جمهوری اسلامی ایران

وزرات آموزش و پرورش

اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران

دبیرستان غیردولتی پسرانهٔ موحد

منطقه ۵ شهر تهران

پایه : دوازدهم رشته : ریاضی	**نمونه سوالات** **نام درس :** هندسه ۳	نام استاد : آقای امین پناه

۱) اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه‌ی $A^۳ = \mathrm{m}A + \mathrm{n}I_۲$ برقرار باشد. ($I_۲$ ماتریس همانی است.)

۲) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a} \, . \, \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$، در این صورت زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

۳) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آنها یک .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

۴) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک .... می‌شود.

۵) درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل‌مشترک حاصل یک بیضی خواهد بود.

۶) جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
الف) اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۸ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مقدار a برابر .... است.
ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن‌را یک ماتریس .... می‌نامیم.
پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در .... بیضی است.
ت) هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از .... خواهد گذشت.

۷) درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) در حالت کلی حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.
ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۲$ باشد آن‌گاه $|۲A| = ۱۶$ است.
پ) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره $C'(O,۲r)$ است.
ت) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود.

۸ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با ....

۹ سه بردار $\overrightarrow{a} = (۲, ۳, ۱)$ و $\overrightarrow{b} = (-۱, ۱, ۰)$ و $\overrightarrow{c} = (۲, ۱, -۲)$ مفروض‌اند.

الف) برداری عمود بر دو بردار $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

۱۰ وضعیت خط $x + y = ۳$ را نسبت به دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ مشخص کنید.

۱۱ دایره‌ی (c) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایره‌ی (c) تعیین کنید که از خط Δ به فاصله‌ی معلوم L باشد، مسئله چند جواب دارد؟

۱۲ به کمک استدلال استقرایی، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از خط d را حدس بزنید.

۱۳ خط d و نقطه‌ی A غیرواقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد. با توجه به اندازه‌ی R روی تعداد جواب‌های مسأله بحث کنید.

۱۴ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$، مطلوب‌است محاسبه‌ی ماتریس $A^{۱۰}$.

۱۵ اگر دو بردار a و b هم اندازه باشند و $|a - b| = ۲\sqrt{۳}$ و $|a + b| = ۶$ زاویه‌ی بین دو بردار a و b را به‌دست آورید.

۱۶ اگر $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد. حاصل $(۲\mathrm{AB})^{-۱}$ را بیابید.

۱۷ سه نقطه‌ی $A(۲, ۱, -۱)$ و $B(۱, ۰, -۲)$ و $C(۳, ۱, ۱)$ مفروضند. مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

۱۸ بردارهای $a = (۱, -۱, ۰)$ و $b = (۰, ۱, ۲)$ مفروضند. تصویر بردار $a + b$ را بر امتداد بردار b تعیین کنید.

۱۹ درصورتی‌که $|a| = |b| = ۲$ و زاویه‌ی بین دو بردار b و a برابر ۶۰° باشد، مساحت متوازی‌الاضلاعی را که توسط دو بردار $a + ۲\mathrm{b}$ و $b - a$ ساخته می‌شود را پیدا کنید.

۲۰ فرض کنید a و b دو بردار دل‌خواه باشند، ثابت کنید:

$$|a. b| \leqslant |a|\,|b|$$

۲۱ اگر $a = (۲, ۱, ۲)$ و $|b| = ۲$، زاویه‌ی بین a و b برابر $\frac{\pi}{۶}$ باشد، حاصل $(۲\mathrm{a} - ۳\mathrm{b}).(a - b)$ را تعیین کنید.

۲۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی $(۲, ۴)$، $\sqrt{۲}$ برابر فاصله‌ی آن‌ها از نقطه ی $(۱, ۲)$ باشد را مشخص کنید.

۲۳ نقاط $A=(۱,۲,۱)$ و $B=(۳,۱,۴)$ و $C=(۱,۵,۲)$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه‌ی AM را پیدا کنید.

۲۴ فرض کنید a و b دو بردار دل‌خواه باشند، ثابت کنید: $|a+b|^{۲}+|a-b|^{۲}=۲(|\mathrm{a}|^{۲}+|\mathrm{b}|^{۲})$

۲۵ دترمینان مقابل را با روش ساروس محاسبه کنید:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{vmatrix}$$

۲۶ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع 'd , d به یک فاصله‌اند. نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد.

ب) صفحه‌ای با مولد سطح مخروط دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی‌کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.

پ) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم $A^{۲}$ برابر ۵ می‌باشد.

ت) اگر $A^{۲}=A$ باشد، در این صورت داریم: $(A+I)^{۲}=I+۳A$

۲۷ اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد حاصل $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید.

۲۸ دستگاه $\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$ به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.

۲۹ معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $B(-۲,۱), A(۴,-۱)$ دو سر قطری از آن باشد.

۳۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\left|A^{۳}\right|$ را محاسبه کنید.

۳۱ مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} \mathrm{mx}+۳\mathrm{y}=-۳ \\ ۴\mathrm{x}+(m+۴)\,y=۲ \end{cases}$ جواب <u>نداشته باشد</u>.

۳۲ اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{۳}{۵}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، <u>طول قطر بزرگ بیضی</u> و <u>فاصله کانونی</u> آن را به دست آورید.

۳۳ سهمی $y^{۲}-۲\mathrm{y}+۸\mathrm{x}+۹=۰$ مفروض است.

الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به‌دست آورید.

ب) نمودار آن را رسم کنید.

۳۴ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $A=(۲,۳,۴)$ بگذرد و با صفحه xoy موازی باشد.

ب) معادلات $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟

پ) در فضای $R^۳$، نقطه A به طول ۲ روی محور طولها و نقطه $B=(-۴,۶,-۳)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.

۳۵ اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد:

الف) حاصل ماتریس $A\times B$ را به دست آورید.

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید.

۳۶ اگر نقطه $A(۲,۳)$ رأس سهمی و $y=۷$ معادله خط هادی سهمی باشد.

الف) معادله سهمی را بنویسید.

ب) مختصات کانون سهمی را به دست آورید.

۳۷ نقاط $A(۳,۱,۲)$ و $B(۳,-۲,۲)$ در $R^۳$ مفروض‌اند:

الف) طول پاره‌خط AB را به دست آورید.

ب) معادلات مربوط به پاره‌خط AB را بنویسید.

۳۸ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس BA را به دست آورید.

۳۹ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۷$ را به دست آورید.

۴۰ اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^۲-B=\overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است)

۴۱ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,-۲)$ بوده و بر دایره به معادله $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۴$ مماس خارج باشد.

۴۲ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

اگر $\overrightarrow{i}$ ، $\overrightarrow{j}$ و $\overrightarrow{k}$ بردارهای یکه در فضای $R^۳$ باشند، حاصل $\overrightarrow{k}\,.\,(\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j})$ برابر است با ....

۴۳ الف) حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx+۳y=۱ \\ ۲x-y=۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصر به فرد باشد.

ب) جواب دستگاه مذکور را به ازای $m=۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

۴۴ معادله‌ی ماتریسی $[x\ \ ۳]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$ را حل کنید.

۴۵ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A|+\left|B^2\right|$ را بیابید.

۴۶ مختصات کانون، رأس و معادله‌های خط هادی سهمی به معادله $y^2-6y+16x+25=0$ را تعیین کنید.

۴۷ به ازای چه مقداری از m دستگاه معادله $\begin{cases} x-2y=3 \\ \mathrm{mx}+6y=-4 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

۴۸ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$، مرکز آن $(-4,-1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.

۴۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....
ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی l عمود نباشد و با مولد آن d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک .... خواهد بود.
پ) رأس سهمی به معادله $y^2+2x-2y=0$ نقطه به مختصات .... است.
ت) حاصل‌ضرب خارجی دو برابر غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم موازی هستند، برابر بردار .... است.

۵۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.

۵۱ وضعیت دو دایره $(x-1)^2+y^2=1$ و $x^2+(y-1)^2=1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۵۲ دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند اگر $\mathrm{AF}'=\mathrm{BF}$ باشد ثابت کنید دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند.

۵۳ نقاط $A=(1,2,1)$ و $B=(2,2,1)$ و $C=(3,2,-1)$ را در فضا درنظر می‌گیریم، کدام‌ها روی خط $\begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

۵۴ اگر $2A=\begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $\left|A^{-1}\right|$ را بیابید.

۵۵ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به‌ترتیب با طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$، مقدار عددی عبارت $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ را به دست آورید.

۵۶ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطراصلی آن صفر باشند را ماتریس .... گویند.
ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی .... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.
پ) در حالتی که $\frac{c}{a} = ۱$ بیضی به یک .... تبدیل می‌شود.
ت) بردار $\vec{a} = ۲\vec{j} - \vec{k}$ در فضا سه بعدی بر صفحه‌ی مختصات سه بعدی .... منطبق است.
$(\text{xoz}, \text{yoz}, \text{xoy})$

۵۷ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند آن‌گاه عبارت $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲\text{AB} + B^۲$ همواره برقرار است.
ب) اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.
پ) نقطه $(۳, -۲)$ روی دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۰$ قرار دارد.
ت) برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در $R^۳$، داریم: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

۵۸ اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

۵۹ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x + \text{my} = ۱ \\ (m-۱)x + y = ۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۶۰ نقطه A به طول ۲ روی محور xها و نقطه B روی صفحه xoz به طول۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه‌بعدی مفروض‌اند.
الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.
ب) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.
پ) مختصات وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

۶۱ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲۶$ و اندازه ضرب خارجی $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$ مفروض‌اند. اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کم‌تر از ۹۰° باشد مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.

۶۲ مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۳)$ و $\vec{b} = (۰, m, -۱)$ و $\vec{c} = (۱, -۲, ۳)$ در یک صفحه باشند.

۶۳ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند آن‌گاه: $|\text{AB}| = |A|\,|B|$
ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.
پ) در حالتی‌که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.
ت) نقطه با مختصات $(-۴, ۳, -۲)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.

۶۴ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون .... نامیده می‌شود.
ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی .... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.
پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در .... بیضی است.
ت) اگر برای دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ داشته باشیم: $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$، در این صورت زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ برابر .... است.

۶۵ در نقطه $A(۲,۳)$ روی دایره به معادله $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

۶۶ بردارهای $\overrightarrow{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\overrightarrow{b}=(۱,-۱,۰)$ را درنظر بگیرید.
الف) زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ را به دست آورید.
ب) برداری عمود بر دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ پیدا کنید.

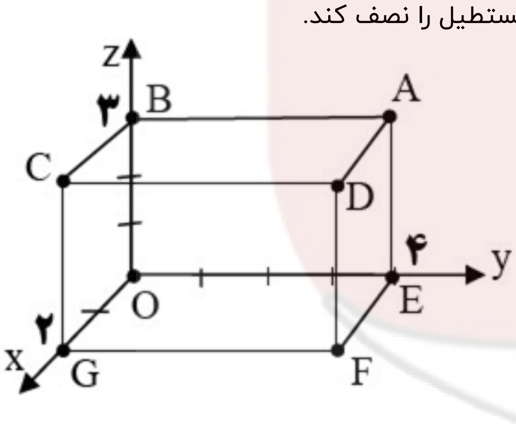
۶۷ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴,-۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.
الف) فاصله کانونی را محاسبه کنید.
ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید.

۶۸ دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۶۹ نقاط A,B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۷۰ الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادلهٔ $y^۲-۲y-۸x+۹=۰$ را بیابید.
ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

۷۱ با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.
الف) نام وجهی از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.
$x=۲, ۰\leq y\leq ۴, ۰\leq z\leq ۳$
ب) معادلات مربوط به پاره‌خط (یال) AD را بنویسید.
پ) مختصات نقطه D را بنویسید.
ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.



۷۲ سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (0, 2, 1)$ درنظر بگیرید:

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد $\mathrm{Cos}\,\theta$ را بیابید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید.

۷۳ اگر $A = (2, -1, 3)$ و $B = (3, 1, 4)$ و $C = (-1, 1, 0)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۷۴ برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

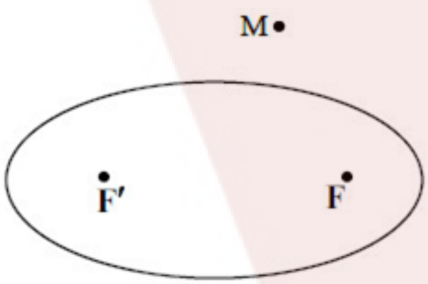
۷۵ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A - 2I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

۷۶ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

۷۷ حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 4x + 6y + a = 0$ معادله یک دایره باشد.

۷۸ وضعیت خط $x + y = 1$ و دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۷۹ اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه M از کانونهای F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است.



۸۰ الف) معادله سهمی را بنویسید که $A(2, 3)$ رأس آن بوده و معادله خط هادی آن $x = 3$ باشد.

ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.

پ) مختصات نقطه برخورد سهمی با محور طولها را حساب کنید.

۸۱ در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$، معادله محور .... است.

۸۲ مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a} = (2, m, -1)$ و $\vec{b} = (m + 1, 3, 2)$ بر هم عمود باشند.

۸۳ حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a} = (1, 0, -1)$ و $\vec{b} = (0, 2, 2)$ و $\vec{c} = (2, -3, 0)$ تولید می‌شود.

۸۴ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&6&2\\1&-1&2\end{bmatrix}$، حاصل $\left|-\frac{1}{2}A^4\right|$ را به دست آورید.

۸۵ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(-3,2)$ مختصات کانون و معادله خط هادی آن $x=1$ باشد.

۸۶ معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور zها در نقطه به مختصات $A=(0,0,3)$ عمود باشد، به صورت .... است.

۸۷ سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(0,2,1)$ را درنظر بگیرید:

الف) طول بردار $2\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}+\vec{c}$ ایجاد می‌شود را به دست آورید.

۸۸ اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&1&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\3&3&1\end{bmatrix}$، حاصل $A^2+\mathrm{AB}$ را به‌دست آورید.

۸۹ اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}\,.\,\vec{b}=12$ باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

۹۰ وضعیت دو دایره به معادلات $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2\mathrm{x}+4\mathrm{y}+1=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

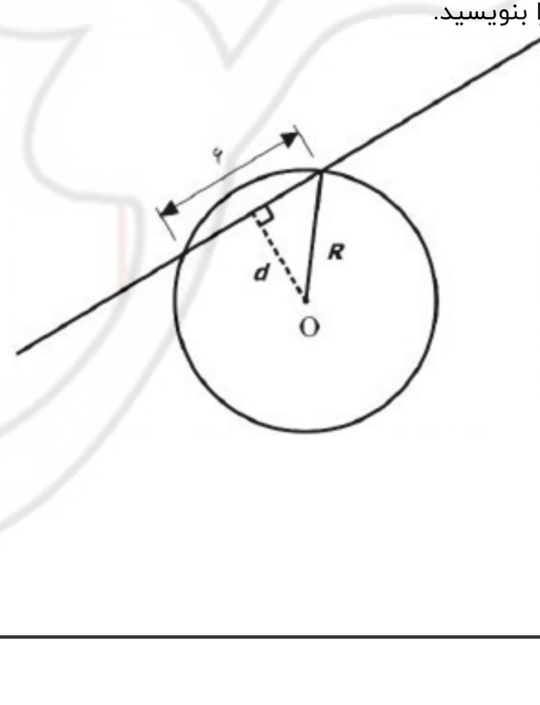
۹۱ سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادله دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۹۲ کانون‌های یک بیضی نقاط $(1,3)$ و $(1,-5)$ است.

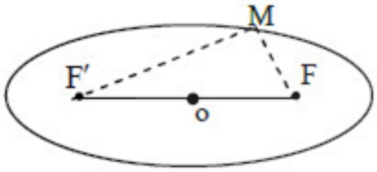
الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a=6$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است.)

۹۳ مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.



۹۴ نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.
الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.
ب) طول MF را به دست آورید.
(F, F' کانون‌های بیضی هستند و $\mathrm{MF} < \mathrm{MF}'$).



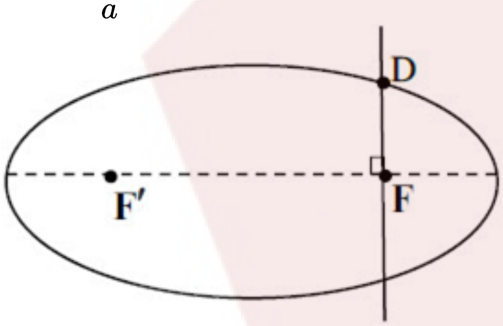
۹۵ در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

۹۶ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(۰, ۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x + y = ۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

۹۷ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۲, -۱)$ مرکز آن بوده و از خط $۳x - ۴y + ۱۰ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا کند.

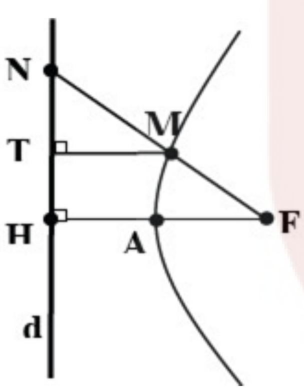
۹۸ بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه D قطع کند، ثابت کنید:

$$\mathrm{DF} = \frac{b^۲}{a}$$



۹۹ ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

۱۰۰ در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.
ثابت کنید: $\frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{FA}} = \frac{۲\,\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}}$



۱
$$\left.\begin{array}{l} A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۴\\ ۲ & ۹\end{bmatrix} \\ \mathrm{mA}+\mathrm{nI}=\begin{bmatrix}۰ & ۴\mathrm{m}\\ ۲\mathrm{m} & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & ۰\\ ۰ & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & ۴\mathrm{m}\\ ۲\mathrm{m} & m+n\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow n=۸, m=۱$$

۲ صفر

۳ ویژگی مشترک (۰/۲۵)

۴ دایره (۰/۲۵)

۵ درست (۰/۲۵)

۶ الف) ۶- ب) اسکالر پ) بیرون ت) کانون سهمی

۷ الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) نادرست

۸ ۳۰-

۹ الف) برداری عمود بر دو بردار $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ برابر است با:

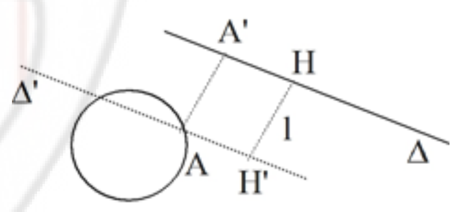
$$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}=(۱,۴,۱)\times(۲,۱,-۲)=(-۹,۴,-۷)$$

ب) حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ برابر است با:

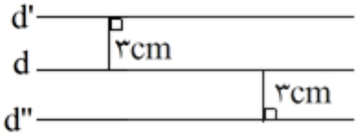
$$\left|(\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}))\right|=(۲,۳,۱)\times(-۲,-۲,-۳)=-۱۳$$

۱۰
$$o(۱,۰), r=۲$$
$$d=\frac{|۱(۱)+۱(۰)-۳|}{\sqrt{۱^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}<۲\Rightarrow \text{متقاطعند}$$

۱۱ از نقطه‌ی دلخواه H روی خط Δ عمود HH' را به طول L خارج می‌کنیم از نقطه‌ی H' خطی موازی Δ رسم می‌کنیم و آن را Δ' می‌نامیم محل تلاقی Δ' با دایره جواب مسئله است زیرا فاصله‌ی دو خط موازی همواره مقداری ثابت است.
اگر Δ' دایره را در ۲ نقطه قطع کند مسئله دارای ۲ جواب است. اگر Δ' با دایره مماس باشد مسئله دارای یک جواب است. اگر Δ' دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد و بالاخره اگر Δ دایره را قطع کند Δ' در بالا Δ' پائین خط Δ به فاصله‌ی L رسم می‌شود. دراین حالت مسئله می‌تواند دارای ۴ یا ۳ جواب یا ۲ جواب یا ۱ جواب باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد.



۱۲ مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از خط d در صفحه باشد دو خط d و d' هستند که موازی خط d یکی بالای خط و دیگری پائین خط d هستند و فاصله‌ی هر کدام از آنها از خط d برابر ۳ سانتی‌متر است.

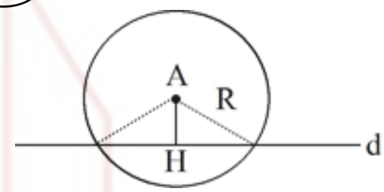


۱۳ دایره‌ای به شعاع R و به مرکز A را رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با خط d جواب مسأله است. ۰/۲۵

$\mathrm{AH} > R$ مسأله جواب ندارد. ۰/۲۵

$\mathrm{AH} = R$ مسأله یک جواب دارد. ۰/۲۵

$\mathrm{AH} < R$ مسأله دو جواب دارد. ۰/۲۵



۱۴
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\mathrm{I} \Rightarrow A^{10} = 2^{10} I = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

۱۵
$$|a| = |b|$$
$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2(a.b) = 36 \qquad |a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2(a.b) = 12$$
$|a+b|^2 - |a-b|^2 = 4(a.b) = 24$ و $2|a|^2 = 24 \to |a|^2 = 12$
$$\Rightarrow (a.b) = 6 \Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{a.b}{|a|\,|b|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

۱۶
$$(2\mathrm{AB})^{-1} = \frac{1}{2} B^{-1} A^{-1}$$
$$B^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$
$$(2\mathrm{AB})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{7}{2} \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۷
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,-1,-1)$ و $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,0,2)$
$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \frac{1}{2}|(-2,1,1)| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

۱۸
$$u = (a+b) = (1,0,2)$$
$$u' = \frac{u.b}{b.b} b = \frac{4}{5}(0,1,2) = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

۱۹ $S = \frac{۱}{۲}|(a+۲\mathrm{b})\times(b-a)| = \frac{۱}{۲}|a\times b - ۲\mathrm{b}\times a| = \frac{۳}{۲}|a\times b|$

$= \frac{۳}{۲}\times ۲\times ۲\times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$

۳۰ $|\mathrm{Cos}\,\theta| \leqslant ۱ \Rightarrow |\mathrm{a}||\mathrm{b}|\,|\mathrm{Cos}\,\theta| \leqslant |\mathrm{a}||\mathrm{b}| \Rightarrow |a.\,b| \leqslant |a|\,|b|$

۳۱ $(۲\mathrm{a}-۳\mathrm{b}).\,(a-b) = ۲|\mathrm{a}|^{۲} - ۲\mathrm{a}.\,b - ۳\mathrm{b}.\,a + ۳|\mathrm{b}|^{۲} = ۲|\mathrm{a}|^{۲} - ۵\mathrm{a}.\,b + ۳|\mathrm{b}|^{۲}$

$۲(\sqrt{۹})^{۲} - ۵\left(\sqrt{۹}\times ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + ۳(۲)^{۲} = ۱۸ - ۱۵\sqrt{۳} + ۱۲ = ۳۰ - ۱۵\sqrt{۳}$

۳۲ فرض کنیم $M(x,y)$ عضو مکان فوق باشد.

$\mathrm{MA} = \sqrt{۲}\mathrm{MB} \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^{۲}+(y-۴)^{۲}} = \sqrt{۲}\sqrt{(x-۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}}$

$\Rightarrow x^{۲}+۴-۴\mathrm{x}+y^{۲}+۱۶-۸\mathrm{y} = ۲(x^{۲}+۱-۲\mathrm{x}+y^{۲}+۴-۴\mathrm{y}) \Rightarrow x^{۲}+y^{۲} = ۱۰$

۳۳ $M = \left(\frac{X_B+X_C}{۲}, \frac{y_B+y_C}{۲}, \frac{z_B+z_C}{۲}\right) = \left(\frac{۱+۳}{۲}, \frac{۵+۱}{۲}, \frac{۲+۴}{۲}\right) = (۲,۳,۳)$

$|\mathrm{AM}| = \sqrt{(x_M-x_A)^{۲}+(y_M-y_A)^{۲}+(z_M-z_A)^{۲}}$

$= \sqrt{(۲-۱)^{۲}+(۳-۲)^{۲}+(۳-۱)^{۲}} = \sqrt{۶}$

۳۴ $|a+b|^{۲}+|a-b|^{۲} = (a+b).\,(a+b)+(a-b).\,(a-b)$

$= a.\,a+۲\mathrm{a}.\,b+b.\,b+a.\,a-۲\mathrm{a}.\,b+b.\,b = ۲\mathrm{a}.\,a+۲\mathrm{b}.\,b = ۲(|\mathrm{a}|^{۲}+|\mathrm{b}|^{۲})$

۳۵ $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{vmatrix}$

$= (۱\times ۲\times ۵ + ۳\times ۱\times ۳ + ۱\times ۱\times ۴) - (۱\times ۲\times ۳ + ۳\times ۱\times ۵ + ۱\times ۱\times ۴) = -۲$

۳۶ الف) درست (۰/۵) ب) نادرست (۰/۵) پ) نادرست (۰/۵) ت) درست (۰/۵)

۳۷ $\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \xrightarrow{۰/۲۵} \begin{bmatrix} ۴x+۳y & ۳x+۴y \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ۴\mathrm{x}+۶ & ۴\mathrm{y}-۳ \\ ۳\mathrm{x}+۸ & ۳\mathrm{y}-۴ \end{bmatrix}$ (۰/۵)

$۳x+۸ = ۵ \rightarrow x = -۱$ (۰/۲۵) , $۳y-۴ = ۲ \rightarrow y = ۲$ (۰/۲۵)

$[-۱ \;\; ۲ \;\; -۲]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = -۲+۴-۲ = ۰$ (۰/۲۵)

۳۸ $\begin{vmatrix} m-۳ & ۳ \\ ۴ & m+۱ \end{vmatrix} \neq ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} (m-۳)(m+۱)-۱۲ \neq ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} m \neq ۵, m \neq -۳$ (۰/۲۵)

$m \in \mathrm{R} - \{۵,-۳\}$ (۰/۲۵)

۲۹
$O\left(\frac{۴-۲}{۲}, \frac{-۱+۱}{۲}\right) = (۱,۰)\ (۰/۵)\ , |AB| = \sqrt{۶^۲+۲^۲} = ۲\sqrt{۱۰} \xrightarrow{۰/۲۵}$

$r = \sqrt{۱۰}\,(۰/۲۵)$

$(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱۰\ (۰/۵)$

۳۰
$|A| = ۲(۴-۳) = ۲ \xrightarrow{(۰/۵)} \underbrace{|A^۳| = |A|^۳}_{(۰/۲۵)} = ۸\ (۰/۲۵)$

۳۱
$\frac{m}{۴} = \frac{۳}{m+۴} \neq \frac{-۳}{۲} \xrightarrow{(۰/۵)} m(m+۴) - ۱۲ = ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} \begin{cases} m = -۶(۰/۲۵) & \text{غیرقابل قبول} \\ m = ۲(۰/۲۵) & \text{قابل قبول} \end{cases}$

۳۲
$\underset{(۰/۲۵)}{\frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} \to c = \frac{۳}{۵}a}\ , \underbrace{b = ۸}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} \underset{(۰/۲۵)}{a^۲ = ۶۴ + \frac{۹}{۲۵}a^۲} \to a = ۱۰\ , c = ۶\ (۰/۵)$

طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله کانونی ۱۲ (۰/۲۵)

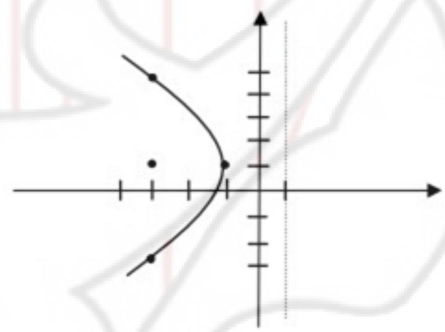
۳۳ الف)

$(y-۱)^۲ = -۸(x+۱)(۰/۲۵) \to A(-۱,۱)(۰/۲۵)$

دهانه سهمی به چپ و $a = ۲$، خط هادی $x = ۱$ (۰/۲۵) و کانون سهمی $F(-۳,۱)$ (۰/۲۵)

ب) نقاط کمکی: $B' = (-۳,-۳), B = (-۳,۵)$ (۰/۵)

رسم شکل (۰/۵)



۳۴ الف) $z = ۴$ (۰/۵)   ب) محور yها (۰/۵)

پ) نقطه $A = (۲,۰,۰)$ (۰/۲۵) و مختصات وسط AB برابر است با: $\left(-۱,۳,\frac{-۳}{۲}\right)$ (۰/۲۵)

۳۵
الف) $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}, A \times B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۱۲ \\ ۱ & ۱۰ & ۱۱ \\ ۱۹ & ۵ & ۴۲ \end{bmatrix}$

ب) $|B| = ۲(۱۵) - ۱(-۹) + ۰(-۶) = ۳۹$

۳۶ الف) با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، دهانه سهمی رو به پایین است و $a=۴$ پس معادله سهمی به صورت:

$$(x-۲)^{۲}=-۱۶(y-۳)$$

ب) مختصات کانون سهمی برابر $F=(۲,-۱)$

۳۷

$$\text{الف}\Big)\ |AB|=\sqrt{(۳-۳)^{۲}+(-۲-۱)^{۲}+(۲-۲)^{۲}}=۳$$

$$\text{ب}\Bigg)\begin{cases} x=۳ \\ -۲\leq y\leq ۱ \\ z=۲ \end{cases}$$

۳۸

$$BA=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$|BA|=۳(-۱۰)-۱(-۱۰)-۱(-۲۰)=۰$$

۳۹

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}=-۲I$$

$$A^{۷}=(A^{۲})^{۳}.A=(-۲I)^{۳}.A=-۸\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱۶ \\ ۸ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴۰

$$A^{۲}=B\rightarrow\begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=۵ \\ ۴a+b=۵ \end{cases}\rightarrow a=۰, b=۵$$

۴۱

$$(x+۱)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۹\rightarrow O'=(-۱,۲), r'=۳$$

$$OO'=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵\rightarrow r+r'=۵\rightarrow r=۲$$

$$(x-۲)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۴$$

۴۲ ۱

۴۳

$$\text{الف}\Big)\ \frac{۲m}{۲}\neq\frac{۳}{-۱}\Rightarrow m\neq -۳$$

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-۱۰\neq ۰, A^{-۱}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\text{ب}\Bigg)\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases}$$

۴۴

$$\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳x-۲۱ \end{bmatrix}=۰\Rightarrow x=۷$$

۴۵ دترمینان ماتریس A را برحسب ستون اول به دست می‌آوریم.

$$|A| = ۲\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۲\times ۱۰ = ۲۰, |B| = -۶ \Rightarrow \left|B^{۲}\right| = ۳۶$$

$$|A| + \left|B^{۲}\right| = ۵۶$$

۴۶ فرم استاندارد سهمی به صورت $(y-۳)^{۲} = -۱۶(x+۱)$ است. سهمی افقی و دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. راس سهمی نقطه $A(-۱,۳)$ است. و $a=۴$ مختصات کانون آن نقطه $F(-a+h,k)=(-۵,۳)$ است. معادله خط هادی سهمی به صورت $x=a+h=-۱$ است.

۴۷
$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ m & ۶ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۶ + ۲m = ۰ \Rightarrow m = -۳$$

۴۸ الف) $c = \frac{۴}{۵}a \Rightarrow ۹ + \frac{۱۶}{۲۵}a^{۲} = a^{۲} \Rightarrow a = ۵, c = ۴ \Rightarrow \mathrm{FF}' = ۸, \mathrm{AA}' = ۱$

ب) $A(۱,-۱), A'(-۹,-۱)$

۴۹ الف) ندارد — ب) بیضی — پ) $\left(\frac{۱}{۲},۱\right)$ — ت) صفر

۵۰
$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases}, r = \frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع آن برابر $r=۲$ است. معادله دایره برابر با: $(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴$ است.

۵۱ مرکز و شعاع دایره $(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۱$ برابر است با: $O(۱,۰), r=۱$

و مرکز و شعاع دایره $x^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱$ برابر $O'=(۰,۱), r'=۱$

فاصله دو مرکز برابر $\mathrm{OO}'=\sqrt{۲}$ و $r+r'=۲$ و $r-r'=۰$

$$|r-r'| < \mathrm{OO}' < r+r'$$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

۵۳ نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم. نقطه A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی

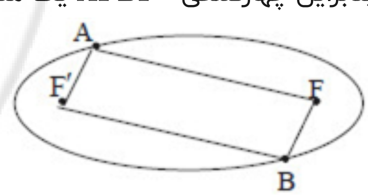
$$\mathrm{AF}+\mathrm{AF}'=۲a \quad (۱)$$

نقطه B روی بیضی قرار دارد.

$$\mathrm{BF}+\mathrm{BF}'=۲a \quad (۲)$$

از ۱ و ۲ و فرض ($\mathrm{AF}'=\mathrm{BF}$) نتیجه می‌شود $\mathrm{AF}=\mathrm{BF}'$.

بنابراین چهارضلعی AFBF' یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. $\mathrm{AF} \parallel \mathrm{BF}'$



۵۳ نقاط A,B زیرا در این دو نقطه $y=۲$ و $z=۱$ می‌باشد.

۵۴

$$|۲A| = (|A|^{۲} + ۴) \Rightarrow (|A| - ۲)^{۲} = ۰ \Rightarrow |A| = ۲$$
$$\left|A^{-۱}\right| = \frac{۱}{|A|} = \frac{۱}{۲}$$

۵۵

$$\left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right|^{۲} = \left|\vec{o}\right|^{۲} \Rightarrow \left|\vec{a}\right|^{۲} + \left|\vec{b}\right|^{۲} + \left|\vec{c}\right|^{۲} + ۲(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}) = ۰$$
$$\Rightarrow ۱ + ۴ + ۹ + ۲(\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}) = ۰ \Rightarrow (\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}) = -۷$$

۵۶ الف) قطری (ص ۱۲) ب) مشترک (ص ۳۶) پ) پاره‌خط (ص ۴۹) ت) yoz (ص ۷۳)

۵۷ الف) نادرست (ص ۲۱) ب) نادرست (ص ۳۹) پ) نادرست (ص ۴۲) ت) درست (ص ۸۱)

۵۸

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ + ۳a & -۸ + ۲a \\ b - ۳ & -۲b - ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -۸ + ۲a = ۰ \rightarrow a = ۴ \\ b - ۳ = ۰ \rightarrow b = ۳ \end{cases}$$ (ص ۲۱)

۵۹

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{۲}{m - ۱} = \frac{m}{۱} \neq \frac{۱}{۳} \Rightarrow m(m - ۱) = ۲ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۲ \end{cases}$$ (ص ۲۶)

۶۰

الف) $A = (۲, ۰, ۰), B = (۱, ۰, ۳)$

ب) $\mathrm{AB} = \sqrt{(۲ - ۱)^{۲} + (۰ - ۰)^{۲} + (۰ - ۳)^{۲}} = \sqrt{۱۰}$

پ) $M = \left(\frac{۲ + ۱}{۲}, \frac{۰ + ۰}{۲}, \frac{۰ + ۳}{۲}\right) = \left(\frac{۳}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲}\right)$ (ص ۷۶ و ۶۶)

۶۱ روش اول:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{Sin}\theta \Rightarrow \operatorname{Sin}\theta = \frac{۷۲}{۳ \times ۲۶} = \frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta = \pm\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\theta < ۹۰}$$
$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{Cos}\theta = ۳۰$$ (ص ۸۴)

روش دوم:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| + (\vec{a}.\vec{b})^{۲} = \left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲} \Rightarrow ۷۲^{۲} + (\vec{a}.\vec{b})^{۲} = ۳^{۲} \times ۲۶^{۲}$$
$$(\vec{a}.\vec{b})^{۲} = ۹۰۰ \Rightarrow (\vec{a}.\vec{b}) = \pm ۳۰ \xrightarrow{\theta < ۹۰} (\vec{a}.\vec{b}) = ۳۰$$

۶۲

$$\vec{b}.(\vec{a} \times \vec{c}) = ۰ \Rightarrow (۰, m, -۱).(۳, -۳, -۳) = ۰ \Rightarrow -۳m + ۳ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$ (ص ۸۲)

۶۳ الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست

۶۴ الف) ماتریس ب) مشترک پ) خارج ت) صفر

۶۵ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵ \Rightarrow O=(۱,۱)$

$m_{\mathrm{OA}}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$ شیب خط مماس $m'=\frac{۱}{m}=\frac{-۱}{۲}$ است، پس معادله خط مماس به صورت $y-۲=\frac{-۱}{۲}(x-۳)$ است.

۶۶ الف) $\vec{a}.\vec{b}=۲+۱+۰=۳ \Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \theta=۴۵$

ب) بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ $\quad \vec{a}\times\vec{b}=(۲,-۱,۲)\times(۱,-۱,۰)=(۲,۲,-۱)$

۶۷ الف) $a=\frac{۵}{۴}c \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}c^۲=۹+c^۲ \Rightarrow \mathrm{FF}'=۲c=۸$

ب) $a=۵ \Rightarrow A(۱,-۱), A(-۹,-۱)$

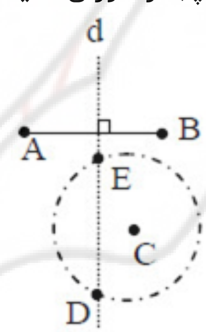
۶۸ $X=A^{-۱}\times B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} x=۱.y=۲$ (ص ۲۴)

۶۹ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف d و دایره جواب مسئله است. (نقاط D و E)

الف) اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد. (ص ۳۹)

ب) اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد.

پ) در صورتی‌که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.



۷۰ الف) معادله متعارف سهمی $(y-۱)^۲=۸(x-۱)$ و فاصله کانونی $a=۲$

ب) رأس سهمی $(۱,۱)$ معادله خط هادی $x=-۱$ و مختصات کانون آن $(۳,۱)$ (ص ۵۵)

۷۱ الف) CDFG

ب) $\begin{cases} ۰\leq x\leq ۲ \\ y=۴ \\ z=۳ \end{cases}$

پ) $D(۲,۴,۳)$

ت) $y=۲$ (ص ۶۸)

۷۲ الف) $\overrightarrow{a} = (۲,۳,-۱), \overrightarrow{b} = (۱,۰,۱)$

$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right| \operatorname{Cos}\theta \Rightarrow ۱ = \sqrt{۱۴}\sqrt{۲}\operatorname{Cos}\theta \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta = \frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$ (ص ۷۸)

ب) $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = (۱,-۲,۰)$ (ص ۷۹)

$\overrightarrow{a}' = \frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{d}}{\left|\overrightarrow{d}\right|^{۲}}\overrightarrow{d} = \frac{-۴}{۵}(۱,-۲,۰)$

۷۳ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (۱,۲,۱), \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-۳,۲,-۳)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-۸,۰,۸), S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = ۴\sqrt{۲}$ (ص ۸۴)

۷۴ $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = ۰ \longleftrightarrow \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\operatorname{Cos}\theta = ۰ \overset{\left|\overrightarrow{a}\right|\neq ۰, \left|\overrightarrow{b}\right|\neq ۰}{\rightleftarrows} \operatorname{Cos}\theta = ۰ \longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$ (ص ۷۹)

۷۵ $A - ۲I = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

$|A - ۲I| = ۲ \Rightarrow (A-۲I)^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ (ص ۲۳)

۷۶ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d', d'' می‌باشند که موازی d هستند.

محل برخورد دو خط d', d'' با خط l جواب مساله است.

الف - اگر خط l دو خط d', d'' را قطع کند مسئله دو جواب دارد.

ب - اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.

پ - اگر خط l هیچ‌یک از دو خط d', d'' را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

رسم یک مورد شکل برای مسأله الزامی است. (ص ۳۸)

۷۷ $a^{۲} + b^{۲} > ۴c \Rightarrow ۱۶ + ۳۶ > ۴a \Rightarrow a < ۱۳$ (ص ۴۶)

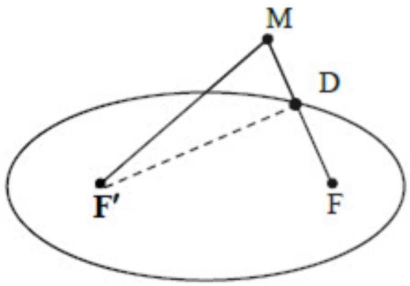
۷۸ $(x-۱)^{۲} + (y-۱)^{۲} = ۴, O = (۱,۱), r = ۲, d = \frac{|۱ + ۱ - ۱|}{\sqrt{۱^{۲} + ۱^{۲}}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$d < r$

خط و دایره در دو نقطه متقاطع هستند.

۷۹ از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد بنا بر تعریف بیضی: $\mathrm{DF}+\mathrm{DF}'=۲a$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:



$$\mathrm{MD}+\mathrm{MF}'>\mathrm{DF}'\xrightarrow{+\mathrm{DF}}$$

$$\mathrm{DF}+\mathrm{MD}+\mathrm{MF}'>\mathrm{DF}+\mathrm{DF}'$$
$$\Rightarrow \mathrm{MF}+\mathrm{MF}'>۲a$$

(ص ۴۷)

۸۰ الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

در این سهمی $a=۱$ و معادله آن برابر است با: $(y-۳)^۲=-۴(x-۲)$

ب) مختصات کانون سهمی $F(-a+h,k)=(-۱+۲,۳)=(۱,۳)$

پ) مختصات محل برخورد با محور طول‌ها برابر است با:

$y=۰\Rightarrow x=\dfrac{-۱}{۴},\left(\dfrac{-۱}{۴},۰\right)$ (ص ۵۸ و ۵۴)

۸۱ عرض ها یا محور yها (ص ۶۷)

۸۲ $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=۰\Rightarrow ۲(m+۱)+۳m-۲=۰\Rightarrow m=۰$ (ص ۷۹)

۸۳ $(\vec{b}\times\vec{c})=(۶,۴,-۴)$ (ص ۸۳)

$v=\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|=|(۱,۰,۱).(۶,۴,-۴)|=۱۰$

اگر دانشآموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:

$$v=\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|=\left\|\begin{matrix}۱&۰&-۱\\۰&۲&۲\\۲&-۳&۰\end{matrix}\right\|=۱۰$$

۸۴ $|A|=۲,\left|-\frac{۱}{۲}A^۴\right|=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۳|A|^۴=-۲$ (ص ۲۸ و ۳۱)

۸۵ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

مختصات رأس سهمی $A(-۱,۲)$، در این سهمی $a=\mathrm{AF}=۲$

معادله آن برابر است با: $(y-۲)^۲=-۸(x+۱)$

(ص ۵۸)

۸۶ $z=۳$ (ص ۶۸)

۸۷ الف) $۲\overrightarrow{b} = (۲,۰,۲), \left|۲\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right| = |(۲,-۲,۱)| = ۳$ (ص ۷۶)

ب) $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = (۱,۲,۲)$ (ص ۸۱)

$$S = \left|\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})\right| = |(۸,-۵,۱)| = ۳\sqrt{۱۰}$$

۸۸

$$A^{۲} + \mathrm{AB} = \begin{bmatrix} ۵ & ۹ & ۹ \\ ۸ & ۱۳ & ۱۵ \\ ۱۱ & ۱۱ & ۲۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۷ & ۴ \\ ۴ & ۱۲ & ۶ \\ ۱۳ & ۱۴ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۶ & ۱۳ \\ ۱۲ & ۲۵ & ۲۱ \\ ۲۴ & ۲۵ & ۲۷ \end{bmatrix}$$

۸۹ روش اول:

$$\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|} = \frac{۱۲}{۴\times۶} = \frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}\ (۰/۲۵)$$

$$\mathrm{S}_{\text{مثلث}} = \underbrace{\frac{۱}{۲}\left|\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}}\right| = \frac{۱}{۲}\left|\vec{\mathrm{a}}\right|\left|\vec{\mathrm{b}}\right| \mathrm{Sin}\,\theta}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{(۰/۲۵)} = ۶\sqrt{۳}\ (۰/۲۵)$$

روش دوم:

$$\left|\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}}\right|^{۲} + (\vec{\mathrm{a}}\vec{\mathrm{b}})^{۲} = \left|\vec{\mathrm{a}}\right|^{۲} \left|\vec{\mathrm{b}}\right|^{۲}\ (۰/۲۵) \rightarrow \underbrace{\left|\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{b}}\right|^{۲} + (۱۲)^{۲} = (۴)^{۲}\ (۶)^{۲}}_{(۰/۵)}$$

$$\rightarrow \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = ۱۲\sqrt{۳}(۰/۲۵)$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = ۶\sqrt{۳}(۰/۲۵)$$

۹۰ دو دایره متخارج هستند. ۰/۲۵

$$\underbrace{\mathrm{o}_۱ = (-۱\ ,\ ۲)\ ,\ \mathrm{r}_۱ = ۱}_{۰/۵}\ ,\quad \underbrace{\mathrm{o}_۲ \left| \begin{array}{l} \frac{-\mathrm{a}}{۲} = ۱ \\ -\frac{\mathrm{b}}{۲} = -۲ \end{array} \right.\ ,\ \mathrm{r}_۲ = \frac{۱}{۲}\sqrt{\mathrm{a}^۲ + \mathrm{b}^۲ - ۴\mathrm{c}} = ۲}_{۰/۷۵}$$

$$\underbrace{\mathrm{d} = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۲+۲)^۲} = \sqrt{۲۰}}_{۰/۵} \Rightarrow \sqrt{۲۰} > ۱ + ۲ = ۳$$

۹۱

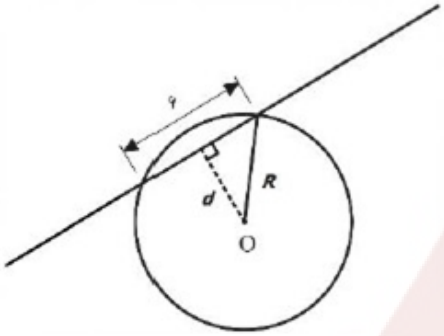
$$y^{۲} = ۴(x-۱) \rightarrow S(۱,۰), a = ۱, F(۲,۰)$$

$$(x-۲)^{۲} + y^{۲} = ۹, \begin{cases} y^{۲} = ۴x - ۴ \\ y^{۲} = -x^{۲} + ۴x + ۵ \end{cases} \rightarrow x = \pm۳$$

$$M(۳, ۲\sqrt{۲}), M'(۳, -۲\sqrt{۲})$$

۹۲ الف) مرکز $FF' = |۳-(-۵)| = ۸ = ۲C \Rightarrow C = ۴$ $O\left|\begin{array}{l}\frac{۱+۱}{۲}=۱\\ \frac{۳-۵}{۲}=-۱\end{array}\right.$

ب) $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow b = \sqrt{۲۰} \Rightarrow BB' = ۲\sqrt{۲۰}$



۹۳
$$d = \frac{|۳\times۲-۴(-۳)+۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}} = ۴$$
$$R = \sqrt{۳^۲+۴^۲} = ۵ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۳)^۲ = ۲۵$$

۹۴ الف) $\begin{cases} ۲a = ۱۰ \to a = ۵ \\ ۲b = ۶ \to b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = ۴$

در مثلث MFF' میانه وارد بر یک ضلع $MO = \frac{۱}{۲}FF' = ۴$ نصف ضلع روبه‌رو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب) $MF + MF' = ۲a = ۱۰ \Rightarrow MF' = ۱۰ - MF$

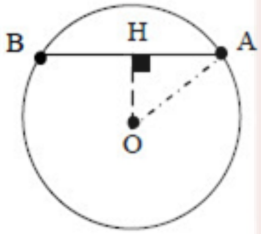
$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \Rightarrow MF^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲ \Rightarrow MF = ۵ - \sqrt{۷}$$

۹۵ اگر قطر دهانه دیش را با $۲r$ و گودی را با h نمایش دهیم. فاصله کانونی برابر $a = \frac{۴r^۲}{۱۶h}$ است.

$۲r = ۶۰, h = ۹$ با جایگذاری در رابطه فوق داریم: $a = \frac{(۲r)(۲r)}{۱۶h} = \frac{۶۰\times۶۰}{۱۶(۹)} = ۲۵$

(اگر رابطه فوق به صورت $a = \frac{r^۲}{۴h} = \frac{(۳۰)^۲}{۴(۹)} = ۲۵$ نوشته شود درست است.)

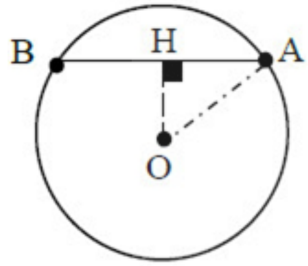
۹۶ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند. (ص ۴۳)



$$OH = \frac{|x+y-۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow OA^۲ = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = \frac{۱۰}{۴} = R^۲$$

معادله دایره $(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = \frac{۱۰}{۴}$

۹۷ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$AH = \frac{۱}{۲}AB = ۳$$

$$OH = \frac{|۳(۲)-۴(-۱)+۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۴$$

$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow r^۲ = (۴)^۲ + (۳)^۲ = ۲۵, (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲۵$$

۹۸ نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیه فیثاغورث داریم:

$$DF^۲ + FF'^۲ = DF'^۲ \Rightarrow DF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - DF)^۲$$

$$DF = \frac{a^۲ - c^۲}{a} \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} DF = \frac{b^۲}{a}$$

۹۹

$$\vec{a} = r\vec{b}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{(r\vec{b}).\,\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{r|\vec{b}|^۲}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = r\vec{b} = \vec{a}$$ (ص ۸۰)

۱۰۰ روش اول:

بنا به تعریف سهمی $MF = MT$ مثلث MFT متساوی‌الساقین است. $M\widehat{T}F = T\widehat{F}M(۱)$

از طرفی بنا به خطوط موازی $MT \parallel FH$ و مورب FT نتیجه می‌شود $M\widehat{T}F = T\widehat{F}H(۲)$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$ (ص ۵۸)

روش دوم:

$MT \parallel FH$ با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \cancel{\frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF}} \end{array}\right\} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH}$$

$$\xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$