و B را پیشامد ۶ آمدن دو تاس در نظر بگیریم این دو پیشامد از هم مستقل هستند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{2} \\ P(B) = \frac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{72}$$

$$\begin{cases} A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{10} \\ B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{1}{10} \neq \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} \\ P(A \cap B) = \{6\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10} \\ \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \end{cases}$$

۴۵

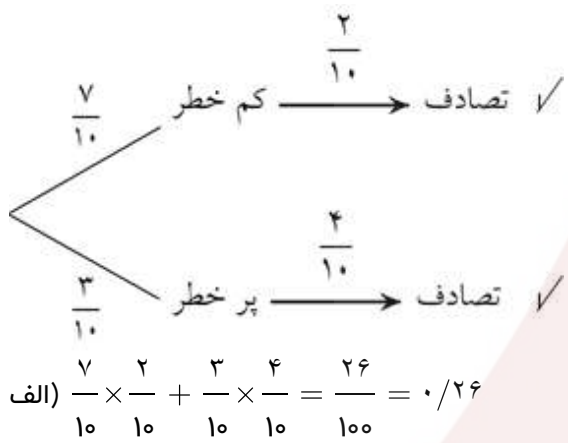
A و B مستقل نیستند.

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)\}$$

$$B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}, (A \cap B) = \{(3, 2), (3, 4)\}$$

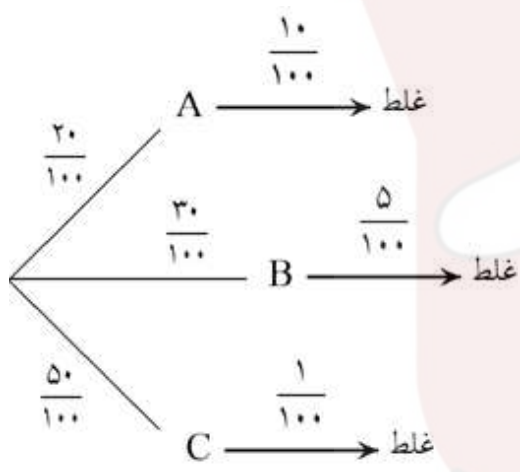
$$\begin{cases} P(A) = \frac{10}{36} \\ P(B) = \frac{6}{36} \Rightarrow \frac{10}{36} \times \frac{6}{36} \neq \frac{2}{36} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \\ P(A \cap B) = \frac{2}{36} \end{cases}$$

\* A و B مستقل نیستند.



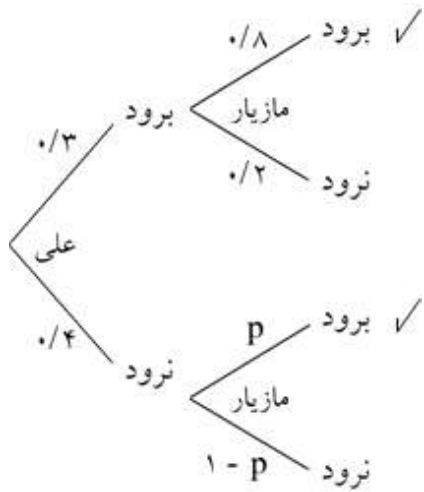
الف)  $\frac{7}{100} \times \frac{2}{100} + \frac{3}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{26}{1000} = 0.26$

ب)  $p(\text{تصادف} | \text{پرخطر}) = \frac{p(\text{تصادف} \cap \text{پرخطر})}{p(\text{تصادف})} = \frac{\frac{3}{100} \times \frac{4}{100}}{\frac{26}{1000}} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$



$$p(A | \text{غلط}) = \frac{P(A \cap \text{غلط})}{p(\text{غلط})} = \frac{\frac{20}{1000} \times \frac{10}{100}}{\frac{20}{1000} \times \frac{10}{100} + \frac{30}{1000} \times \frac{5}{100} + \frac{50}{1000} \times \frac{1}{100}} = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}$$





$$p(\text{مازیار برود}) = 0.3 \times 0.8 + 0.4 \times p = 0.3 \times 0.8 + 0.4 \times p = 0.24 + 0.4p = 0.3 \Rightarrow 1 - p = 0.06 \Rightarrow p = 0.94$$



الف) تعداد حالاتی که امیر بلندتر از بابک است  $\rightarrow \binom{10}{2} \times 8!$  جایگشت بقیه

امیر بلندترین باشد  $\rightarrow 1 \times 9!$  جایگشت بقیه ۱۰ نفر

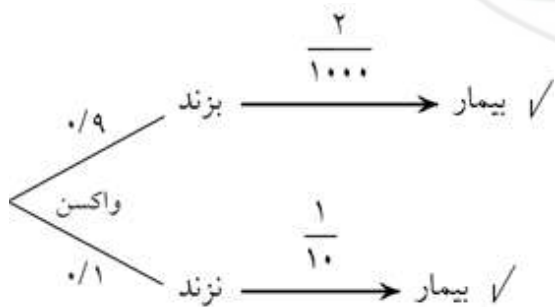
$$p = \frac{9!}{\binom{10}{2} \times 8!} = \frac{1}{5}$$

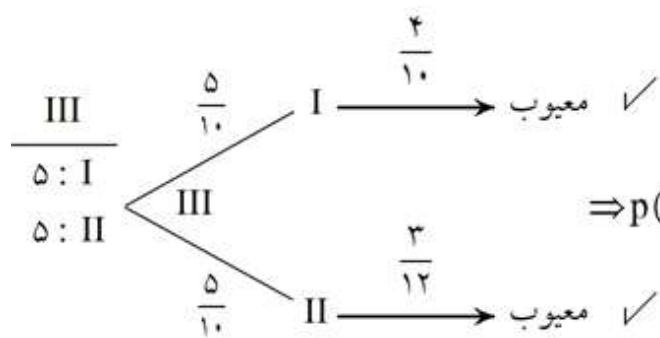
ب)  $n(S) = \binom{10}{2} \times 8!$

$n(B) = 1 \times \binom{8}{1} \times 8! \rightarrow p(B) = \frac{\binom{8}{1} \times 8!}{\binom{10}{2} \times 8!} = \frac{8}{45}$

↑ امیر نهم      ↑ بابک

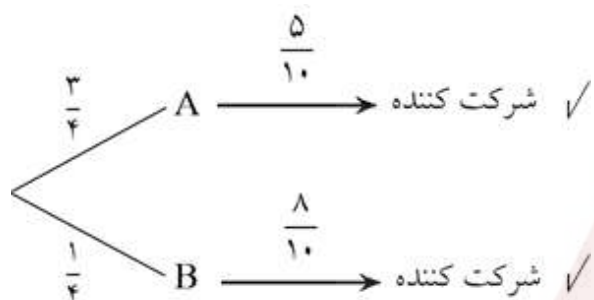
$$\Rightarrow p(\text{بیمار}) = \frac{9}{20} \times \frac{2}{1000} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{118}{10000} = 0.0118$$





$$\Rightarrow p(\text{معیوب}) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{12} = \frac{5}{10} \left( \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{13}{40}$$

۵۲

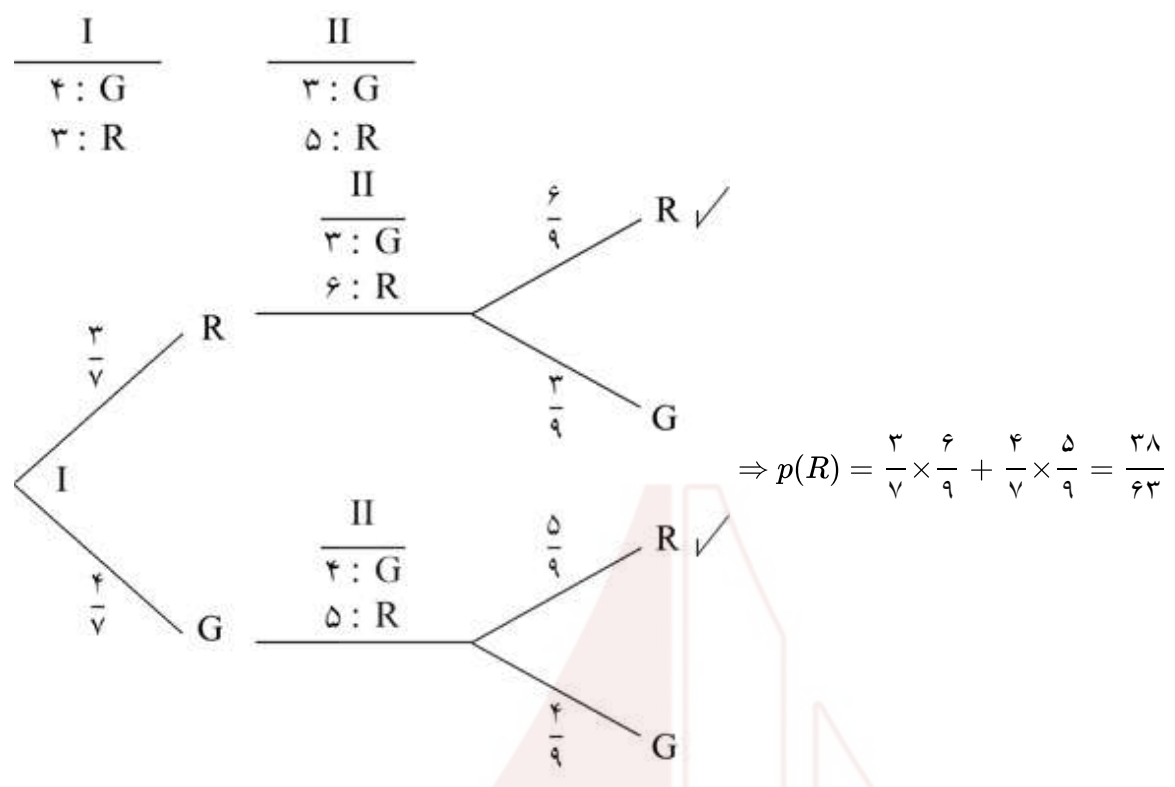


۵۳

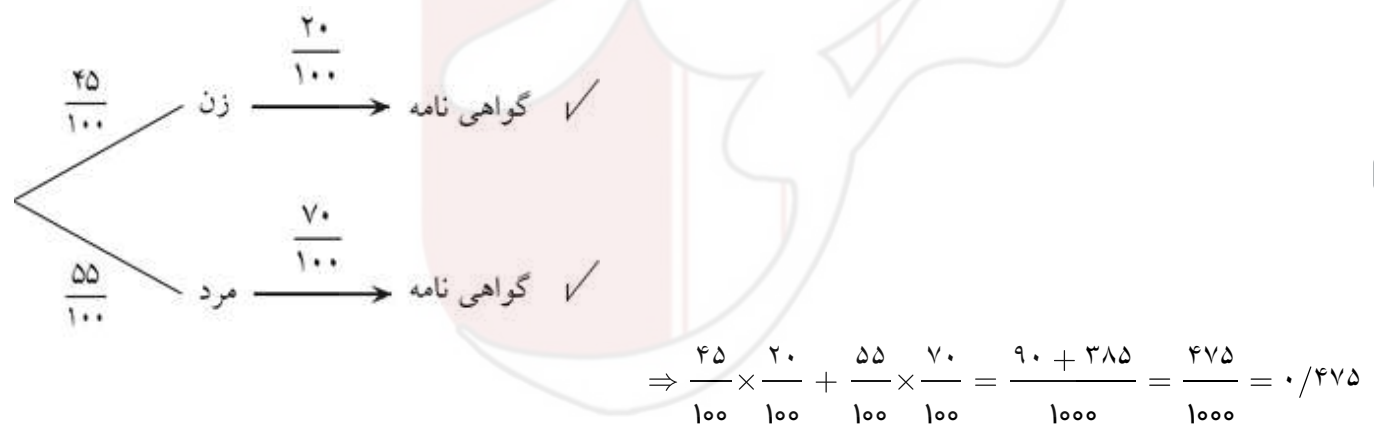
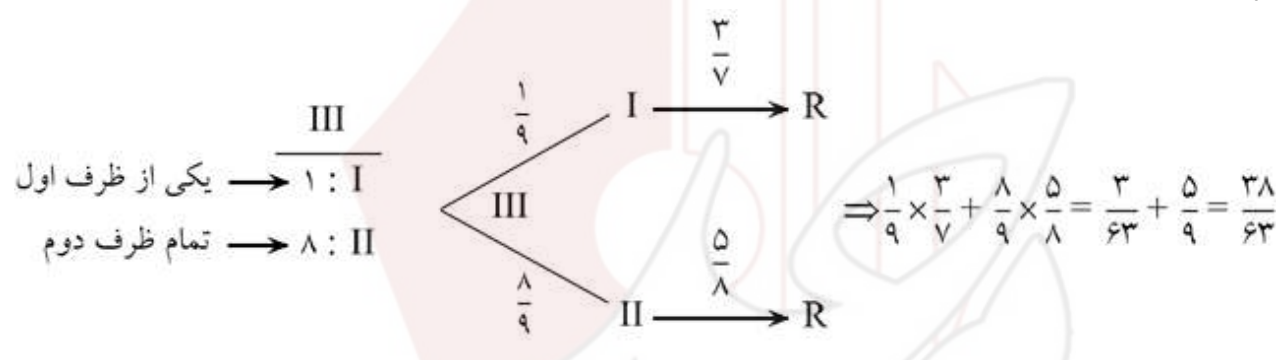
$$p(A|\text{شرکت کننده}) = \frac{p(A \cap \text{شرکت کننده})}{p(\text{شرکت کننده})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{5}{10}}{\frac{3}{4} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{10}} = \frac{15}{23}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{30}{1000} + \frac{4}{1000} = 0.034$$

۵۴



روش دوم:



$$n(A) = \binom{4}{2} = 6 \rightarrow p(A|S_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

الف)  $P(k) = (۲k - ۱)$

$\Rightarrow P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) = ۱x + ۲x + ۵x + ۷x + ۹x = ۱$

$\Rightarrow ۲۵x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲۵}$

$\Rightarrow p(۱) = \frac{۱}{۲۵}, p(۲) = \frac{۳}{۲۵}, p(۳) = \frac{۵}{۲۵}, p(۴) = \frac{۷}{۲۵}, p(۵) = \frac{۹}{۲۵}$

ب)  $\begin{cases} p(۱) + p(۳) + p(۴) = \frac{۱+۵+۷}{۲۵} = \frac{۱۳}{۲۵} \\ p(۲) + p(۵) = \frac{۳+۹}{۲۵} = \frac{۱۲}{۲۵} \end{cases}$  پس اولی بیشتر است.

می‌دانیم:  $p(a) + p(b) + p(c) + p(d) + p(e) = ۱ \Rightarrow \frac{۲}{۷} + \frac{۱۱}{۳۵} + p(e) = ۱ \Rightarrow p(e) = ۱ - \frac{۲۱}{۳۵} = \frac{۱۴}{۳۵} = \frac{۲}{۵}$

$p(A) = p(\{a, b\}) = p(a) + p(b) = \frac{۲}{۷}$

$p(B) = p(\{a, b, c, d\}) = p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = \frac{۳}{۵} \Rightarrow p(c) + p(d) = \frac{۳}{۵} - \frac{۲}{۷} = \frac{۱۱}{۳۵}$

$p(C') = p(\{a, b, e\}') = p(\{d, c\}) = p(c) + p(d) = \frac{۱۱}{۳۵}$

$p(x) = k$

$p(y) = k + \frac{۱}{۴}$

$+ p(z) = k + \frac{۲}{۴}$

$p(x) + p(y) + p(z) = ۳k + \frac{۳}{۴}$

$\Rightarrow ۳k = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{۱}{۱۲} \\ p(y) = \frac{۴}{۱۲} \\ p(z) = \frac{۷}{۱۲} \end{cases}$

می‌دانیم:  $p(۱) + \dots + p(۶) = ۱$

$p(۱) = ۱ \times k, p(۲) = ۲ \times k, \dots, p(۶) = ۶ \times k$

$\Rightarrow k + ۲k + \dots + ۶k = ۱ \Rightarrow ۲۱k = ۱ \Rightarrow k = \frac{۱}{۲۱}$

۴ کمتر از:  $p(۱) + p(۲) + p(۳) = ۶k = \frac{۶}{۲۱} = \frac{۲}{۷}$



قرمز R : ۲۰

سفید W : ۱۰

سبز G : ۱۵

کل : ۴۵

$$n(S) = 45$$

الف)  $n(W) = 10 \Rightarrow P(W) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

ب)  $n(S) = \binom{45}{2} = 45 \times 22 = 990$  انتخاب مهره از مهره ۴۵

قرمز  
 $n(B) = \binom{20}{1} \times \binom{10}{1} = 200 \Rightarrow P(B) = \frac{200}{45 \times 22} = \frac{20}{99}$

زن W : ۵

مرد M : ۶

کل : ۱۱

$$n(S) = \binom{11}{5} = 77 \times 6 = 462$$

انتخاب نفر از نفر ۱۱

الف)  $n(A) = \binom{5}{3} \times \binom{6}{2} = 150$  زن انتخاب کنیم و مرد ۲۳

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{150}{77 \times 6} = 0.32$$

ب)  $n(B) = \binom{5}{5} = 1$  زن انتخاب شوند  $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{77 \times 6} = \frac{1}{462}$

پ)  $n(C) = \underbrace{\binom{6}{4} \times \binom{5}{1}}_{4 \text{ مرد و یک زن}} + \underbrace{\binom{6}{5} \times \binom{5}{0}}_{5 \text{ مرد}} = 75 + 6 = 81 \Rightarrow P(C) = \frac{81}{77 \times 6} = 0.175$

A:  $n(s) = 1000$  عدد مضرب ۳ باشد  $n(A) = \left[ \frac{1000}{3} \right] = 333$

B:  $n(B) = \left[ \frac{1000}{5} \right] = 200$  عدد مضرب ۵ باشد  $n(A \cap B) = \left[ \frac{1000}{15} \right] = 66$

$$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

الف)

$$p(A \cup B) = \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{467}{1000}$$

ب)  $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$

$$p(A - B) = \frac{333}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{267}{1000}$$

$$P(A) = 0/34 \quad P(B) = 0/23 \quad P(A \cup B) = 0/38 \quad (0/25) \quad P(A \cap B) = ?$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (0/25)$$

$$0/38 = 0/34 + 0/23 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0/34 + 0/23 - 0/38 \quad (0/25)$$

$$P(A \cap B) = 0/57 - 0/38 \quad (0/25)$$

$$P(A \cap B) = 0/19 \quad (0/25)$$

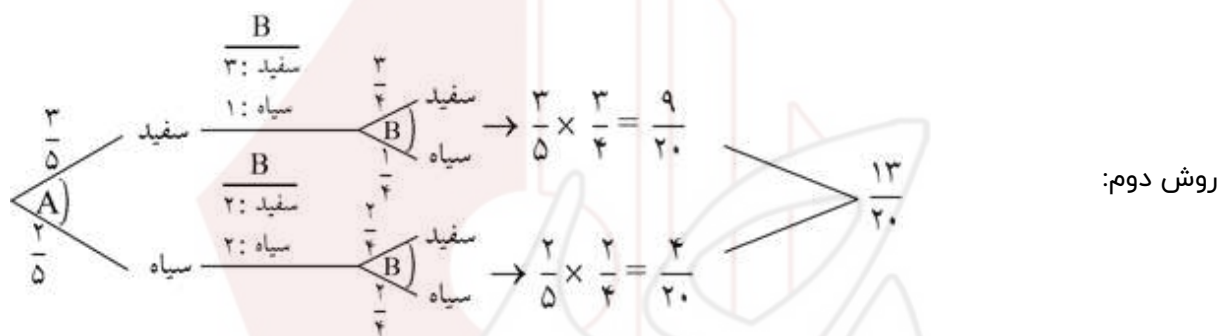
این احتمال را در دو حالت محاسبه می‌کنیم.  
حالت (I) مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سفید:

$$P(W_1 \cap W_2) = P(W_1) \times P(W_2 | W_1) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

حالت (II) مهره‌ی اول سیاه و مهره‌ی دوم سفید:

$$P(B_1 \cap W_2) = P(B_1) \times P(W_2 | B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{20}$$

$$P(x) = \frac{9}{20} + \frac{4}{20} = \frac{13}{20}$$



روش دوم:

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۴, ۵, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۵, ۱۷, ۱۹

الف) چون تعداد داده‌ها فرد است، داده وسط میانه است.

ب)  $19 - 4 = 15$  = دامنه تغییرات  $\Rightarrow$  کوچکترین داده - بزرگترین داده = دامنه تغییرات

ج) مد: تکرار عدد ۱۲ بیشتر از سایر داده‌هاست.  $مد = 12$

باید از فرمول میانگین موزون استفاده کنیم.

$$\bar{x}_w = \frac{16 \times 4 + 13 \times 3 + 15 \times 2 + 17 \times 4}{4 + 3 + 2 + 4} = \frac{64 + 39 + 30 + 68}{13} = \frac{201}{13} = 15/46$$

الف) ۱۷ (ابتدای جعبه چارک اول است).

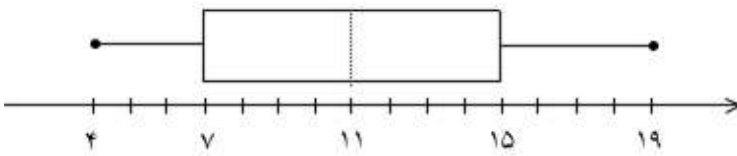
ب) ۳۳ (انتهای جعبه چارک سوم است).

پ) ۲۳ (میان‌بانه با نقطه‌چین درون جعبه مشخص می‌شود).

ت) زیرا داده‌ها در این قسمت متراکم‌تر هستند.

۷۴ ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

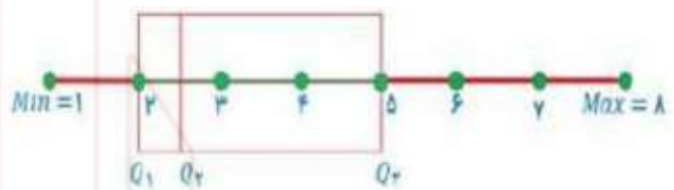
۴, ۵, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۵, ۱۷, ۱۹  
 کمترین  $\overline{Q_1}$  میانه  $\overline{Q_3}$  بیشترین  
 داده داده



۷۵ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۵, ۵, ۶, ۷, ۷, ۸

$$\min = 1, \max = 8, Q_1 = 2, Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2.5, Q_3 = 5$$



۷۶ ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

$$7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 36 \Rightarrow \begin{cases} Q_2 = 9, Q_1 = \frac{7+8}{2} = 7.5, Q_3 = \frac{10+10}{2} = 10 \\ \bar{x} = \frac{7+7+8+8+9+9+10+10+36}{9} \\ \frac{94}{9} \approx 10.44 \end{cases}$$

با توجه به این‌که به غیر از داده‌ی پرت ۳۶، بقیه داده‌ها هر کدام دو بار تکرار شده‌اند، این داده‌ها مد ندارند. همچنین از آن‌جا که در داده‌ها، داده پرت ۳۶ وجود دارد، میانگین معیار خوبی برای شاخص گرایش به مرکز نمی‌باشد، بنابراین میانه به عنوان معیار مناسب در این داده‌ها می‌باشد.



$$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} \Rightarrow r = \frac{\sigma}{\delta} \Rightarrow \sigma = 15 \Rightarrow \sigma^2 = 225$$

ب) مجموع ۱۰ داده‌ی اولیه را حساب می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow \delta = \frac{x_1 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow x_1 + \dots + x_{10} = 50$$

حال با دو داده‌ی ۵ محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{X}' = \frac{x_1 + \dots + x_{10} + 5 + 5}{12} \Rightarrow \bar{X}' = \frac{50 + 5 + 5}{12} = 5$$

حال رابطه‌ی انحراف معیار را برای ۱۰ داده‌ی اولیه می‌نویسیم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{10} - \bar{X})^2}{10}} \Rightarrow 15 = \sqrt{\frac{(x_1 - 5)^2 + \dots + (x_{10} - 5)^2}{10}}$$

$$\frac{(x_1 - 5)^2 + \dots + (x_{10} - 5)^2}{10} = 225 \Rightarrow (x_1 - 5)^2 + \dots + (x_{10} - 5)^2 = 2250$$

رابطه‌ی انحراف معیار را برای ۱۲ داده‌ی جدید می‌نویسیم:

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X}')^2 + \dots + (x_{10} - \bar{X}')^2 + (5 - \bar{X}')^2 + (5 - \bar{X}')^2}{12}}$$

$$\Rightarrow \sigma' = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X}')^2 + \dots + (x_{10} - \bar{X}')^2 + 0 + 0}{12}}$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{2250}{12}} = \sqrt{187.5}$$

رابطه‌ی ضریب تغییرات را می‌نویسیم:

$$CV' = \frac{\sigma'}{\bar{X}'} = \frac{\sqrt{187.5}}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{32 + 59 + 26 + 53 + 74 + 17 + 45 + 23 + 64 + 50 + 63}{11} = \frac{506}{11} = 46$$

$$\sigma^2 = \frac{(32 - 46)^2 + (59 - 46)^2 + \dots + (63 - 46)^2}{11}$$

$$= \frac{196 + 169 + 400 + 49 + 784 + 841 + 1 + 529 + 324 + 16 + 289}{11} = \frac{3598}{11} = 327$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 327 / 0.9 \Rightarrow \sigma = 18 / 0.8 \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{18 / 0.8}{46} = 0.39$$

$$\bar{x} = \frac{38 \times 2 + 39 \times 2 + 40 \times 2 + 41 \times 2}{8} = \frac{76 + 78 + 80 + 82}{8} = \frac{316}{8} = 39.5$$

۷۹

$$\delta^2 = \frac{(38 - 39.5)^2 \times 2 + (39 - 39.5)^2 \times 2 + (40 - 39.5)^2 \times 2 + (41 - 39.5)^2 \times 2}{8}$$

$$= \frac{4/5 + 0/5 + 0/5 + 4/5}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{5}}{2} \cong \frac{2.2}{2} = 1.1$$

$$\bar{x} = \frac{38 + 38/4 + 39 + 39/4 + 39/8 + 40/2 + 40/9 + 41/2}{8} = \frac{317/9}{8} \cong 39/7$$

۸۰

$$\delta^2 = \frac{(1/7)^2 + (1/3)^2 + (0/3)^2 + (0/1)^2 + (0/5)^2 + (1/2)^2 + (1/5)^2}{8}$$

$$= \frac{2/49 + 1/9 + 0/9 + 0/1 + 0/25 + 1/44 + 2/25}{8} = \frac{8/62}{8} = 1/7 \Rightarrow \delta = 1/7$$

۸۱ میانگین را کاهش می‌دهد ولی برای انحراف معیار ممکن است سبب کاهش، افزایش شود یا حتی ممکن است انحراف معیار ثابت باشد.

۸۲ بله

۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۷, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۹, ۱۹

۸۳ ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

$$Q_2 = 7 \Rightarrow Q_1 = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ و } Q_3 = \frac{11+13}{2} = 12$$

بنابراین داده‌ها بین ۴ و ۱۲ برابر است با:

$$5, 7, 7, 7, 8, 10, 11 \Rightarrow \bar{x} = \frac{55}{7} = 7.85$$

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

۸۴

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 2)^2 + (3 - 2)^2}{6}$$

$$= \frac{1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

با آماره واریانس و انحراف معیار نمونه‌ی تصادفی از یک جامعه

الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، طول فاصله‌ی اطمینان کاهش می‌یابد. زیرا دقت برآورد افزایش می‌یابد.

ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان افزایش می‌یابد. زیرا دقت برآورد کاهش می‌یابد.

$$\bar{x} = 22 \Rightarrow \bar{x} - 2\sigma \leq M \leq \bar{x} + 2\sigma$$

$$\sigma = 1/9 \Rightarrow 22 - 2/9 \leq M \leq 22 + 2/9$$

$$2\sigma = 2/9 \Rightarrow 20/9 \leq M \leq 22/9$$

نمونه	۲	۳	۵ و ۵	۷	۸	۹ و ۹	۱۱	۱۲
$\bar{x}$	۲	۳	۵	۷	۸	۹	۱۱	۱۲
احتمال	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

به کمک تابع Rand در ماشین‌حساب در هر سه حالت می‌توان عددی تصادفی انتخاب کرد. به این صورت که یک عدد بین ۰ و ۱ در نظر می‌گیریم و آن را در ۹ ضرب کرده و سپس گرد می‌کنیم تا عددی بین ۰ تا ۹ به صورت تصادفی انتخاب شود. حال اگر عددی که بین ۰ تا ۱ انتخاب کردیم را در ۹۹ ضرب کنیم می‌توان عددی بین ۰ تا ۹۹ به دست آورد و برای فهرست هزارتایی نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

الف) خوشه‌ای  
ب) تصادفی  
پ) سیستماتیک

الف) افرادی که نیستند انتخاب نمی‌شوند.  
ب) انتخاب براساس سلیفه صورت می‌گیرد.  
پ) افرادی که ایمیل ندارند انتخاب نمی‌شوند.  
ت) افرادی که تلفن ندارند انتخاب نمی‌شوند.  
ث) فقط افرادی که مایل به پاسخگویی هستند انتخاب می‌شوند.

- ۹۳  پرسش‌نامه، هر مشتری با آرامش پرسش‌نامه را تکمیل می‌کند.  
 دادگان، دانش‌آموزان در هنگام ثبت‌نام اطلاعات خود را به دبیرستان داده‌اند.  
 مشاهده، صرفاً با مشاهده می‌توان به این اطلاعات دست یافت.

۹۴ الف) وعده غذایی - کیفی

ب) مصاحبه

پ) ۱۲۶۱ مشتری - پارامتر جامعه می‌تواند میانگین تعداد غذای سفارشی برای نهار در یک ماه باشد و آماره می‌تواند میانگین تعداد سفارش هر هفته باشد.

۹۵ پارامتر جامعه مانند میانگین و انحراف معیار ثابت است.

ولی از نمونه‌ای به نمونه‌ای دیگر آماره‌ها قابل تغییر هستند.

۹۶ پارامتر کمیته است که مشخصه‌ای معین را در مورد کل جامعه شرح می‌دهد. اما آماره کمیته است که به عنوان برآورد پارامتر استفاده می‌شود و از یک نمونه به دست می‌آید.

۹۷ داده‌ها واقعیت‌هایی هستند که به عنوان مرجع و به صورت خام برای محاسبه و استنباط ما از یک چیز به کار می‌رود و متغیر کمیته است که می‌تواند از عضوی به عضو دیگر متفاوت باشد و مقادیر مختلفی به آن اطلاق می‌شود. در واقع متغیر ویژگی‌هایی از چیزی (شی یا شخص) است که داده‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۹۸ الف) بله - زیرا واحدهای آماری هم‌شانس هستند.

ب) بله - بله

$$p = \frac{m}{n} = \frac{84}{100} = 0.84 \Rightarrow \left( p - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = (0.827, 0.913)$$

$$\text{فاصله اطمینان} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.147 = 14.7\%$$

- ۱۰۰ ۱- میانگین و انحراف معیار K برابر و واریانس مربع K برابر می‌شود. ضریب تغییرات ثابت است.  
 ۲- میانگین هم همان تغییر را می‌کند و بسته به مقدار K انحراف معیار افزایش یا کاهش دارد.

