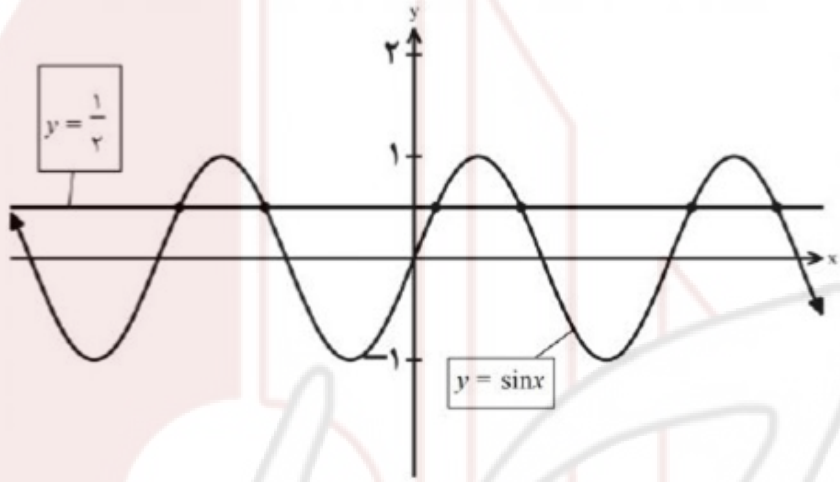
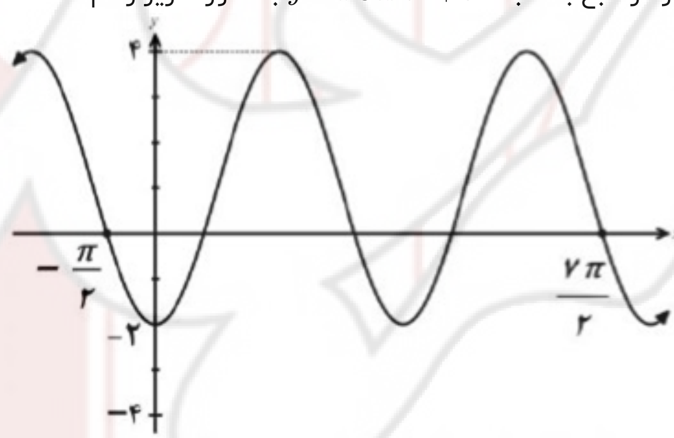
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
دبیرستان غیردولتی پسرانه مُوحد
منطقه ۵ شهر تهران

پایه : دوازدهم رشته : تجربی	**نمونه سوالات** **نام درس :** ریاضی ۳	نام استاد : آقای پناهی فر

۱ نمودار تابع با ضابطه $y = \operatorname{Sin} x$ و خط به معادله $y = \frac{۱}{۲}$ در دستگاه زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آن‌ها را بیابید.



۳ نمودار تابع با ضابطه $y = a\operatorname{Cos} \mathrm{b}x + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقدار a، b و c را به دست آورید.



۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $y = ۲x(۱ - ۳x^۲) + ۱$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه سوم است.

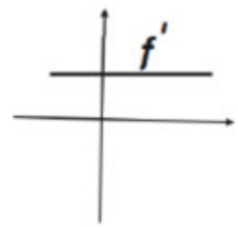
ب) نمودار تابع $y = x^۲$ در بازه $(۰, ۱)$ پایین‌تر از ، نمودار تابع $y = x^۳$ است.

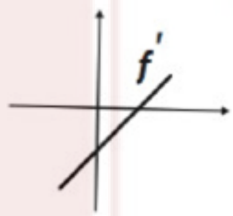
پ) هر تابع یکنوا، یک به یک است.

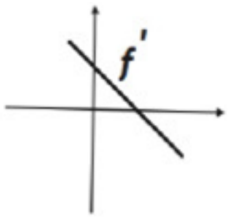
ت) مقدار عددی عبارت $\operatorname{Sin}^۲ ۱۵^\circ - \operatorname{Cos}^۲ ۱۵^\circ$ برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است.

۴ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۵ با توجه به نمودار تابع f، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱) 

۲) 

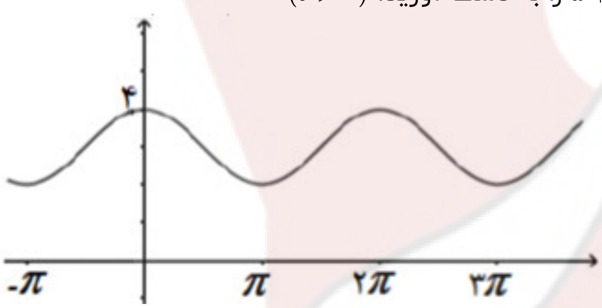
۳) 

۴) 

۶ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x=0$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

۷ معادله مثلثاتی $\operatorname{Cos} 2x-\operatorname{Cos} x+1=0$ را در بازه $0 \leq x \leq \pi$ حل کنید.

۸ نمودار تابع $f(x)=a+\operatorname{Cos}\mathrm{bx}$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b$ را به دست آورید. $(b>0)$



۹ معادله گسترده دایرهٔ $C(O, R)$ به شکل $x^2+y^2+2y-4x-4=0$ است.

الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.

ب) آیا نقطه $A(0,3)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

۱۰ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x)=\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

۱۱ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(\mathrm{kx})$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.

۱۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ و $g(x)=\frac{2}{x}$ بدون نوشتن ضابطه، دامنه fog را به دست آورید.

۱۳ دو تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ داده شده اند.
الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.
ب) ضابطه تابع fog را تشکیل دهید.
ج) حاصل عبارت $\left(\dfrac{۲f}{g}\right)(۵)$ را محاسبه کنید.

۱۴ دو تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ را درنظر بگیرید.
الف) دامنه gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.
ب) تابع $P(x)=f(x)+g(x)$ را به دست آورید.

۱۵ اگر $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ و $g(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ دو تابع باشند:
الف) دامنه تابع fog را به دست آورید.
ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.
ج) مقدار $(g-f)(۲)$ را حساب کنید.

۱۶ توابع $f(x)=\mathrm{Sin}\,x$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ داده شده‌اند.
الف) دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.
ب) تابع gof را تشکیل دهید. ج) حاصل عبارت $(۲\mathrm{f}-۳\mathrm{g})(۰)$ را به دست آورید.

۱۷ درستی برابری مقابل را ثابت کنید.
$$\frac{\mathrm{Sin}\,۲\alpha}{۱+\mathrm{Cos}\,۲\alpha}=\tan\alpha$$

۱۸ اگر $f(x)=۲\mathrm{x}^۴+۱$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}}$ باشند، مشتق تابع fog را در $x=۰$ بیابید.

۱۹ در تابع $f(x)=\begin{cases}x^۳+۱ & x\geqslant -۱\\ x^۲-۱ & x<۱\end{cases}$ مشتق‌های چپ و راست را در $x=-۱$ جداگانه محاسبه کنید. آیا تابع در $x=-۱$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

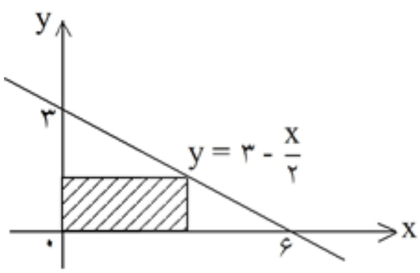
۳۰ حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.
$$\lim_{x\to۸}\frac{\sqrt[۳]{x}-۲}{x^۲-۵\mathrm{x}-۲۴}$$

۳۱ تابع $y=\mathrm{ax}^۲+x+b$ مفروض است، ضرایب a , b را چنان بیابید که منحنی از نقطه‌ی $A(۲,-۲)$ بگذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند.

۳۲ اگر $۲\mathrm{x}+y=۶۰$ باشد، مقادیر y,x را چنان بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم گردد.

۳۳ مشتق‌پذیری تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی کنید.
$$f(x)=\begin{cases}-۳\mathrm{x}^۲+۶\mathrm{x}+۲ & x\geqslant ۲\\ ۴\sqrt{x+۲}-۳\mathrm{x} & x<۲\end{cases}$$

۲۴ در شکل زیر، یک مستطیل به محور x ها و y ها ونمودار تابع $y = ۳ - \frac{x}{۲}$ محدود شده است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟



۲۵ حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^۲ + ۲x} - \sqrt{x^۲ - ۲x})$$

۲۶ جنگلبانی می‌خواهد محوطه مستطیل شکلی جلوی محل سکونت خود بسازد. برای این منظور مقدار ۱۲۰ متر مربع سیم توری به ارتفاع یک متر برای حصارکشی سه طرف محوطه در اختیار دارد. طول و عرض محوطه مستطیل شکل را چگونه انتخاب کند تا مساحت محصور شده ماکزیمم شود؟

۲۷ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^۳$ را در نقطه‌ی دلخواه a حساب کنید، سپس معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه‌ی $A(۱,۱)$ به‌دست آورید.

۲۸ معادله‌ی $۲\,\mathrm{Sin}^۲x + ۹\,\mathrm{Cos}\,x + ۳ = ۰$ را حل کنید.

۲۹ مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x^۴ - ۸x^۳$ را در بازه‌ی $[۱,۳]$ بیابید.

۳۰ تابع $y = x - ۲\sqrt{x}$ در کدام بازه صعودی اکید است؟

۳۱ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = ۲x - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x - ۶}$ داده شده‌اند.

الف) ضابطه‌ی تابع gof را بنویسید.

ب) دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۳۲ تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳ & x < ۰ \\ x - ۱ & x \geqslant ۰ \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) حاصل $f(f(-۱))$ را به‌دست آورید.

۳۳ حاصل حد زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to۱} \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ - ۱}$$

۳۴ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x|x|$ و مشتق دوم آن را در نقطه‌ی $x = ۰$ بررسی کنید.

۳۵ ثابت کنید اگر تابع g در نقطه‌ی α مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع $\frac{1}{g}$ نیز در نقطه‌ی α مشتق‌پذیر است و

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(\alpha)=\frac{-g'(\alpha)}{g^{2}(\alpha)}$$

۳۶ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $y=\sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ی $x=27$ بیابید.

۳۷ تابع $f(x)=(x^{2}-x)^{\frac{3}{2}}$ در چه نقاطی مشتق پذیر است؟

۳۸ اگر f تابع مشتق‌پذیری در نقطه‌ی a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است و $(\mathrm{cf})'(a)=\mathrm{cf}'(a)$.

۳۹ اگرf تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق‌پذیر باشد و $f'(a)\neq 0$، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=-\frac{f'(a)}{f^{2}(a)}$

۴۰ اگر $g(x)=\frac{1}{x-3}$ و $f(x)=3\mathrm{x}-2$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(3f+2\mathrm{g})(4)$ ب) $D_{(\mathrm{fog})}$

۴۱ اگر $f(x)=\sqrt{x^{2}-3\mathrm{x}}$ ، $g'(x)=\frac{x+3}{x-1}$ و $F=\mathrm{gof}$ باشند، حاصل $F'(4)$ را تعیین کنید.

۴۲ قضیه: اگر دو تابع fو g در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

۴۳ طول نقاط ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{3\mathrm{x}}{9+x^{2}}$ را در بازه‌ی $[0,4]$ مشخص کنید.

۴۴ نمودار $f(x)=x[x]$ را در بازه‌ی $[-2,1]$ رسم کنید، سپس با توجه به نمودار، نقاط ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی تابع f را تعیین کنید.

۴۵ دامنه و برد f را تعیین کنید.

۴۶ ابعاد مستطیلی را بیابید که مساحت آن ۶۴ مترمربع بوده و محیط آن می‌نیمم باشد.

۴۷ مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) $y=\frac{\sqrt[3]{x}(2\mathrm{x}-1)^{5}}{x^{3}-4\mathrm{x}}$

۴۸ نشان دهید $2\mathrm{x}-5$ یک فاکتور $f(x)=2\mathrm{x}^{3}-3\mathrm{x}^{2}-9\mathrm{x}+10$ می‌باشد. سپس فاکتورهای دیگر $f(x)$ را تعیین کنید.

۴۹ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^{2}+1$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ مفروضند.
الف) دامنه‌ی gof را تعیین کنید.
ب) در صورت وجود ضابطه‌ی تابع gof را بنویسید.

۵۰ ثابت کنید تابع $f(x)=x^۲+۱$ در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ یک‌به‌یک است. سپس ضابطه‌ی معکوس تابع f را تعیین کنید.

۵۱ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^۲-۲x$ را در نقطه $x=۱$ به‌دست آورید.

۵۲ حد توابع زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۲x}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \operatorname{tg}^۲ x$

ت) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{۴x^۳-۱}{x+۲}$

۵۳ a و b را طوری محاسبه کنید که نمودارهای دو تابع $y=\mathrm{a}x^۲+x+b$ و $y=x+۳\mathrm{a}$ همدیگر را روی محور عرض‌ها در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کنند.

۵۴ اگر $f(x)=x^۲+۳$ ، $g(x)=\sqrt{x-۱}$ ، مطلوب است:

الف) محاسبه مقدار $(f-۲g)(۵)$ ب) تعیین ضابطه و دامنه تابع fog

۵۵ اگر $y=\mathrm{a}x^۲+\mathrm{b}x+c$ باشد، مقادیر a و b و c را طوری بیابید که: سهمی، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع نماید و از نقطه $A(۱,۶)$ نیز بگذرد.

۵۶ از تابع مقابل مشتق بگیرید: $f(x)=\dfrac{۴-۳\mathrm{x}-x^۲}{x-۲}$

۵۷ مشتق تابع $f(x)=x^۲+۱$ را به کمک تعریف مشتق بدست آورید.

۵۸ دو تابع f و g روی اعداد حقیقی به صورت $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x}$ تعریف شده‌اند. ضابطه و دامنه‌ی تابع fog را تعیین کنید.

۵۹ در سهمی $f(x)=\mathrm{a}x^۲+\mathrm{b}x+c$، aوbوc را چنان بیابید، که سهمی فوق خط $y=x+۱$ را در نقاطی به طول‌های ۲ و ۱ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض (۱-) قطع کند.

۶۰ مقدار bوn را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(۳-b)(x^۲-۲)}{۲\mathrm{x}^n-۳\mathrm{x}-۲}$ برابر یک باشد.

۶۱ حد تابع زیر را حساب کنید. $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x+۳}{(x-۲)^۲}$

۶۲ طول و عرض مستطیلی را بدست آورید که محیط آن ۲۰۰ متر بوده و مساحت آن ماکزیمم باشد.

۶۳ مشتق تابع داده شده را بدست آورید. (ساده کردن لازم نیست) $y=\sqrt[۳]{x^۳+۳x+۳x^۲+۱}$

۶۴ حد تابع زیر را بدست آورید. $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱}{۱-\operatorname{Cos}^۲ x}$

۶۵ حد تابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{۲-x}$$

۶۶ حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x\to (-۱)^-}\frac{۲x}{(x+۱)^۲}$$

۶۷ حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{۲x^۲-۱+۳x}{۸x+x^۲-۶}$$

۶۸ اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ و $g(x)=۴-x$ آن‌گاه:

الف) $(f-۲g)(۱)$ را محاسبه نمایید. ب) دامنه‌ی fog را بدست آورید.

۶۹ مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$y=(۴x^۲-x)^۳$$

۷۰ حد زیر را حساب کنید.

$$y=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{۴x+x^۲+۴}{۲x^۲+۵x-۳}$$

۷۱ حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{(۲x+۱)(x+۲)^۲}{۵x^۲+۲x}$$

۷۲ حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{۲}\right)^+} \operatorname{tg}^۲ x$$

۷۳ حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x^۲-۹x+۱۴}$$

۷۴ اگر $f(x-۱)=x^۲$ آن‌گاه $f(x)$ را به دست آورید. سپس $f(۱)$ را بیابید.

۷۵ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^۲-۲x$ را در نقطه‌ی $x=۱$ بدست آورید.

۷۶ اگر تابع $f(x+۳)=\frac{۲x}{x-۱}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را بیابید و سپس $f(-۳)$ را به دست آورید.

۷۷ تابع $y=x^۳+ax+b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای به طول ۱ دارای می‌نیمم یا ماکزیممی برابر ۲- باشد.

۷۸ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست)

$$h(x)=\left(\frac{۲}{x}+\sqrt{x}\right)^۳$$

۷۹ حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to ۰^-} \operatorname{Cotg}^۲ x$$

۸۰ حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-۳x^۲-\sqrt{x+۱}}{۲x^۲+۵x}$$

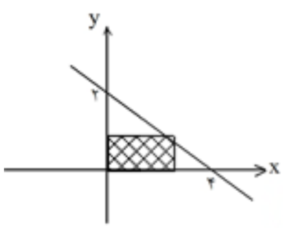
۸۱ حد زیر را محاسبه کنید: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

۸۲ حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^2+x-6}{9x^2+3x-12}$$

۸۳ نمودار تابع $f(2x)+1$ را رسم کنید.

۸۴ مستطیلی به محورهای x و y و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\dfrac{4-x}{2}$ محدود شده است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟



۸۵ حد مقابل را در صورت وجود تعیین کنید: $\lim\limits_{x\to(-\infty)}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$

۸۶ آیا دو تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ مساویند؟ چرا؟

۸۷ از معادله‌ی مقابل مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نمی‌باشد) $y=\sqrt[5]{(x^3-7x)^2}$

۸۸ حد مقابل را حساب کنید: $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-\sqrt{4x^2+4x}$

۸۹ نمودار تابع $y=2f(x)-3$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۹۰ محیط مستطیلی ۲۰۰ متر است. ابعاد آن را چنان بیابید که مساحت مستطیل ماکزیمم باشد.

۹۱ توابع g, f با ضابطه‌های $g(x)=\sqrt{x+2}, f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ مفروضند. دامنه‌ی توابع gof, g, f را تعیین کنید، سپس ضابطه‌ی تابع gof را (در صورت وجود) بنویسید.

۹۲ مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\left|x^2-3x\right|$ را در $x_0=3$ بررسی کنید.

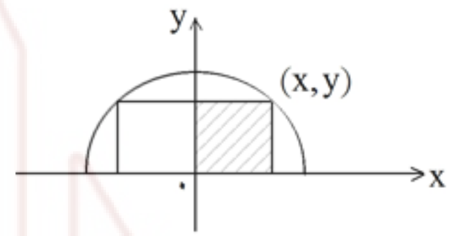
۹۳ حد مقابل را محاسبه کنید: $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

۹۴ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g(x)=\dfrac{x+۱}{x-۱}$ مفروضند.

الف) دامنه‌ی توابع gof, g, f را تعیین کنید.

ب) ضابطه‌ی gof را بنویسید.

۹۵ نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۵}$ مفروض است. مطابق شکل زیر مستطیلی در آن محاط می‌کنیم ابعاد مستطیل را چنان بیابید که محیط مستطیل ماکزیمم باشد.



۹۶ دو عدد حقیقی چنان بیابید که تفاضلشان ۱۰ بوده و حاصل‌ضرب‌شان مینیمم گردد.

۹۷ حد تابع مقابل را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{۲}-۲\mathrm{x}}-x\right)$$

۹۸ حد تابع مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۵\mathrm{x}+\sqrt{x^{۲}+۷}}{۲\mathrm{x}+\sqrt{x}}$$

۹۹ فرض کنیم $f(x)=\begin{cases}\mathrm{ax}-b & \text{و}\ x<۲\\ x^{۲}-۲ & \text{و}\ x\geq ۲\end{cases}$ ، مطلوب است محاسبه مقادیر a و b به‌طوری که f همواره مشتق‌پذیر باشد.

۱۰۰ نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ یک‌به‌یک است، سپس ضابطهٔ تابع معکوس آن را بنویسید.

۱ $\operatorname{Sin} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathrm{Z})$

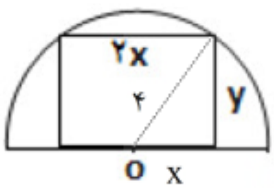
۲ $2T = \frac{7\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi \Rightarrow T = 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow b = \pm 1$

$c = \frac{4+(-2)}{2} = 1$

$\left.\begin{array}{l} |a| = \frac{4-(-2)}{2} = 3 \\ x = 0 \text{ در} \\ \text{مینیمم دارد} \Rightarrow a < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -3$

۳ الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

۴



$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$

$S'(x) = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{8}\,,\ y = \sqrt{8}$

طول $2\sqrt{8}$ و عرض $\sqrt{8}$ (ص ۱۲۶)

۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور xها را در ناحیه $x < 0$ قطع می‌کند. (ص ۱۰۰)

x	$x_S < 0$		
f	نزولی		صعودی
f'	−	0	+

۶ $f'(0) = m = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, A(0,0)$

معادله مماس قائم: $x = 0$ (ص ۸۸)

۷ $2\operatorname{Cos}^2 x - 1 - \operatorname{Cos} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Cos} x(2\operatorname{Cos} x - 1) = 0$

$\begin{cases} \operatorname{Cos} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Cos} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

۸ $\mathrm{Max} = 4 \Rightarrow a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$

$T = 2\pi : \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow \quad b = 1 \qquad a = 3 \quad a + b = 4$ (ص ۳۴)

۹ الف) $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3$

ب) خیر زیرا: $(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0$

۱۰ $f'(x) = \dfrac{\frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$

۱۱ نادرست (۰/۲۵)

۱۲

$D_f = R - \{\pm ۲\} \qquad D_g = R - \{۰\} \qquad (۰/۲۵)$

$D_{fog} = \{x \in D_g \text{ و } g(x) \in D_f\}\ (۰/۲۵) \rightarrow \left\{x \neq ۰ \text{ و } \frac{۲}{x} \neq \pm ۲\right\}\ (۰/۲۵)$

$\rightarrow D_{fog} = R - \{۰, ۱, -۱\}\ (۰/۲۵)$

مشابه مثال صفحه ۷۳

۱۳ (صفحه ۶۳ و ۶۶)

الف) $D_f = R - \{۰\}\ (۰/۲۵)\ , D_g = [۱, +\infty)\ (۰/۲۵)$

$D_{fog} = \{x \in D_f \mid g(x) \in D_f\}\ (۰/۲۵) \Rightarrow$

$D_{fog} = \left\{x \in \left[۱, +\infty\right) \mid \sqrt{x-۱} \in R - \{۰\}\right\}\ (۰/۲۵) \Rightarrow D_{fog} = (۱, +\infty)\ (۰/۲۵)$

ب) $(fog)(x) = f(\sqrt{x-۱}) = \frac{\sqrt{x-۱}-۱}{\sqrt{x-۱}}\ (۰/۵)$

ج) $\frac{۲f(۵)}{g(۵)} = \underbrace{\frac{۲\times\frac{۴}{۵}}{۲}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\frac{۴}{۵}}_{(۰/۲۵)}$

۱۴ صفحه ۶۳ و ۶۵

الف) $D_f = (-\infty, ۱]\ (۰/۲۵)\ , D_g = [۱, +\infty)\ (۰/۲۵)$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}\ (۰/۲۵)$

$\Rightarrow D_{gof} = \left\{x \in \left(-\infty, ۱\right] \mid \sqrt{۱-x} \in \left[۱, +\infty\right)\right\}\ (۰/۲۵) \Rightarrow D_{gof} = \left(-\infty, ۰\right]\ (۰/۲۵)$

$\underbrace{D_p = D_f \cap D_g}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\{۱\}}_{(۰/۲۵)}$

ب)

$P(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{۱-x} + \sqrt{x-۱}\ (۰/۲۵) \Rightarrow P = \{(۱, ۰)\}\ (۰/۲۵)$

۱۵

الف) $\underbrace{D_{fog} = \left\{x \in R - \{۱\} \,\middle|\, \frac{x+۲}{x-۱} \neq ۰\right\}}_{(۰/۵)} = R - \{۱, -۲\} \qquad (۰/۲۵)$

مشابه مثال صفحه ۶۸ و مسائل ۷۳ - ۷۴

ب) $fog = \frac{۱}{\frac{x+۲}{x-۱}} \quad (۰/۲۵)$

ج) $(g-f)(۲) = g(۲) - f(۲) = ۴ - \frac{۱}{۲} = \frac{۷}{۲}\ (۰/۵)$

۱۶

الف) $D_f = R\ (۰/۲۵) \qquad D_g = [-۱, ۱]\ (۰/۲۵)$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}\ (۰/۲۵)$

$D_{gof} = \overbrace{\{x \in R \mid \sin x \in [-۱, ۱]\}}^{(۰/۲۵)} = \overbrace{R}^{(۰/۲۵)}$

ب) $(gof)(x) = \sqrt{۱ - \sin^۲ x} = |\cos x|\ (۰/۵)$

ج) $\underbrace{۲f(۰) - ۳g(۰) = ۰ - ۳}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{-۳}_{(۰/۲۵)}$

$$\underbrace{\frac{\text{۲}\sin\alpha\ \cos\alpha}{\text{۱}+\text{۲}\cos^{\text{۲}}\alpha-\text{۱}}}_{\text{۰/۲۵}}=\underbrace{\frac{\text{۲}\sin\alpha\ \cos\alpha}{\text{۲}\cos^{\text{۲}}\alpha}}_{\text{۰/۲۵}}=\underbrace{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha}_{\text{۰/۲۵}}$$ ۱۷

$f'(x)=\text{۸}x^{\text{۳}}$ ۰/۲۵ $, g'(x)=\dfrac{-x}{(x^{\text{۲}}+\text{۳})\sqrt{x^{\text{۲}}+\text{۳}}}$ ۰/۲۵ $, g(\text{۰})=\dfrac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}$ ۰/۲۵ ۱۸

$(fog)'(\text{۰})=f'(g(\text{۰}))\times g'(\text{۰})=\text{۸}\left(\dfrac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}\right)^{\text{۳}}\times\text{۰}=\text{۰}$ ۰/۲۵

$f'_{+}(-\text{۱})=\lim\limits_{x\to-\text{۱}^{+}}\dfrac{f(x)-f(-\text{۱})}{x+\text{۱}}=\lim\limits_{x\to-\text{۱}^{+}}\dfrac{x^{\text{۳}}+\text{۱}-\text{۰}}{x+\text{۱}}=\text{۳}$ ۱۹

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$f'_{-}(-\text{۱})=\lim\limits_{x\to-\text{۱}^{-}}\dfrac{f(x)-f(\text{۱})}{x+\text{۱}}=\lim\limits_{x\to-\text{۱}^{-}}\dfrac{x^{\text{۲}}-\text{۱}-\text{۰}}{x+\text{۱}}=-\text{۲}$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

چون $f'_{+}(-\text{۱})\neq f'_{-}(-\text{۱})$ پس تابع f در $x=-\text{۱}$ مشتق‌پذیر نیست. ۰/۲۵

$\lim\limits_{x\to\text{۸}}\dfrac{\sqrt[\text{۳}]{x}-\text{۲}}{(x-\text{۸})(x+\text{۳})}\times\dfrac{\sqrt[\text{۳}]{x^{\text{۲}}}+\text{۲}\sqrt[\text{۳}]{x}+\text{۴}}{\sqrt[\text{۳}]{x^{\text{۲}}}+\text{۲}\sqrt[\text{۳}]{x}+\text{۴}}=\lim\limits_{x\to\text{۸}}\dfrac{(x-\text{۸})}{(x-\text{۸})(x+\text{۳})(\sqrt[\text{۳}]{x^{\text{۲}}}+\text{۲}\sqrt[\text{۳}]{x}+\text{۴})}=\dfrac{\text{۱}}{\text{۱۳۲}}$ ۳۰

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$$\left.\begin{array}{l} A(\text{۲},-\text{۲})\Rightarrow-\text{۲}=\text{۴}a+\text{۲}+b\Rightarrow\text{۴}a+b=-\text{۴}\ \text{۰/۲۵} \\ B(\text{۰},\text{۳})\Rightarrow\text{۳}=b\ \text{۰/۵}\end{array}\right\}\Rightarrow a=\frac{-\text{۷}}{\text{۴}}\ \ \text{۰/۲۵}$$ ۳۱

$\text{۲}x+y=\text{۶۰}\Rightarrow y=\text{۶۰}-\text{۲}x\Rightarrow xy=x(\text{۶۰}-\text{۲}x)=\text{۶۰}x-\text{۲}x^{\text{۲}}$ ۳۲

$\Rightarrow x=\dfrac{-b}{\text{۲}a}=\dfrac{\text{۶۰}}{\text{۴}}=\text{۱۵}\Rightarrow y=\text{۶۰}-\text{۳۰}=\text{۳۰}$

$$\left.\begin{array}{l} f(\text{۲})=\text{۲} \\ \lim\limits_{x\to\text{۲}^{+}}f(x)=\text{۲} \\ \lim\limits_{x\to\text{۲}^{-}}f(x)=\text{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow x=\text{۲}\to\text{۲}$$ f پیوسته است. ۳۳

$$f'(x)=\begin{cases}-\text{۶}x+\text{۶} & x>\text{۲} \quad f'_{+}(\text{۲})=-\text{۶} \\ \frac{\text{۲}}{\sqrt{x+\text{۲}}}-\text{۳} & x>\text{۲} \quad f'_{-}(\text{۲})=-\text{۲}\end{cases}\Rightarrow$$ f در $x=\text{۲}$ مشتق ندارد.

$S=x\left(\text{۳}-\dfrac{x}{\text{۲}}\right)=\text{۳}x-\dfrac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}$ ۳۴

$S'=\text{۳}-x=\text{۰}\Rightarrow x=\text{۳}\Rightarrow$ ابعاد مستطیل $\begin{cases}x=\text{۳} & \text{طول} \\ y=\text{۳}-\frac{x}{\text{۲}}=\frac{\text{۳}}{\text{۲}} & \text{عرض}\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\sqrt{x^{\text{۲}}+\text{۲}x}-\sqrt{x^{\text{۲}}-\text{۲}x})\times(\sqrt{x^{\text{۲}}+\text{۲}x}+\sqrt{x^{\text{۲}}-\text{۲}x})}{(\sqrt{x^{\text{۲}}+\text{۲}x}+\sqrt{x^{\text{۲}}-\text{۲}x})}$ ۳۵

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{۴}x}{\sqrt{x^{\text{۲}}+\text{۲}x}+\sqrt{x^{\text{۲}}-\text{۲}x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{۴}\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{\text{۱}+\frac{\text{۲}}{x}}+\sqrt{\text{۱}-\frac{\text{۲}}{x}}\right)}=\dfrac{\text{۴}}{\text{۲}}=\text{۲}$

۲۶
$$۲x + y = ۱۲۰ \Rightarrow y = ۱۲۰ - ۲x \Rightarrow S = xy = x(۱۲۰ - ۲x) = ۱۲۰x - ۲x^{۲}$$
$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۱۲۰}{۴} = ۳۰ \Rightarrow y = ۱۲۰ - ۶۰ = ۶۰$$

۲۷
$$\underbrace{f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^{۳} - a^{۳}}{x - a}}_{۰/۲۵} = \lim_{x\to a} \frac{(x - a)\left(x^{۲} + ax + a^{۲}\right) \ ۰/۲۵}{x - a} = ۳a^{۲} \ ۰/۲۵$$
$$m_{۱} = ۳ \ ۰/۲۵ \Rightarrow m_{۲} = -\frac{۱}{۳} \ ۰/۲۵ \Rightarrow y - ۱ = -\frac{۱}{۳}(x - ۱) \ ۰/۲۵$$

۲۸
$$۲(۱ - \cos^{۲}x) + ۹\cos x + ۳ = ۰ \ ۰/۲۵ \Rightarrow ۲\cos^{۲}x - ۹\cos x - ۵ = ۰ \Rightarrow \cos x = ۵ \text{ غ ق ق } ۰/۵$$
$$\cos x = -\frac{۱}{۲} \ ۰/۲۵ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \ ۰/۲۵ \\ x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \ ۰/۲۵ \end{cases}$$

۲۹
$$D = R \quad y' = ۱۲x^{۳} - ۲۴x^{۲} \ ۰/۲۵ \quad ۱۲x^{۳} - ۲۴x^{۲} = ۰ \ ۰/۲۵$$
$$\Rightarrow ۱۲x^{۲}(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \ ۰/۲۵ \quad \text{غیر قابل قبول } ۰/۲۵ \\ x = ۲ \ ۰/۲۵ \end{cases}$$
$f(۱) = -۵$ ۰/۲۵ $\quad f(۲) = -۱۶$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق $\quad f(۳) = ۲۷$ ۰/۲۵ ماکسیمم مطلق

۳۰
$$y' = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{x}} \ ۰/۲۵ \xrightarrow{y'=۰} \frac{۱}{\sqrt{x}} = ۱ \Rightarrow x = ۱ \ ۰/۲۵ \ , D_f = \left[۰, +\infty\right) ۰/۲۵$$

x	۰		۱		$+\infty$
y'		-	۰	+	
y	۰	↘	-۱	↗	$+\infty$

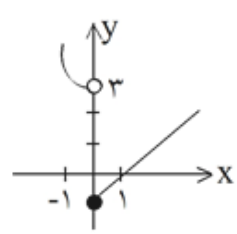
۰/۵

در بازه‌ی $[۱, +\infty)$ صعودی است ۰/۲۵.

۳۱
الف) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(۲x - ۴) = \sqrt{۲x - ۱۰}$ ۰/۵
$D_f = R$ ۰/۲۵ و $D_g = [۶, +\infty)$ ۰/۲۵
$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid ۲x - ۴ \geqslant ۶\} = [۵, +\infty)$
۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۳۲ رسم سهمی ۰/۲۵
رسم خط ۰/۲۵

الف)



ب) $f(f(-۱)) = f(۴) = ۳$ ۰/۲۵
۰/۲۵

۳۳

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-x}{(x^{۲}-۱)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)(x+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۴}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۳۴

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geqslant ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}$$

$$f_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲x-۰}{x-۰}=۲ \text{ ۰/۲۵ },\ f_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-۲x-۰}{x-۰}=-۲ \text{ ۰/۲۵}$$

مشتق دوم در نقطه‌ی صفر وجود ندارد ۰/۲۵

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}-۰}{x-۰}=۰ \quad ۰/۲۵$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-x^{۲}-۰}{x-۰}=۰ \quad ۰/۲۵$$

۳۵

$$\left(\frac{۱}{g}\right)'(\alpha)=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{g(\alpha+h)}-\frac{۱}{g(\alpha)}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{g(\alpha)-g(\alpha+h)}{h(g(\alpha+h)g(\alpha))}$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{g(\alpha+h)g(\alpha)}\times\lim_{h\to ۰}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\frac{-۱}{g^{۲}(\alpha)}\times g'(\alpha)==\frac{-g'(\alpha)}{g^{۲}(\alpha)} \quad ۰/۲۵$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

۳۶

$$f'(۲۷)=\lim_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{x-۲۷}=\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{(x-۲۷)(\sqrt[۳]{x^{۲}}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}=\frac{۱}{۲۷}$$

۳۷

$$f'(x)=\frac{۳}{۴}(۲x-۱)(x^{۲}-x)^{-\frac{۱}{۴}}=\frac{۳(۲x-۱)}{۴\sqrt[۴]{x^{۲}-x}} \quad ۰/۲۵$$

$x^{۲}-x>۰$ ۰/۲۵

نقاط مشتق پذیری: ۰/۲۵ $(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty)$ ۰/۲۵

x	$-\infty$	۰		۱		$+\infty$
$x^{۲}-x$	+	۰	-	۰	+	۰/۲۵

۳۸

$$(cf)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a} \text{ ۰/۲۵ }=\lim_{x\to a}\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} \quad ۰/۲۵$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{c(f(x)-f(a))}{x-a}=c\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=cf'(a) \quad ۰/۲۵$$

۰/۲۵

۳۹

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)}}{h}$$

(۰/۵) (۰/۲۵)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(f(a+h)-f(a))}{h}\times\frac{1}{f(a+h)f(a)}=\frac{-f'(a)}{f^{2}(a)}$$

(۰/۵) (۰/۲۵)

۴۰

الف) $(3f+2g)(4)=3f(4)+2g(4)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (3f+2g)_{(4)}=32$ (۰/۵)

ب) $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ (۰/۲۵) $D_{fog}=\left\{x\neq 3 \mid \frac{1}{x-3}\in R\right\}$ (۰/۵) $D_{fog}=R-\{3\}$ (۰/۲۵)

۴۱

$f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(4)=\frac{5}{4}$ (۰/۲۵), $g'(f(4))=g'(2)=5$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow F'(4)=f'(4)\times g'(f(4))=\frac{25}{4}$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

۴۳ چون f و g در a مشتق‌پذیرند داریم:

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ (۰/۲۵), $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'(a)$ (۰/۲۵)

$(f.g)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(f.g)(a+h)-(f.g)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f.(a+h)-f(a)}{h}\times g(a+h)+f(a)\times\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ (۰/۲۵)

(۰/۲۵)

۴۳

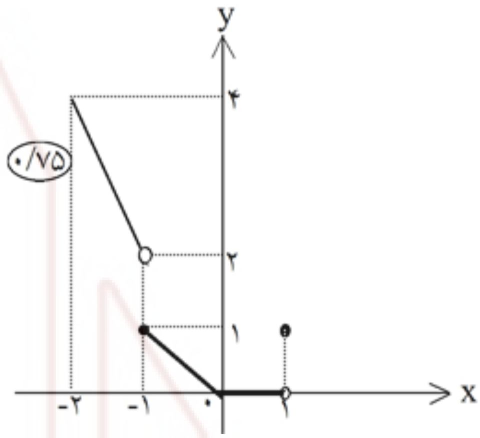
$y'=\frac{27-3x^2}{(9+x^2)^2}=0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=\pm 3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(3)=\frac{1}{2} \text{ (۰/۷۵)} \\ f(4)=\frac{12}{25}\end{cases}$ $\Rightarrow$ x = ۰ طول مینیمم مطلق (۰/۲۵) ، x = ۳ طول ماکسیمم مطلق (۰/۲۵)

غ ق ق (۰/۲۵)

۴۴ $f(x) = x[x], [-۲,۱]$

نقطه‌ی $(۰,۰)$ ، نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع است. ۰/۲۵

و برای هر $۰ < x < ۱$ ، تابع هم دارای ماکسیمم نسبی و هم دارای می‌نیمم نسبی است. ۰/۵



۴۵ $D_f = [-۱,۳] \qquad R_f = [۰,۳]$

۴۶ $(x = \text{طول و } y = \text{عرض})\ S = xy \Rightarrow xy = ۶۴ \Rightarrow y = \frac{۶۴}{x}$

$P = ۲(x+y) = ۲(x+y) = ۲\left(x + \frac{۶۴}{x}\right) = ۲x + \frac{۱۲۸}{x}$

$P' = ۲ - \frac{۱۲۸}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow y = ۸$

۴۷
$$y' = \frac{\left(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(۲x-۱)^۵ + ۵\times۲(۲x-۱)^۴\times\sqrt[۳]{x}\right)(x^۳-۴x) - (۳x^۲-۴)\sqrt[۳]{x}(۲x-۱)^۵}{(x^۳-۴x)^۲}$$

۴۸ $۲x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} \Rightarrow f\left(\frac{۵}{۲}\right) = ۰ \Rightarrow$

$۲x-۵$ یک فاکتور $f(x)$ است، به عبارت دیگر $f(x)$ بر $۲x-۵$ بخش‌پذیر است. پس:

$f(x) = (۲x-۵)(x^۲+x-۲) = (۲x-۵)(x-۱)(x+۲)$

۴۹ $D_f = R, D_g : -x \geqslant ۰ \Rightarrow x \leqslant ۰ \Rightarrow D_g = (-\infty, ۰]$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid \underbrace{x^۲ + ۱ \in (-\infty, ۰]}_{\text{غیر ممکن}}\} = \varnothing$$

چون دامنه $\emptyset$ شد، پس gof ضابطه ندارد.

۵۰ $f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱^۲ + ۱ = x_۲^۲ + ۱ \Rightarrow x_۱^۲ = x_۲^۲ \xrightarrow{x\leqslant ۰} x_۱ = x_۲ \Rightarrow$ تابع f یک به یک است

$y = x^۲+۱ \Rightarrow x^۲ = y-۱ \Rightarrow |x| = \sqrt{y-۱} \Rightarrow x = -\sqrt{y-۱} \Rightarrow y = -\sqrt{x-۱} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\sqrt{x-۱}$

دقت کنید چون در تابع f داریم، $x \leqslant ۰$ پس در تابع $f^{-۱}$ داریم $y \leqslant ۰$.

۵۱

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(x_۰ + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(۱ + \Delta x) - f(۱)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{(۱ + \Delta x)^۲ - ۲(۱ + \Delta x) - (۱^۲ - ۲\times ۱)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta x^۲}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \Delta x = ۰$$

۵۲ الف)

$$\lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{۳ - \sqrt{x + ۶}} = \frac{۰}{۰}\text{مبهم}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۳} \frac{(x^۲ - ۹)\times(۳ + \sqrt{x + ۶})}{(۳ - \sqrt{x + ۶})\times(۳ + \sqrt{x + ۶})} = \lim_{x \to ۳} \frac{(x + ۳)(x - ۳)(۳ + \sqrt{x + ۶})}{۹ - (x + ۶)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۳} \frac{(x + ۳)(x - ۳)(۳ + \sqrt{x + ۶})}{-(x - ۳)} = \lim_{x \to ۳} \frac{(x + ۳)(۳ + \sqrt{x + ۶})}{-۱} = -۳۶$$

ب)

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ - ۲x} = \frac{۰}{۰}\text{مبهم}$$

صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. سپس عامل صفرکننده یعنی $x - ۲$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{(x - ۲)(x - ۱)}{x(x - ۲)} = \lim_{x \to ۲} \frac{(x - ۱)}{x} = \frac{۱}{۲}$$

پ)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \operatorname{tg}^۲ x = +\infty$$

ت)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^۳\left(۴ - \frac{۱}{x^۳}\right)}{x\left(۱ + \frac{۲}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} x^۲ = +\infty$$

۵۳ طول هر نقطه روی محور عرض‌ها برابر صفر است.

نقطه تقاطع $A = (۰, -۱)$

$A \in y = ax^۲ + x + b \to -۱ = b$

$A \in y = x + ۳a \to -۱ = ۳a \to a = -\frac{۱}{۳}$

۵۴ الف)

$$(f - ۲g)(x) = f(x) - ۲g(x) = x^۲ + ۳ - ۲\sqrt{x - ۱}$$

$$\Rightarrow (f - ۲g)(۵) = ۵^۲ + ۳ - ۲\sqrt{۵ - ۱} = ۲۸ - ۲\times ۲ = ۲۴$$

ب)

$$\operatorname{fog}(x) = f(g(x)) = [g(x)]^۲ + ۳ = |x - ۱| + ۳$$

$\operatorname{fog}(x) = x - ۱ + ۳ = x + ۲ \Rightarrow D_{\operatorname{fog}} = \{x \in D_g | (g(x)) \in D_f\}$

$D_f : R \quad D_{\operatorname{fog}} : \{ x \geq ۱ |\ g(x) \in D_f\}$

با توجه به دامنه: $D_g : x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \quad D_{\operatorname{fog}} : \{ x \geq ۱ | \sqrt{x - ۱} \in R\} = [۱, +\infty)$

۵۵ منحنی محور x ها را در نقطه‌ای به عرض ۰ و محور y ها را در نقطه‌ای به طول صفر قطع می‌کند.

$B(-۱, ۰)$ محل تلاقی با محور x ها

$C(۰, ۲)$ محل تلاقی با محور y ها

A روی منحنی است. پس مختصات نقطه A در ضابطه سهمی صدق می‌کند.

$A \in \text{سهمی} \Rightarrow ۶ = a\times(۱)^۲ + b\times(۱) + c \Rightarrow a + b + c = ۶$

$B \in \text{سهمی} \Rightarrow ۰ = a\times(-۱)^۲ + b\times(-۱) + c \Rightarrow a - b + c = ۰$

$C \in \text{سهمی} \Rightarrow ۲ = a\times(۰)^۲ + b\times(۰)^۲ + c \Rightarrow c = ۲$

$$\begin{cases} a + b + ۲ = ۶ \\ a - b + ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۴ \\ a - b = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱ \\ b = ۳ \end{matrix}$$

$$f(x)=\frac{۴-۳x-x^{۲}}{x-۲} \Rightarrow y'=\frac{(-۳-۲x)(x-۲)-(۴-۳x-x^{۲})}{(x-۲)^{۲}}=\frac{-۳x+۶-۲x^{۲}+۴x-۴+۳x+x^{۲}}{(x-۲)^{۲}}$$ ۵۶

$$\Rightarrow y'=\frac{-x^{۲}+۴x+۲}{(x-۲)^{۲}}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(x+\Delta x)^{۲}+۱-x^{۲}-۱}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{x^{۲}+۲x\Delta x+\Delta x^{۲}-x^{۲}}{\Delta x}$$ ۵۷

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta x(۲x+\Delta x)}{\Delta x}=۲x$$

$$\begin{cases} f(x)=x^{۲} \\ g(x)=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \text{fog}\,(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^{۲} \to D_{\text{fog}\,(x)}=x\geqslant ۰$$ ۵۸

$D_f: R \qquad D_g: x\geqslant ۰$

$D_{\text{fog}}: \{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$

$\{x\geqslant ۰, \sqrt{x}\in R\}\Rightarrow x\geqslant ۰$

$$c\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. \to c=-۱ \quad x=۲\to y=x+۱\Rightarrow \left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right. \quad x=۱\to y=x+۱\Rightarrow \left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$$ ۵۹

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c\to A[۲,۲+۱], B[۱,۱+۱]\to A[۲,۳], B[۱,۲], C[۰,-۱]$$

$$\begin{cases} A[۲ \text{ و } ۳]\to ۴a+۲b+c=۳ \\ B[۱ \text{ و } ۲]\to a+b+c=۲ \end{cases} \Rightarrow -۴\begin{cases} ۴a+۲b=۴ \\ a+b=۳ \end{cases} \to \begin{cases} ۴a+۲b=۴ \\ -۴a-۴b=-۱۲ \end{cases} \Rightarrow a=-۱, b=۴$$

$$n=۲\to \lim_{x\to+\infty}\frac{(۳-b)x^{۲}}{۲x^{۲}}=۱\to \frac{۳-b}{۲}=۱\to b=۱$$ ۶۰

$$\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۳)}{(x-۲)^{۲}}=\frac{۲+۳}{(۲-۲)^{۲}}=\frac{۵}{۰^{+}}=+\infty$$ ۶۱

$$\left.\begin{matrix} x+y=۱۰۰ \\ y=۱۰۰-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow S=x.y\Rightarrow S=x(۱۰۰-x)\Rightarrow S=۱۰۰x-x^{۲}\Rightarrow S'=۱۰۰-۲x=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۵۰ \\ y=۵۰ \end{cases}$$ ۶۲

$$y'=\frac{۳x^{۲}+۳+۶x}{۳\sqrt[۳]{(x^{۳}+۳x+۳x^{۲}+۱)^{۲}}}$$ ۶۳

راه دوم : $y=\sqrt[۳]{x^{۳}+۳x+۳x^{۲}+۱}=\sqrt[۳]{(x+۱)^{۳}}=(x+۱)\Rightarrow y'=۱$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{۱-\cos^{۲}x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sin^{۲}x}=\frac{۱}{۰^{+}}=+\infty$$ ۶۴

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{۲-x}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x+۲}-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}{(۲-x)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{(۲-x)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\frac{-۱}{۴}$$ ۶۵

$$\lim\frac{۲x}{(x+۱)^{۲}}=\frac{-۲}{۰^{+}}=-\infty$$ ۶۶

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۲}-۱+۳x}{۸x+x^{۲}-۶}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۲}}{x^{۲}}=۲$$ ۶۷

۶۸

الف)

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+۳} \\ g(x) &= ۴-x \end{aligned}\right\} h(x) = f(x) - ۲g(x) = \sqrt{x+۳} - ۲(۴-x)$$

$$h(۱) = \sqrt{۱+۳} - ۲(۴-۱) \rightarrow h(۱) = -۴$$

$$D_g = R \ , D_f = [-۳, +\infty)$$

ب) $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid ۴-x \geqslant -۳\}$

$$= \{x \in R \mid x \leqslant ۷\} \Rightarrow D_{fog} = \{x \mid x \in R, x \leqslant ۷\}$$

۶۹

$$\begin{cases} y = u^n \Rightarrow y' = nu'u^{n-۱} \\ y = (۴x^۲ - x)^۳ \Rightarrow y' = ۳(۸x-۱)(۴x^۲-x)^۲ \end{cases}$$

۷۰

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{۴x + x^۲ + ۴}{۲x^۲ + ۵x - ۳} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^۲}{۲x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

۷۱

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(۲x+۱)(x+۲)^۲}{۵x^۲ + ۲x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x^۳}{۵x^۲} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x}{۵} = \pm\infty$$

۷۲

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+} \operatorname{tg}^۲ x = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+} \frac{\operatorname{Sin}^۲ x}{\operatorname{Cos}^۲ x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

۷۳

$$\lim_{x\to۲} \frac{x^۲ - ۴}{x^۲ - ۹x + ۱۴} = \lim_{x\to۲} \frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(x-۷)} = -\frac{۴}{۵}$$

۷۴

$$f(x-۱) = x^۲ \xrightarrow[x=t+۱]{x-۱=t} f(t) = (t+۱)^۲$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+۱)^۲ \Rightarrow f(۱) = ۴$$

۷۵

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to۰} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to۰} \frac{(x+\Delta x)^۲ - ۲(x+\Delta x) - x^۲ + ۲x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to۰} \frac{x^۲ + ۲x\Delta x + \Delta x^۲ - ۲x - ۲\Delta x - x^۲ + ۲x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to۰} \frac{\Delta x(۲x + \Delta x - ۲)}{\Delta x} = ۲x - ۲$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x - ۲ \Rightarrow f'(۱) = ۰$$

راه ۲ : $\lim_{x\to۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to۱} \frac{x^۲ - ۲x + ۱}{x-۱} = \lim_{x\to۱} \frac{(x-۱)^۲}{x-۱} = \lim_{x\to۱} (x-۱) = ۰$

۷۶

$$f(x+۳) = \frac{۲x}{x-۱} \xrightarrow[x=t-۳]{x+۳=t} f(t) = \frac{۲(t-۳)}{t-۳-۱} \Rightarrow f(x) = \frac{۲x-۶}{x-۴}$$

$$\xrightarrow{x=-۳} f(-۳) = \frac{-۶-۶}{-۷} = \frac{-۱۲}{-۷} \Rightarrow f(-۳) = \frac{۱۲}{۷}$$

۷۷

$$(۱,-۲) \Rightarrow y = x^۳ + ax + b \Rightarrow -۲ = ۱ + a + b \Rightarrow a + b = -۳$$

$$y' = ۳x^۲ + a \Rightarrow ۰ = ۳(۱)^۲ + a \Rightarrow a = -۳, b = ۰$$

۷۸

$$h'(x) = ۳\left(-\frac{۲}{x^۲} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)\left(\frac{۲}{x} + \sqrt{x}\right)^۲$$

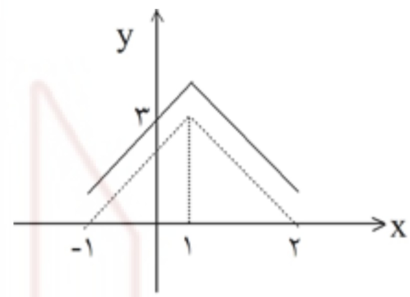
۷۹

$$\lim_{x\to۰^-} \operatorname{Cotg}^۲ x = (-\infty)^۲ = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-۳x^{۲}}{۲x^{۲}}=\dfrac{-۳}{۲}$ ۸۰

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^{۲}\left(۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right)}}{x-۱}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{\left(۱+\frac{۱}{x^{۲}}\right)}}{x\left(۱-\frac{۱}{x}\right)}=\dfrac{-x}{x}=-۱$ ۸۱

$\lim\limits_{x\to۱}\dfrac{(x-۱)(۵x+۶)}{۳(x-۱)(۳x+۴)}=\dfrac{۵+۶}{۳(۳+۴)}=\dfrac{۱۱}{۲۱}$ ۸۲



۸۳

ابعاد مستطیل $x,y=\dfrac{۴-x}{۲}$ مساحت $S=x\left(\dfrac{۴-x}{۲}\right)=۲x-\dfrac{x^{۲}}{۲}\Rightarrow S'=۲-x=۰\quad x=۲,y=۱$ ۸۴

$\lim\limits_{x\to(-\infty)}\dfrac{\left(\sqrt{x^{۲}+۲x}-\sqrt{x^{۲}-۲x}\right)\left(\sqrt{x^{۲}+۲x}+\sqrt{x^{۲}-۲x}\right)}{\sqrt{x^{۲}+۲x}+\sqrt{x^{۲}-۲x}}=\dfrac{x^{۲}+۲x-x^{۲}+۲x}{\sqrt{x^{۲}}+\sqrt{x^{۲}}}$ ۸۵

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۴x}{-x-x}=-۲$

خیر زیرا: $f^{-۱}of:D_f\to D_f$ ۸۶

$fof^{-۱}:R_f\to R_f$

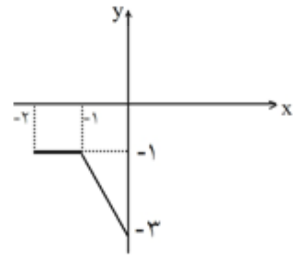
چون: $D_f\neq R_f=D_{f^{-۱}}$ پس $fof^{-۱}\neq f^{-۱}of$

$y=(x^{۳}-۷x)^{\frac{۲}{۵}}\Rightarrow y'=\dfrac{۲}{۵}(x^{۳}-۷x)'(x^{۳}-۷x)^{-\frac{۳}{۵}}\to y'=\dfrac{۲}{۵}(۳x^{۲}-۷)\dfrac{۱}{\sqrt[۵]{(x^{۳}-۷x)^{۳}}}$ ۸۷

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(۲x-\sqrt{۴x^{۲}+۴x}\right)\times\dfrac{\left(۲x+\sqrt{۴x^{۲}+۴x}\right)}{\left(۲x+\sqrt{۴x^{۲}+۴x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۴x^{۲}-۴x^{۲}-۴x}{۲x+\sqrt{۴x^{۲}+۴x}}$ ۸۸

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-۴x}{۲x+۲\sqrt{x^{۲}+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-۲x}{x+|x|\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-۲x}{x\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-۲}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}}=-۱$

$D_g=[-۲,۰]\,,R_g=[-۳,-۱]$ ۸۹



$۲(x+y)=۲۰۰\to x+y=۱۰۰\to y=۱۰۰-x(I)$ ۹۰

$S=\text{xy}\xrightarrow{\text{از}\,(I)} x(۱۰۰-x)=۱۰۰\text{x}-x^۲$

$\Rightarrow S(x)=-x^۲+۱۰۰\text{x}$ تابع مساحت بر حسب متغیر x :

$S'(x)=۱۰۰-۲\text{x}\xrightarrow{s'(x)=۰} x=۵۰$

$\xrightarrow{\text{در}\,(I)} y=۵۰$

$D_f=R-\{۱\}\qquad D_g=[-۲,+\infty)$ ۹۱

$D_{\text{gof}}=\{x\mid x\in D_f,f(x)\in \text{D}_g\}$

$=\left\{x\mid x\in R-\{۱\},\dfrac{۱}{x-۱}\in\left[-۲,+\infty\right)\right\}=\left\{x\mid x\neq ۱,\dfrac{۱}{x-۱}\geqslant -۲\right\}$

$\dfrac{۱}{x-۱}\geqslant -۲\Rightarrow \dfrac{۱}{x-۱}+۲\geqslant ۰\Rightarrow \dfrac{۱+۲\text{x}-۲}{x-۱}\geqslant ۰\Rightarrow \dfrac{۲\text{x}-۱}{x-۱}\geqslant ۰$

$x\in\left(-\infty,\dfrac{۱}{۲}\right]\cup(۱,+\infty)$

$\Rightarrow D_{\text{gof}}=\left\{x\neq +۱,x\in\left(-\infty,\dfrac{۱}{۲}\right]\cup(۱,+\infty)\right\}=\left(-\infty,\dfrac{۱}{۲}\right]\cup(۱,+\infty)$

$\text{gof}\,(x)=g\left(\dfrac{۱}{x-۱}\right)=\sqrt{\dfrac{۱}{x-۱}+۲}=\sqrt{\dfrac{۲\text{x}-۱}{x-۱}}$

X	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		۱		$+\infty$
$\dfrac{۲\text{X}-۱}{\text{X}-۱}\geqslant ۰$		+	•	—	ت.ن	+	

$f(x)=|x^۲-۳\text{x}|\qquad x_۰=۳$ ۹۲

$f'(۳)=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{|x^۲-۳\text{x}|-۰}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{|x(x-۳)|}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{|x|.|x-۳|}{x-۳}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{|x|.|x-۳|}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{|x|\times(x-۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}|x|=|۳|=۳\\ \lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{|x|.|x-۳|}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{|x|\times(-(x-۳))}{x-۳}=-\lim\limits_{x\to ۳}|x|=-|۳|=-۳\end{cases}$$

لذا f در نقطه‌ی $x_۰=۳$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

$\lim\limits_{x\to ۲}\left(\dfrac{۱}{x-۲}-\dfrac{۴}{x^۲-۴}\right)=\lim\limits_{x\to ۲}\left(\dfrac{۱}{x-۲}-\dfrac{۴}{(x-۲)(x+۲)}\right)=\lim\limits_{x\to ۲}\left(\dfrac{(x+۲)-۴}{(x-۲)(x+۲)}\right)$ ۹۳

$\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{x+۲}=\dfrac{۱}{۲+۲}=\dfrac{۱}{۴}$

۹۴

$$f(x)=\sqrt{x-۳} \qquad D_f: x-۳\geqslant ۰ \Rightarrow x\geqslant ۳ \Rightarrow D_f=\Big[۳,+\infty\Big)$$

$$g(x)=\frac{x+۱}{x-۱} \qquad D_g: x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_g=R-\{۱\}$$

$$D_{\text{gof}}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\Big\{x\in\Big[۳,+\infty\Big) \Big| \sqrt{x-۳}\in R-\{۱\}\Big\}=\Big[۳,+\infty\Big)-\{۴\}=\Big[۳,۴\Big)\cup(۴,+\infty)$$

$$\text{gof}=g(f(x))=g(\sqrt{x-۳})=\frac{\sqrt{x-۳}+۱}{\sqrt{x-۳}-۱}$$

$$D_{\text{fog}}:[۳,۴)\cup(۴,+\infty)$$

۹۵

$$x^۲+y^۲=۵\Rightarrow y=\sqrt{۵-x^۲}$$

$$f(x)=\text{محیط}=۲(۲\text{x}+y)=۲(۲\text{x}+\sqrt{۵-x^۲})\Rightarrow f'(x)=۲\left(۲-\frac{۲\text{x}}{۲\sqrt{۵-x^۲}}\right)=۰$$

$x=۲, y=۱$ ابعاد مستطیل ۲ و ۱ است

۹۶

$$a-b=۱۰\Rightarrow a=b+۱۰$$

$$P=ab=(b+۱۰)b=b^۲+۱۰b\Rightarrow P'=۲b+۱۰=۰\Rightarrow b=-۵, a=۵$$

۹۷

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲-۲\text{x}}-x)(\sqrt{x^۲-۲\text{x}}+x)}{\sqrt{x^۲-۲\text{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۲x}{x\left(\sqrt{۱-\frac{۲}{x}}\right)+x}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

۹۸

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۵\text{x}+\sqrt{x^۲+۷}}{۲\text{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵\text{x}+|x|}{۲\text{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵\text{x}+x}{۲\text{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۶\text{x}}{۲\text{x}}=۳$$

۹۹ برای این‌که f روی R مشتق‌پذیر باشد، باید در $x=۲$ نیز مشتق‌پذیر باشد. ضمناً اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته نیز است.

الف) $f(۲)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)\Rightarrow ۲a-b=۲$

ب) $f'_{۲^-}=f'_{۲^+}\Rightarrow a=۴, b=۶$

۱۰۰

$$\text{D}_\text{f}=\Big[\frac{۱}{۲},+\infty)\ ,\ \text{R}_\text{f}=\Big[۰,+\infty)$$

$$\sqrt{۲x_۱-۱}=\sqrt{۲x_۲-۱}\Rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک‌به‌یک است و بنابراین معکوس‌پذیر است.

$$y=\sqrt{۲x-۱}\Rightarrow y^۲=۲x-۱\Rightarrow x=\frac{y^۲+۱}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۱}{۲}, x\geq ۰$$