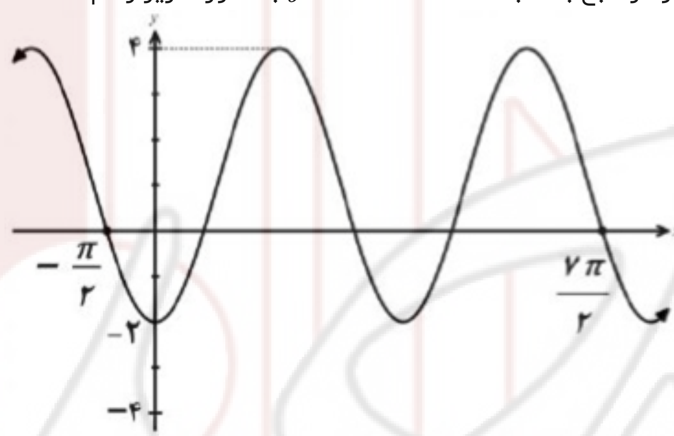
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
دبیرستان غیردولتی پسرانه مُوحد
منطقه ۵ شهر تهران

پایه : دوازدهم رشته : ریاضی	**نمونه سوالات** **نام درس :** حسابان ۲	نام استاد : آقای پناهی فر

۱ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت درنظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -۴t^۲ + ۴۰t$ به دست می‌آید.
الف) سرعت متوسط در بازه $[۲, ۴]$ را بیابید.
ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

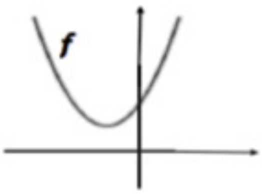
۲ نمودار تابع با ضابطه $y = a\,\mathrm{Cos}\,\mathrm{bx} + c$ به صورت زیر رسم شده است. مقدار a، b و c را به دست آورید.

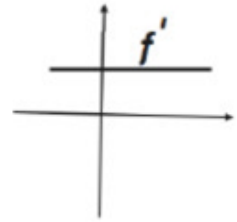


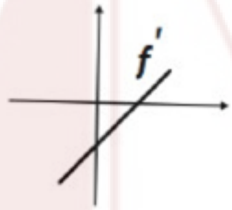
۳ فرض کنید $f(x) = \frac{\mathrm{ax}+b}{\mathrm{cx}+d}$، محل تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(۲, ۱)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-۱, ۰)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

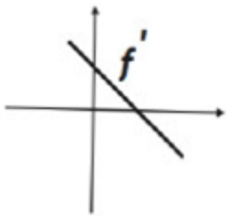
۴ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

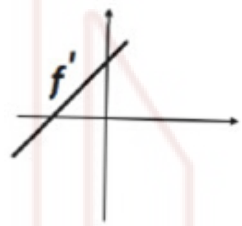
۵ با توجه به نمودار تابع f، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۱)


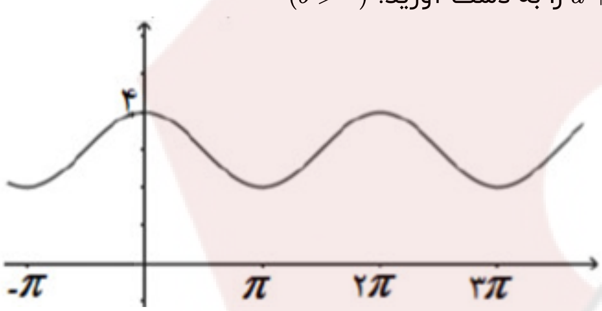
۲)


۳)


۴)


۶ معادله مثلثاتی $\text{Cos}\,۲x - \text{Cos}\,x + ۱ = ۰$ را در بازه $۰ \le x \le \pi$ حل کنید.

۷ نمودار تابع $f(x) = a + \text{Cos}\,\text{bx}$ به صورت مقابل است. حاصل $a + b$ را به دست آورید. $(b > ۰)$



۸ معادله مقابل را حل کنید. $\text{Cos}\,۲x - ۳\,\text{Sin}\,x + ۴ = ۰$

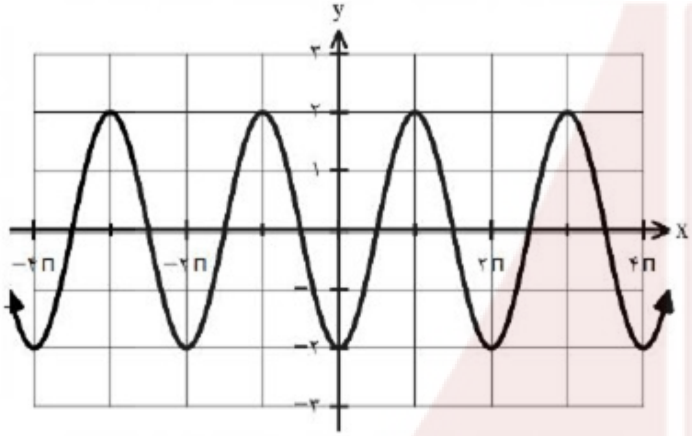
۹ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \dfrac{x + ۳}{۱ - x}$ رسم کنید.

۱۰ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^۳ + \text{ax} - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(۱, ۲)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.

۱۱ ضابطه تابعی به فرم $y = a\,\text{Cos}\,\text{bx} + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن ۲- باشد.

۱۲ معادله مثلثاتی $\text{Cos}\,۲x - \text{Sin}\,x + ۱ = ۱$ را حل کنید.

۱۳ نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x)=a\operatorname{Cos}\mathrm{bx}+c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن‌را مشخص کنید.



۱۴ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x+۱}{۹-x^۲}$ برابر با $-\infty$ است.

۱۵ معادله‌ی مثلثاتی $\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x=\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}$ را حل کرده و جواب‌های کلی آن‌را بنویسید.

۱۶ ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع <u>یک متر</u> را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x بر می‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

۱۷ درست یا نادرست بودن عبارت زیر را تعیین کنید.

اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(\mathrm{kx})$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.

۱۸ معادله $۲\operatorname{Cos}^۲x-۳\operatorname{Cos}x+۱=۰$ را حل کنید.

۱۹ نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)=\operatorname{Sin}^۲x+۲\operatorname{Cos}x$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ به دست آورید.

۳۰ طول نقاط عطف منحنی تابع $y=\dfrac{۱}{۱+x^۲}$ را در صورت وجود، به دست آورید.

۳۱ اگر $f(x)=۲\mathrm{x}^۴+۱$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}}$ باشند، مشتق تابع fog را در $x=۰$ بیابید.

۳۲ برای تابع زیر $D_{f'}$ را مشخص کنید.

$$f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

۳۳ مختصات نقاط ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی و نقطه‌ی عطف تابع به معادله‌ی $y=x^۳-۳\mathrm{x}^۲+۳$ را تعیین کنید.

۲۴ مشتق تابع زیر را به‌دست آورید. $g(x) = \text{Sin}\,\sqrt{x}.\,\text{Cos}\,2\text{x}$

۲۵ می‌نیمم مطلق را در صورت وجود مشخص کنید.

۲۶ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی را در صورت وجود مشخص کنید.

۲۷ حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2\text{x}}-\sqrt{x^2-2\text{x}}\right)$$

۲۸ جنگلبانی می‌خواهد محوطه مستطیل شکلی جلوی محل سکونت خود بسازد. برای این منظور مقدار ۱۲۰ متر مربع سیم توری به ارتفاع یک متر برای حصارکشی سه طرف محوطه در اختیار دارد. طول و عرض محوطه مستطیل شکل را چگونه انتخاب کند تا مساحت محصور شده ماکزیمم شود؟

۲۹ مقادیر ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3\text{x}^4 - 8\text{x}^3$ را در بازه‌ی $[1, 3]$ بیابید.

۳۰ اگر g در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر و در یک همسایگی a مخالف صفر باشد آن‌گاه تابع $\frac{1}{g}$ نیز در a مشتق‌پذیر است و داریم

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

۳۱ سهمی به معادله‌ی $f(x) = \text{ax}^2 + \text{bx} + c$ مفروض است، مقادیر c, b, a را طوری بیابید که این سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند و از نقطه‌ی $M(1, 4)$ نیز بگذرد.

۳۲ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{2}{x}$ را در $x = 3$ حساب کنید.

۳۳ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \text{x}|\text{x}|$ و مشتق دوم آن را در نقطه‌ی $x = 0$ بررسی کنید.

۳۴ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $y = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ی $x = 27$ بیابید.

۳۵ تابع $f(x) = (x^2 - x)^{\frac{3}{4}}$ در چه نقاطی مشتق پذیر است؟

۳۶ اگر f تابع مشتق‌پذیری در نقطه‌ی a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است و $(\text{cf})'(a) = \text{cf}\,'(a)$.

۳۷ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ را در $x = 2$ حساب کنید.

۳۸ معادله‌ی $\tan x \tan 2\text{x} = 1$ را حل کنید.

۳۹ قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

۴۰ با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال، حد تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\frac{1}{x}$$

۴۱ a و b را چنان تعیین کنید که $A(1,3)$ نقطه‌ی عطف نمودار $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ باشد.

۴۲ نمودار تابع $f(x-2)+1$ را به کمک انتقال، رسم نموده، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۴۳ ابعاد مستطیلی را بیابید که مساحت آن ۶۴ مترمربع بوده و محیط آن می‌نیمم باشد.

۴۴ مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}(2x-1)^5}{x^3-4x}$$

۴۵ معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=x^3-3x+1$ را در نقطه‌ی عطف آن بنویسید.

۴۶ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\leqslant \frac{\pi}{2}\\ ax-b & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$ مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که این تابع در $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر باشد.

۴۷ اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-1$ و $x+2$ به ترتیب برابر ۱ و ۴ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $p(x)$ بر x^2+x-2 را حساب کنید.

۴۸ تابع $f(x)=ax^2+bx+4$ داده شده است. ضرایب a و b را چنان بیابید که نقطه $(-1,5)$ ماکسیمم یا مینیمم این تابع باشد.

۴۹ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست.)

الف) $y=\sin^2 5x$

ب) $y=3x^2(x^3-4x)$

پ) $y=\dfrac{1}{x^2+4x-5}$

ت) $y=\sqrt{x^3-3x+5}$

۵۰ حد توابع زیر را محاسبه کنید:

الف) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3-\sqrt{x+6}}$

ب) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$

پ) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}^2 x$

ت) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3-1}{x+2}$

۵۱ نمودار تابع $y=(x+2)(x-1)^2$ را رسم کنید.

۵۲ توپی را با سرعت اولیه ۲۰ متر در ثانیه به‌طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت، از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، معادله حرکت به شکل $x = f(t) = -۴/۹t^۲ + ۲۰t$ است. مطلوب است محاسبه:
الف) سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاپ؟
ب) سرعت متوسط توپ از لحظه پرتاب تا پایان ثانیه دوم ($t = ۰$ تا $t = ۲$)؟

۵۳ حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x+۱}{x+\sqrt{x+۲}}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۲-۲x+۱}{۲x^۲+x-۳}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\operatorname{tg}۲x.\operatorname{tg}۳x.\operatorname{tg}۴x}{x^۳}$ ت) $\lim\limits_{x\to -۲^+} \dfrac{x-۵}{x+۲}$ ث) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۴x^۲-۱}{۳-۲x^۲}$

۵۴ نمودار تابع $y = -x^۲ + ۲x - ۳$ را رسم کنید.

۵۵ تابع $f(x) = x^۲ - x + ۱$ را در نظر بگیرید:
الف) آهنگ متوسط تغییر تابع f را وقتی متغیر از $x_۱ = ۱$ به $x_۲ = ۵$ تغییر کند، به‌دست آورید.
ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه $x = ۳$ تعیین کنید.

۵۶ حد توابع زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to -۳} \dfrac{۲x^۲+x-۱۵}{۳x^۲+۱۳x+۱۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{-۵x^۲}{x^۲-۱}$ پ) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{Sin}(x-a)}{x^۲-a^۲}$ ث) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+۳}{x^۲-۵x}$

۵۷ از تابع مقابل مشتق بگیرید: $f(x) = \dfrac{۴-۳x-x^۲}{x-۲}$

۵۸ مشتق تابع زیر را به دست آورید. $y = (x+۱)(۲x-۱)^۳$

۵۹ حد تابع زیر را حساب کنید. $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x+۳}{(x-۲)^۲}$

۶۰ طول و عرض مستطیلی را بدست آورید که محیط آن ۲۰۰ متر بوده و مساحت آن ماکزیمم باشد.

۶۱ مشتق تابع داده شده را بدست آورید. (ساده کردن لازم نیست) $y = \sqrt[۳]{x^۳+۳x+۳x^۲+۱}$

۶۲ حد زیر را حساب کنید: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{۲x^۲-۱+۳x}{۸x+x^۲-۶}$

۶۳ دو تابع $y = -x+b, y = x^۲+ax-۳b$ داده شده‌اند، a و b را محاسبه کنید به طوری که نمودارهای این دو تابع روی محور x در نقطه‌ای به طول (۱-) همدیگر را قطع کنند.

۶۴ مشتق تابع زیر را بدست آورید. $y = \operatorname{tg}x.\operatorname{Cotg}۲x$

۶۵ حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x+1)(x+2)^2}{5x^2+2x}$$

۶۶ حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\operatorname{tg}^2 x$$

۶۷ حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

۶۸ اگر $f(x-1)=x^2$ آن‌گاه $f(x)$ را به دست آورید. سپس $f(1)$ را بیابید.

۶۹ متحرکی که بر محور xها در حرکت است دارای معادله‌ی حرکت $x=3t^2-4t+1$ می‌باشد. (t بر حسب ثانیه و x بر حسب سانتی‌متر)

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t=1$ تا $t=3$ به دست آورید.

ب) سرعت لحظه‌ای آن را در زمان $t=2$ به دست آورید.

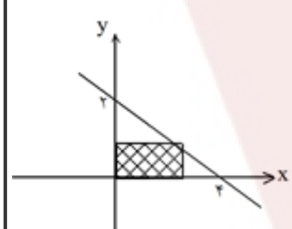
۷۰ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست)

$$g(x)=2\operatorname{Sin}^3 x+\operatorname{Cos} x^2$$

۷۱ حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2-\sqrt{x+1}}{2x^2+5x}$$

۷۲ مستطیلی به محورهای x و y و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{4-x}{2}$ محدود شده است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟



۷۳ مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$ را در $x_0=0$ بررسی کنید.

۷۴ حد مقابل را در صورت وجود تعیین کنید:

$$\lim_{x\to(-\infty)}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$$

۷۵ حد مقابل را در صورت وجود تعیین کنید:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x+3}{x^2+2x-3}$$

۷۶ تابع $y=ax^3+bx^2+cx+d$ مفروض است. ضرایب d,c,b,a را چنان بیابید که $M(1,2)$ اکسترمم تابع بوده و نقطه‌ی عطف منحنی بر مبدا مختصات منطبق باشد.

۷۷ مشتق‌پذیری تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{(x-1)^2(x+2)}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

۷۸ از معادله‌ی روبرو مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نمی‌باشد) $y = ۵\,\mathrm{Sin}^{۳}(۲\mathrm{x}-۱) + \mathrm{Cotg}\,\sqrt{x}$

۷۹ حد مقابل را حساب کنید: $\lim\limits_{x \to +\infty} ۲\mathrm{x} - \sqrt{۴\mathrm{x}^{۲} + ۴\mathrm{x}}$

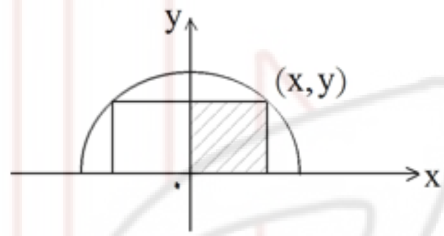
۸۰ تابع $y = \mathrm{ax}^{۳} + \mathrm{bx}^{۲} + \mathrm{cx} + d$ مفروض است. ضرایب d, c, b, a را چنان بیابید که $M(۱,۲)$ نقطه ماکزیمم تابع بوده و نقطه‌ی عطف منحنی بر مبدا مختصات منطبق باشد.

۸۱ اگر $f'(x) = x^{۲} + x$ باشد، مشتق $y = f(\mathrm{Sin}\,x)$ را محاسبه کنید. (y'_x)

۸۲ حد مقابل را محاسبه کنید: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^{۲} + ۳\mathrm{x} - ۵} - x$

۸۳ حد مقابل را محاسبه کنید: $\lim\limits_{x \to ۲} \left(\frac{۱}{x-۲} - \frac{۴}{x^{۲}-۴} \right)$

۸۴ نیم‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۵}$ مفروض است. مطابق شکل زیر مستطیلی در آن محاط می‌کنیم ابعاد مستطیل را چنان بیابید که محیط مستطیل ماکزیمم باشد.



۸۵ معادله‌ی مثلثاتی روبه‌رو را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید. $\mathrm{Cos}\,۲\mathrm{x} - \mathrm{Cos}\,x + ۱ = ۰$

۸۶ تابع درجه‌ی سوم $y = \mathrm{ax}^{۳} + \mathrm{bx}^{۲} + \mathrm{cx} + d$ مفروض است. ضرایب d, c, b, a را طوری بیابید که نقطه‌ی $M(۰,۲)$ اکسترمم منحنی تابع و $F(۱,۰)$ مرکز تقارن آن باشد.

۸۷ باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x+۱$ و $x-۱$ به ترتیب ۱ و ۳ می‌باشد. باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ را بر $x^{۲}-۱$ به دست آورید.

۸۸ دو عدد حقیقی چنان بیابید که تفاضلشان ۱۰ بوده و حاصل‌ضرب‌شان مینیمم گردد.

۸۹ الف) نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را به کمک نقطه‌یابی رسم کنید.
ب) به کمک انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x+۱}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

۹۰ حد تابع مقابل را در صورت وجود به دست آورید. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^{۲} - ۲\mathrm{x}} - x\right)$

۹۱ حد تابع مقابل را در صورت وجود به دست آورید. $\lim\limits_{x \to ۱^{-}} \frac{x^{۳} - ۴\mathrm{x} + ۳}{x^{۳} - ۳\mathrm{x} + ۲}$

۹۳ مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $M(۱,۲)$ یکی از نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $y=\dfrac{x^۲+۳}{ax+b}$ باشد.

۹۳ مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$y=\cos^۳ x+\operatorname{tg}\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)$$

۹۴ حد تابع مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+\sqrt{x^۲+۷}}{۲x+\sqrt{x}}$$

۹۵ در تابع $y=\frac{۱}{۴}mx^۳-x^۲-x$ حدود m را چنان تعیین کنید که تابع همواره نزولی باشد.

۹۶ معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $y=\sqrt{۴+\cos x}$ را در $\left(\frac{\pi}{۲},۲\right)$ بنویسید.

۹۷ مشتق بگیرید (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$y=\left(\frac{۵x-۷}{۱+x^۲}\right)^۳-\operatorname{tg}(۱-۲x)$$

۹۸ جدول تغییرات و نمودار تابع $y=x^۳-۳x$ را رسم کنید، سپس مختصات نقطه عطف و نقاط بحرانی تابع را تعیین کنید.

۹۹ مشتق توابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $y=\dfrac{\sqrt{۲x}}{x^۲+۱}$

ب) $y=\sin x+\sqrt[۵]{\cos x}$

ج) $y=۵x(x^۲-x+۱)^۳$

۱۰۰ حدود زیر را درصورت وجود تعیین کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $\displaystyle\lim_{x\to۱}\frac{x^۳-۳x^۲+۲}{x^۲-۱}$

ب) $\displaystyle\lim_{x\to۰}\frac{\sin ax-\sin bx}{ax-bx}$

ج) $\displaystyle\lim_{x\to۲^+}\frac{[x]-۲}{\sqrt{x-۲}}$

د) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-۱}{\sqrt{۴x^۲+x+۱}}$

۱ الف) $\text{سرعت متوسط} = \dfrac{h(۴)-h(۲)}{۴-۲} = \dfrac{۹۶-۶۴}{۲} = ۱۶$

ب) $h'(t) = -۸t + ۴۰ = ۱۶ \Rightarrow t = ۳$

۲ $۲T = \dfrac{۷\pi}{۲} - \left(-\dfrac{\pi}{۲}\right) = ۴\pi \Rightarrow T = ۲\pi \Rightarrow \dfrac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \Rightarrow b = \pm ۱$

$c = \dfrac{۴+(-۲)}{۲} = ۱$

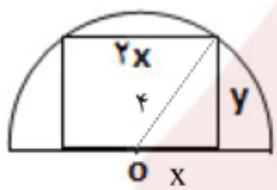
$\left.\begin{array}{l} |a| = \frac{۴-(-۲)}{۲} = ۳ \\ x = ۰ \text{ در} \\ \text{مینیمم دارد} \Rightarrow a < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a = -۳$

۳ $\text{cx} + d = ۰ \Rightarrow d = -۲c$

$(-۱, ۰) \Rightarrow \dfrac{-a+b}{-c+d} = ۰ \Rightarrow a = b$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\text{ax}}{\text{cx}} = ۱ \Rightarrow a = c$

$f(x) = \dfrac{x+۱}{x-۲}$

۴ 

$y^۲ = ۱۶ - x^۲ \Rightarrow S(x) = ۲x(\sqrt{۱۶-x^۲})$

$S'(x) = \dfrac{۳۲-۴x^۲}{\sqrt{۱۶-x^۲}} = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۸}\,,\ y = \sqrt{۸}$

طول $۲\sqrt{۸}$ و عرض $\sqrt{۸}$ (ص ۱۲۶)

۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطه مینیمم، منفی است پس f' محور xها را در ناحیه $x < ۰$ قطع می‌کند. (ص ۱۰۰)

x		$x_S < ۰$	
f	نزولی		صعودی
f'	−	○	+

۶ $۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰$

$\begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳} \end{cases}$

۷ $\text{Max} = ۴ \Rightarrow a + ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۳$

$T = ۲\pi : \dfrac{۲\pi}{|b|} = ۲\pi \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow \quad b = ۱ \qquad a = ۳ \quad a + b = ۴$ (ص ۳۴)

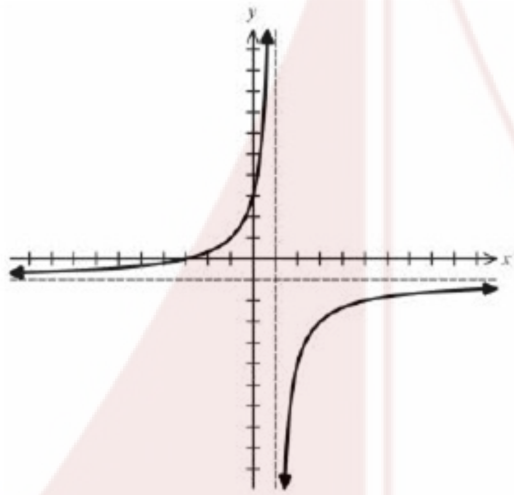
۸ $۱ - ۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۴ = ۰ \Rightarrow -۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۵ = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{۵}{۲} \quad \text{غ ق ق} \\ \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲\text{k}\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

۹

مجانب قائم $x = ۱$ و مجانب افقی $y = -۱$

نقطه بحرانی ندارد $f'(x) = \dfrac{۴}{(۱ - x)^{۲}}$



x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		+	|	+	
f	-۱ ↗	$+\infty$	|	$-\infty$ ↗	-۱

۱۰

$f(۱) = ۲ \Rightarrow a - b = ۱$

$$\begin{cases} f'(x) = ۳x^{۲} + a \\ f'(۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳, b = -۴$$

۱۱

$$\frac{۲\pi}{|b|} = ۲ \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = ۴ \\ -|a| + c = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} |a| = ۳ \\ c = ۱ \end{matrix}$$

هریک از توابع $y = -۳\operatorname{Cos}(\pi x) + ۱$ یا $y = ۳\operatorname{Cos}(\pi x) + ۱$ و یا $y = ۳\operatorname{Cos}(-\pi x) + ۱$ و یا $y = -۳\operatorname{Cos}(-\pi x) + ۱$ نوشته شود مورد قبول است.

۱۲

$$۲\operatorname{Sin}^{۲}x + \operatorname{Sin}x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Sin}x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ \operatorname{Sin}x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

۱۳

$$|a| = \frac{۲ - (-۲)}{۲} = ۲ \Rightarrow a = -۲$$

$$|b| = \frac{۲\pi}{۲\pi} = ۱ \Rightarrow b = ۱ \qquad f(x) = -۲\operatorname{Cos}x$$

$$c = \frac{۲ + (-۲)}{۲} = ۰$$

۱۴ درست (۰/۲۵)

۱۵

$$۲ \times \left(\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x = \frac{\sqrt{۴}}{۴}\right) \Rightarrow \operatorname{Sin}۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \operatorname{Sin}۲x = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۴}$$

$$۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۸}, ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۸}$$

۱۶

$$v(x) = \underbrace{(۱ - ۲x)^۲ \times x = x - ۴x^۲ + ۴x^۳}_{۰/۵}$$

$$v'(x) = \underbrace{۱ - ۸x + ۱۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}, x = \frac{۱}{۶}}_{۰/۵}$$

$X = \frac{۱}{۶}$ قابل قبول است. ۰/۲۵

صفحه: ۱۱۵

۱۷ نادرست (۰/۲۵)

۱۸

$(\operatorname{Cos} x - ۱)(۲\operatorname{Cos} x - ۱) = ۰ \quad (۰/۲۵)$

$\operatorname{Cos} x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$ و $(۰/۵) \quad \operatorname{Cos} x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad (۰/۵)$

۱۹

$$f'(x) = \underbrace{۲\operatorname{Sin}x \operatorname{Cos}x - ۲\operatorname{Sin}x = ۰}_{(۰/۵)} \rightarrow ۲\operatorname{Sin}x(\operatorname{Cos}x - ۱) = ۰$$

$\operatorname{Sin} x = ۰ \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi \ (۰/۲۵)$

$\operatorname{Cos} x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi \ \ x = ۰, ۲x \ (۰/۲۵)$

طول نقطه بحرانی: $x = \pi, x = ۰, x = ۲\pi$ (۰/۲۵)

$f(۰) = f(۲\pi) = ۲ \rightarrow (۰, ۲), (۲\pi, ۲)$ نقاط ماکسیمم مطلق (۰/۵)

$f(\pi) = -۲ \rightarrow (\pi, -۲)$ نقطه مینیمم مطلق (۰/۲۵)

۳۰

$$y' = \frac{(-۲x) \ ۰/۲۵}{(x^۲+۱)^۲ \ ۰/۲۵}, \quad y'' = \frac{۲(۳x^۲ - ۱) \ ۰/۲۵}{(x^۲+۱)^۳ \ ۰/۲۵}$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pm\sqrt{۳}}{۳}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$+\infty$
y"	+	۰	-	۰	+
y	$\cup$	عطف	$\cap$	عطف	$\cup$

۰/۵

۳۱

$$f'(x) = ۸x^۳ \ \ ۰/۲۵, \quad g'(x) = \frac{-x}{(x^۲+۳)\sqrt{x^۲+۳}} \ \ ۰/۲۵, \quad g(۰) = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \ \ ۰/۲۵$$

$$(fog)'(۰) = f'(g(۰)) \times g'(۰) = ۸\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^۳ \times ۰ = ۰ \ \ ۰/۲۵$$

۳۲

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} & x\geq ۰\\ \frac{-x}{\sqrt{x^۲+۱}} & x<۰\end{cases} \quad ۰/۲۵ \quad ,f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}\times(x^۲+۱)} & x\geqslant ۰\\ \frac{-۱}{\sqrt{x^۲+۱}\times(x^۲+۱)} & x<۰\end{cases} \quad ۰/۵$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{+}(۰)&=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{x\sqrt{x^۲+۱}}=۱ \quad ۰/۲۵\\ f'_{-}(۰)&=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x}{x\sqrt{x^۲+۱}}=-۱ \quad ۰/۲۵\end{aligned}\right\}\Rightarrow D_{f'}=R-\{۰\} \quad ۰/۲۵$$

۳۳

$$y'=۳x^۲-۶x=۳x(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۲\end{cases}$$

$y''=۶x-۶\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=۱\Rightarrow A(۱,۱)$ نقطه عطف است.

x		۰		۲	
y'	+		−		+
y	↗		↘		↗
		max ۳		-۱ min	

۳۴

$$g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\times\cos ۲x-۲\sin ۲x\times\sin\sqrt{x}$$

۳۵ وجود ندارد.

۳۶ G

۳۷

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۲x})\times(\sqrt{x^۲+۲x}+\sqrt{x^۲-۲x})}{(\sqrt{x^۲+۲x}+\sqrt{x^۲-۲x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x}{\sqrt{x^۲+۲x}+\sqrt{x^۲-۲x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{۱+\frac{۲}{x}}+\sqrt{۱-\frac{۲}{x}}\right)}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۳۸

$$۲x+y=۱۲۰\Rightarrow y=۱۲۰-۲x\Rightarrow S=xy=x(۱۲۰-۲x)=۱۲۰x-۲x^۲$$

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۱۲۰}{۴}=۳۰\Rightarrow y=۱۲۰-۶۰=۶۰$$

۳۹

$$D=R \quad y'=۱۲x^۳-۲۴x^۲ \quad ۰/۲۵ \quad ۱۲x^۳-۲۴x^۲=۰ \quad ۰/۲۵$$

$$\Rightarrow ۱۲x^۲(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ \quad ۰/۲۵ \quad \text{غیر قابل قبول} \quad ۰/۲۵\\ x=۲ \quad ۰/۲۵\end{cases}$$

$f(۱)=-۵$ ۰/۲۵ $\quad f(۲)=-۱۶$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق $\quad f(۳)=۲۷$ ۰/۲۵ ماکسیمم مطلق

$$\underbrace{\left(\frac{۱}{g}\right)'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{g(a+h)}-\frac{۱}{g(a)}}{h}}_{۰/۲۵}\underbrace{=\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h}\left(\frac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)g(a)}\right)}_{۰/۲۵}$$ ۳۰

$$\underbrace{=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{g(a+h)g(a)}\left(\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)}_{۰/۵}\underbrace{=\frac{-۱}{g^{۲}(a)}}_{۰/۲۵}\underbrace{\times g'(a)}_{۰/۲۵}$$

$f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ۳۱

$A(۰,۱)\ \Rightarrow ۱=۰+۰+c \qquad \Rightarrow ۱=c$ ۰/۲۵

۰/۲۵

$$\left.\begin{array}{ll} B(-۱,۰)\ \Rightarrow ۰=a-b+۱ & \Rightarrow \underbrace{a-b}_{۰/۲۵}=-۱ \\ M(۱,۴)\ \Rightarrow ۴=a+b+۱ & \Rightarrow \underbrace{a+b}_{۰/۲۵}=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{a=۱}_{۰/۲۵},\ \underbrace{b=۲}_{۰/۲۵}$$

$f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ۰/۲۵ $\to$ ۳۲

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{x}-\frac{۲}{۳}}{x-۳}\ (۰/۲۵) = \lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۶-۲x}{۳x}}{x-۳}\ (۰/۲۵) = \lim_{x\to ۳}\frac{-۲}{۳x}\ (۰/۲۵) = -\frac{۲}{۹}\ (۰/۲۵)$$

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geqslant ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$ ۳۳

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲x-۰}{x-۰}=۲\ (۰/۲۵)\ ,\ f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-۲x-۰}{x-۰}=-۲\ (۰/۲۵)$$

مشتق دوم در نقطه‌ی صفر وجود ندارد ۰/۲۵

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}-۰}{x-۰}=۰\ \ (۰/۲۵)$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-x^{۲}-۰}{x-۰}=۰\ \ (۰/۲۵)$$

$$f'(۲۷)=\lim_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{x-۲۷}=\lim_{x\to ۲۷}\frac{x-۲۷}{(x-۲۷)(\sqrt[۳]{x^{۲}}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}=\frac{۱}{۲۷}$$ ۳۴

$$f'(x)=\frac{۳}{۴}(۲x-۱)(x^{۲}-x)^{-\frac{۱}{۴}}=\frac{۳(۲x-۱)}{۴\sqrt[۴]{x^{۲}-x}}\ (۰/۲۵)$$ ۳۵

$x^{۲}-x>۰$ ۰/۲۵

نقاط مشتق پذیری: $(-\infty,۰)$ ۰/۲۵ $\cup$ $(۱,+\infty)$ ۰/۲۵

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x^{۲}-x$		+	۰	-	۰	+	۰/۲۵

۳۶
$$(cf)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a}\ (۰/۲۵)=\lim_{x\to a}\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a}\ (۰/۲۵)$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{c(f(x)-f(a))}{x-a}=c\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=cf'(a)\ (۰/۲۵)$$
(۰/۲۵)

۳۷
$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\underset{(۰/۲۵)}{\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}}=\lim_{x\to ۲}\underset{(۰/۲۵)}{\frac{\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{۳}}{x-۲}}=$$
(۰/۲۵)
$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۳-(x+۱)}{۳(x+۱)}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{-x+۲}{۳(x+۱)}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{-۱}{۳(x+۱)}=\frac{-۱}{۹}$$

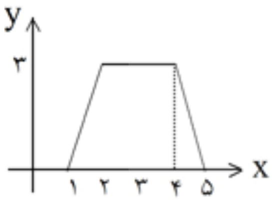
۳۸
$$\tan x\tan ۲x=۱\ \Rightarrow\ \tan ۲x=\underset{(۰/۲۵)}{\frac{۱}{\tan x}}=\underset{(۰/۲۵)}{\cot x}\ \Rightarrow\ \tan ۲x=\tan\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)\ (۰/۲۵)$$
$$۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x\ \Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}\ (۰/۲۵)$$
(۰/۲۵)

۳۹ چون f و g در a مشتق‌پذیرند داریم:
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\ (۰/۲۵),\ \lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'(a)\ (۰/۲۵)$$
$$(f.g)'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{(f.g)(a+h)-(f.g)(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}$$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)
$$=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f.(a+h)-f(a)}{h}\times g(a+h)+f(a)\times\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\ (۰/۲۵)$$
(۰/۲۵)

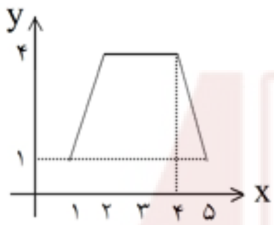
۴۰
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{-۱}{x^۲}\times\cos\frac{۱}{x}\ (۰/۵)}{\frac{-۱}{x^۲}\ (۰/۲۵)}=۱\ (۰/۲۵)$$
(۰/۲۵)

۴۱
$$y=\frac{ax+b}{x^۲+۱}\xrightarrow{A(۱,۳)}۳=\frac{a+b}{۲}\Rightarrow a+b=۶(*)\ (۰/۲۵)$$
$$y'=\frac{-ax^۲-۲bx+a}{(x^۲+۱)^۲}\ (۰/۲۵)\Rightarrow y''=\frac{(-۲ax-۲b)(x^۲+۱)-۴x(-ax^۲-۲bx+a)}{(x^۲+۱)^۳}\ (۰/۲۵)$$
$$y''(۱)=۰\ (۰/۲۵)\Rightarrow\frac{-۴a+۴b}{۸}=۰\Rightarrow a=b(**)\ (۰/۲۵)\Rightarrow(*),(**)\Rightarrow a=b=۳\ (۰/۵)$$

۴۲



f(x - ۲)



f(x - ۲) + ۱

$D = [۱, ۵] \qquad R = [۱, ۴]$

۴۳

$(x = \text{طول} \text{ و } y = \text{عرض}) \; S = xy \Rightarrow xy = ۶۴ \Rightarrow y = \frac{۶۴}{x}$

$P = ۲(x+y) = ۲(x+y) = ۲\left(x + \frac{۶۴}{x}\right) = ۲x + \frac{۱۲۸}{x}$

$P' = ۲ - \frac{۱۲۸}{x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۸ \Rightarrow y = ۸$

۴۴

$$y' = \frac{\left(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(۲x-۱)^۵ + ۵\times۲(۲x-۱)^۴\times\sqrt[۳]{x}\right)(x^۳ - ۴x) - (۳x^۲ - ۴)\sqrt[۳]{x}(۲x-۱)^۵}{(x^۳ - ۴x)^۲}$$

۴۵

$y' = ۳x^۲ - ۳ \qquad m_{\text{مماس}} = -۳ \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{۱}{۳}$

$y'' = ۶x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (۰, ۱)$

$y - ۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۰) \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x + ۱$

۴۶ اولاً باید f در $x_o = \frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{۲}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{۲}a - b = ۰$$

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع f در $x_\circ = \frac{\pi}{۲}$ باید مساوی باشند.

$$\begin{cases} f'_-\left(\frac{\pi}{۲}\right) = -۱ \\ f'_+\left(\frac{\pi}{۲}\right) = a \end{cases} \Rightarrow -۱ = a \Rightarrow b = -\frac{\pi}{۲}$$

۴۷

$$p(x) = (x-۱)(x+۲)\,Q(x) + \underbrace{ax+b}_{R(x)} \Rightarrow (x^۲ + x - ۲)\,Q(x) + (ax+b)$$

$$\begin{cases} p(۱) = ۱ \\ p(-۲) = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۱ \\ -۲a + b = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow R(x) = -x + ۲$$

۴۸

$f(x) = ۲ax + b \rightarrow f'(x) = ۰ \Rightarrow ۲ax + b = ۰ \Rightarrow x = -۱ \rightarrow -۲a + b = ۰$

$(-۱, ۵) \in \text{منحنی} \Rightarrow ۵ = a(-۱)^۲ + b\times(-۱) + ۴ \Rightarrow a - b = ۱$

$$\begin{cases} a - b = ۱ \\ -۲a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow -a = ۱ \Rightarrow a = -۱, b = -۲$$

۴۹ الف) $y' = ۵\times ۲\times \operatorname{Sin} ۵x\times \operatorname{Cos} ۵x \Rightarrow y' = ۵ \operatorname{Sin} ۵x \operatorname{Cos} ۵x$

ب) $y' = ۳\times ۲x\times (x^۳ - ۴x) + ۳x^۲\times (۳x^۲ - ۴)$

$= ۶x^۴ - ۲۴x^۲ + ۹x^۴ - ۱۲x^۲ = ۱۵x^۴ - ۳۶x^۲$

پ) $$y' = \frac{۰\times (x^۲ + ۴x - ۵) - ۱\times (۲x + ۴)}{(x^۲ + ۴x - ۵)^۲} = \frac{-۲x - ۴}{(x^۲ + ۴x - ۵)^۲}$$

ت) $$y' = \frac{۳x^۲ - ۳}{۲\sqrt{x^۳ - ۳x + ۵}}$$

۵۰ الف) $$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{۳ - \sqrt{x + ۶}} = \frac{۰}{۰} \text{مبهم}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۳} \frac{(x^۲ - ۹)\times (۳ + \sqrt{x + ۶})}{(۳ - \sqrt{x + ۶})\times (۳ + \sqrt{x + ۶})} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x + ۳)(x - ۳)(۳ + \sqrt{x + ۶})}{۹ - (x + ۶)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳} \frac{(x + ۳)(x - ۳)(۳ + \sqrt{x + ۶})}{-(x - ۳)} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x + ۳)(۳ + \sqrt{x + ۶})}{-۱} = -۳۶$$

ب) $$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ - ۲x} = \frac{۰}{۰} \text{مبهم}$$

صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. سپس عامل صفرکننده یعنی $x - ۲$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{(x - ۲)(x - ۱)}{x(x - ۲)} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x - ۱)}{x} = \frac{۱}{۲}$$

پ) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \operatorname{tg}^۲ x = +\infty$$

ت) $$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^۳\left(۴ - \frac{۱}{x^۳}\right)}{x\left(۱ + \frac{۲}{x}\right)} = \lim_{x\to \pm\infty} x^۲ = +\infty$$

۵۱

$x \to \pm\infty \qquad y = \pm\infty$

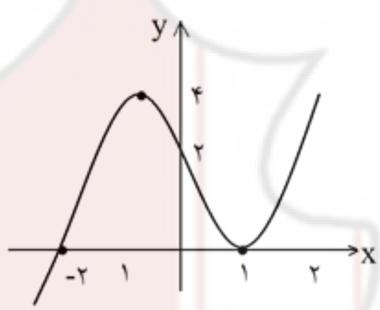
$y' = (x - ۱)^۲ + ۲(x - ۱)(x + ۲)$

$y' = (x - ۱)(۳x + ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow y = ۰ \\ x = -۱ \Rightarrow y = ۴ \end{cases}$

$y = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ \\ x = ۱ \end{cases} \qquad y'' = ۶x = ۰$

$x = ۰ \Rightarrow y = ۲$

x	-∞	-۲	-۱	۰	۱	+∞
y'	+	+	−	−	+	+
y	-∞ ↗	۰ ↗	۴ max ↘	۲ ↘	۰ min ↗	+∞



۵۳ الف) $V = x' = f'(x) = -۹/۸t + ۲۰$

$f'(۱) = -۹/۸\times ۱ + ۲۰ = ۱۰/۲$

ب) $$\text{سرعت متوسط} \; \frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{-۴/۹\times ۲^۲ + ۲۰\times ۲ - ۰}{۲} = ۱۰/۲$$

۵۳ الف) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} \times \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{2}{3}$$

ب) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(2x+3)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2x+3} = \frac{0}{5}$$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\,2x.\,\text{tg}\,3x.\,\text{tg}\,4x}{x^3} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{tg}\,2x}{x} \times \frac{\text{tg}\,3x}{x} \times \frac{\text{tg}\,4x}{x}\right) = 2\times 3\times 4 = 24$$

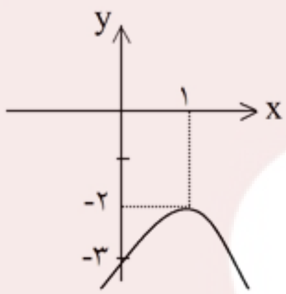
ت) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x-5}{x+2} = \dfrac{-2^+-5}{-2^++2} = \dfrac{-7}{0^+} = -\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2-1}{3-2x^2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = -2$

۵۴ دامنه $= R\,,\ y' = -2x+2 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow -2x+2 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y'	+	•	−
y	$-\infty$ ↘	-۲ Max	↗ $+\infty$

y" = -۲ تقعر رو به پایین



۵۵ الف) $f(1) = (1)^2 - 1 + 1 = 1,\ f(5) = (5)^2 - 5 + 1 = 21 \Rightarrow \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(5)-f(1)}{5-1} = \dfrac{21-1}{4} = 5$

ب) $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(3) = 2\times 3 - 1 = 5$

۵۶ الف) $\lim\limits_{x\to -۳} \dfrac{۲x^۲+x-۱۵}{۳x^۲+۱۳x+۱۲} = \dfrac{۰}{۰}$ مبهم

برای رفع ابهام عامل صفرکننده از صورت و مخرج یعنی $x-(-۳)$ را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۳} \frac{(x+۳)(۲x-۵)}{(x+۳)(۳x+۴)} = \lim_{x\to -۳} \frac{۲x-۵}{۳x+۴} = \frac{-۱۱}{-۵} = \frac{۱۱}{۵}$$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{-۵x^۲}{x^۲-۱} = \dfrac{-۵}{۰^+} = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱} = \dfrac{۰}{۰}$ مبهم

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱} \frac{(\sqrt{x+۳}-۲)\times(\sqrt{x+۳}+۲)}{(x-۱)(\sqrt{x+۳}+۲)} = \lim_{x\to ۱} \frac{x+۳-۴}{(x-۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{\sqrt{x+۳}+۲} = \frac{۱}{۴}$$

ت) $= \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\mathrm{Sin}\,(x-a)}{x^۲-a^۲} = \dfrac{۰}{۰}$ مبهم

$$= \lim_{x\to a} \frac{\mathrm{Sin}\,(x-a)}{x-a} \times \frac{۱}{x+a} = ۱\times\frac{۱}{a+a} = \frac{۱}{۲a}$$

ث) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+۳}{x^۲-۵x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x\left(۱+\frac{۳}{x}\right)}{x^۲\left(۱-\frac{۵}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۱}{x} = ۰$

۵۷

$$f(x) = \frac{۴-۳x-x^۲}{x-۲} \Rightarrow y' = \frac{(-۳-۲x)(x-۲)-(۴-۳x-x^۲)}{(x-۲)^۲} = \frac{-۳x+۶-۲x^۲+۴x-۴+۳x+x^۲}{(x-۲)^۲}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-x^۲+۴x+۲}{(x-۲)^۲}$$

۵۸

$$y' = ۱(۲x-۱)^۳ + ۶(۲x-۱)^۲(x+۱)$$

۵۹

$$\lim_{x\to ۲} \frac{(x+۳)}{(x-۲)^۲} = \frac{۲+۳}{(۲-۲)^۲} = \frac{۵}{۰^+} = +\infty$$

۶۰

$$\left.\begin{array}{l} x+y=۱۰۰ \\ y=۱۰۰-x \end{array}\right\} \Rightarrow S = x.y \Rightarrow S = x(۱۰۰-x) \Rightarrow S = ۱۰۰x - x^۲ \Rightarrow S' = ۱۰۰-۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۵۰ \\ y=۵۰ \end{cases}$$

۶۱

$$y' = \frac{۳x^۲+۳+۶x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳+۳x+۳x^۲+۱)^۲}}$$

راه دوم: $y = \sqrt[۳]{x^۳+۳x+۳x^۲+۱} = \sqrt[۳]{(x+۱)^۳} = (x+۱) \Rightarrow y' = ۱$

۶۳

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{۲x^۲-۱+۳x}{۸x+x^۲-۶} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{۲x^۲}{x^۲} = ۲$$

۶۳

$$\begin{cases} y = x^۲+ax-۳b \\ y=-x+b \end{cases} \xrightarrow[\text{تابع قرار می دهیم}]{\text{نقطه}(-۱,۰)\text{را در هر دو}} \begin{cases} ۰ = ۱-a-۳b \\ ۰ = ۱+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-۱ \\ a=۴ \end{cases}$$

۶۴

$$\begin{cases} y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u \\ y = \mathrm{tg}\,x.\mathrm{Cotg}\,۲x \Rightarrow y' = (۱+\mathrm{tg}^۲x)(\mathrm{Cotg}\,۲x) - ۲(۱+\mathrm{Cotg}^۲ ۲x)(\mathrm{tg}\,x) \end{cases}$$

۶۵

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{(۲x+۱)(x+۲)^۲}{۵x^۲+۲x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{۲x^۳}{۵x^۲} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{۲x}{۵} = \pm\infty$$

۶۶
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+} \mathrm{tg}^{۲} x = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^+} \frac{\mathrm{Sin}^{۲} x}{\mathrm{Cos}^{۲} x} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

۶۷
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۳x+۱}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(۳x+۱)}{x+|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳x}{۲x} = \frac{۳}{۲}$$

۶۸
$$f(x-۱) = x^{۲} \xrightarrow[x=t+۱]{x-۱=t} f(t) = (t+۱)^{۲}$$
$$\Rightarrow f(x) = (x+۱)^{۲} \Rightarrow f(۱) = ۴$$

۶۹
$$x = ۳t^{۲} - ۴t + ۱$$
الف : $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(۳)-x(۱)}{۳-۱} = \frac{(۲۷-۱۲+۱)-(۳-۴+۱)}{۲} = \frac{۱۶-۰}{۲} = ۸$

ب : $x'(t) = ۶t - ۴ \xrightarrow{t=۲} x'(۲) = ۱۲ - ۴ = ۸$

تذکّر: وقتی معادله حرکت درجه ۲ باشد، تساوی الف و ب صورت می‌پذیرد.

۷۰
$$g'(x) = ۶\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}^{۲}x - ۲x\,\mathrm{Sin}\,x^{۲}$$

۷۱
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-۳x^{۲}}{۲x^{۲}} = \frac{-۳}{۲}$$

۷۲
ابعاد مستطیل $x, y = \frac{۴-x}{۲}$ مساحت $S = x\left(\frac{۴-x}{۲}\right) = ۲x - \frac{x^{۲}}{۲} \Rightarrow S' = ۲ - x = ۰ \quad x = ۲, y = ۱$

۷۳
$$f'(۰) = \lim_{x\to۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to۰} \frac{|x|\sqrt{x+۱}-۰}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to۰^+} \frac{x\sqrt{x+۱}}{x} = ۱ \\ \lim_{x\to۰^-} \frac{-x\sqrt{x+۱}}{x} = -۱ \end{cases}$$

چون $f'_{۰^+} \neq f'_{۰^-}$، پس در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

۷۴
$$\lim_{x\to(-\infty)} \frac{\left(\sqrt{x^{۲}+۲x}-\sqrt{x^{۲}-۲x}\right)\left(\sqrt{x^{۲}+۲x}+\sqrt{x^{۲}-۲x}\right)}{\sqrt{x^{۲}+۲x}+\sqrt{x^{۲}-۲x}} = \frac{x^{۲}+۲x-x^{۲}+۲x}{\sqrt{x^{۲}}+\sqrt{x^{۲}}}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۴x}{-x-x} = -۲$$

۷۵
$$\lim_{x\to۱^-} \frac{۲x+۳}{(x-۱)(x+۳)} = \frac{۵}{۰^-\times۴} = \frac{۵}{۰^-} = -\infty$$

۷۶ ریشه‌های مشتق اول طول نقاط اکسترمم می‌باشند. $y'=۳ax^۲+۲bx+c$

چون $M(۱,۲)$ اکسترمم است پس به ازای $x=۱$ داریم: $x=۱ \Rightarrow ۳a+۲b+c=۰ \quad (۱)$

از طرفی نقطه‌ی اکسترمم متعلق به نمودار تابع است. پس نقطه‌ی (۱و۲) در معادله تابع صدق می‌کند یعنی:

$$۲=a+b+c+d(۲)$$

برای نقطه‌ی عطف منحنی ریشه‌های مشتق دوم را به دست می‌آوریم.

$$y''=۶ax+۲b \to ۰+۲b=۰ \to b=۰(۳)$$

نقطه‌ی عطف متعلق به نمودار تابع است پس نقطه‌ی (۰و۰) در معادله‌ی تابع صدق می‌کند.

$$(۱),(۲),(۳),(۴) \Rightarrow \begin{cases} ۳a+۲b+c=۰ \\ a+b+c+d=۲ \\ b=۰ \\ d=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+c=۰ \\ a+c=۲ \end{cases} \Rightarrow ۲a=-۲ \to a=-۱$$

$$a+c=۲ \to c=۳ \begin{cases} a=-۱ \\ b=۰ \\ c=۳ \\ d=۰ \end{cases}$$

۷۷

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{(x-۱)^۲\,(x+۲)}-۰}{x-۱}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|\sqrt{x+۲}}{x-۱}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)\sqrt{x+۲}}{(x-۱)}=\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x+۲}=\sqrt{۳}=f'_{۱^+} \\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)\sqrt{x+۲}}{(x-۱)}=\lim(-\sqrt{x+۲}, x\to ۱)=-\sqrt{۳}=f'_{۱^-} \end{cases}$$

چون مشتق چپ و مشتق راست برابر نیستند، پس تابع مشتق‌پذیر نیست.

۷۸

$$y'=۱۵\,\sin^۲(۲x-۱)\times ۲\cos(۲x-۱)+\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}(۱+\cot^۲\sqrt{x})$$

۷۹

$$\lim_{x\to +\infty}\left(۲x-\sqrt{۴x^۲+۴x}\right)\times\frac{\left(۲x+\sqrt{۴x^۲+۴x}\right)}{\left(۲x+\sqrt{۴x^۲+۴x}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۴x^۲-۴x^۲-۴x}{۲x+\sqrt{۴x^۲+۴x}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-۴x}{۲x+۲\sqrt{x^۲+x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-۲x}{x+|x|\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-۲x}{x\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-۲}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}}=-۱$$

۸۰

$$M(۱,۲)\xrightarrow{\text{مختصات در تابع}} ۲=a+b+c+d \quad (I)$$

$$y'=۳ax^۲+۲bx+c \to ۳a+۲b+c=۰ \quad (II)$$

$$y''=۶ax+۲b \to ۶a(۰)+۲b=۰ \to b=۰$$

$$O(۰,۰)\xrightarrow{\text{مختصات در تابع}} ۰=۰+۰+۰+d \to d=۰$$

$$\xrightarrow[\text{و به ازای } b=d=۰]{(I)\text{ و }(II)} \begin{cases} a+۰+c+۰=۲ \\ ۳a+۲(۰)+c=۰ \end{cases} \Rightarrow a=-۱, c=۳$$

۸۱

$$y'=\cos x\, f'(\sin x)=\cos x(\sin^۲ x+\sin x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^۲+۳x-۵}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲+۳x-۵}-x)\times(\sqrt{x^۲+۳x-۵}+x)}{\sqrt{x^۲+۳x-۵}+x}$$ ۸۲

$$=\lim\frac{(x^۲+۳x-۵)-x^۲}{|x|\sqrt{۱+\frac{۳}{x}-\frac{۵}{x^۲}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x}{۲x}=\frac{۳}{۲}$$

$$\lim_{x\to۲}\left(\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{x^۲-۴}\right)=\lim_{x\to۲}\left(\frac{۱}{x-۲}-\frac{۴}{(x-۲)(x+۲)}\right)=\lim_{x\to۲}\left(\frac{(x+۲)-۴}{(x-۲)(x+۲)}\right)$$ ۸۳

$$\lim_{x\to۲}\frac{x-۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to۲}\frac{۱}{x+۲}=\frac{۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$x^۲+y^۲=۵\Rightarrow y=\sqrt{۵-x^۲}$$ ۸۴

$$f(x)=\text{محیط}=۲(۲x+y)=۲(۲x+\sqrt{۵-x^۲})\Rightarrow f'(x)=۲\left(۲-\frac{۲x}{۲\sqrt{۵-x^۲}}\right)=۰$$

$x=۲, y=۱$ ابعاد مستطیل ۲ و ۱ است

$$۲\cos^۲x-۱-\cos x+۱=۰\Rightarrow \cos x(۲\cos x-۱)=۰$$ ۸۵

$$\cos x=۰\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

$$\begin{cases} y'=۳ax^۲+۲bx+c\to ۰=۰+c\Rightarrow c=۰\\ y''=۶ax+۲b\to ۰=۶a+۲b\to ۳a+b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳a+b=۰\\ a+b=-۲\end{cases}\ a=۱, b=-۳$$ ۸۶

$$۲=۰+۰+۰+d\to d=۲, ۰=a+b+۲\to a+b=-۲$$

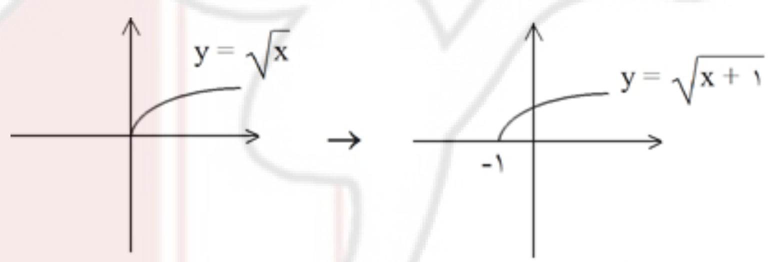
$$f(x)=\frac{x^۲-۱}{Q(x)}\Rightarrow f(x)=(x^۲-۱).Q(x)+ax+b\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\to x=۱\\ x+۱=۰\to x=-۱\end{cases}$$: ریشه های مقسوم ۸۷

$$\Rightarrow\begin{cases} f(۱)=(۱^۲-۱).Q(۱)+a(۱)+b\xrightarrow{f(۱)=۳}\\ f(-۱)=((-۱)^۲-۱).Q(-۱)+a(-۱)+b\xrightarrow{f(-۱)=۱}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳=a+b\\ ۱=-a+b\end{cases}\Rightarrow a=۱, b=۲$$

$$\Rightarrow R=ax+b\xrightarrow{a=۱\quad b=۲}R=x+۲$$

$$a-b=۱۰\Rightarrow a=b+۱۰$$ ۸۸

$$P=ab=(b+۱۰)b=b^۲+۱۰b\Rightarrow P'=۲b+۱۰=۰\Rightarrow b=-۵, a=۵$$



۸۹

$D_f=[-۱, +\infty), R_f=[۰, +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^۲-۲x}-x)(\sqrt{x^۲-۲x}+x)}{\sqrt{x^۲-۲x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۲x}{x\left(\sqrt{۱-\frac{۲}{x}}\right)+x}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$ ۹۰

۹۱

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)(x^{۲}+x-۳)}{(x-۱)(x^{۲}+x-۲)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^{۲}+x-۳}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۱+۱-۳}{(۱-۱)(۱+۲)}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۹۲

$$y=\frac{x^{۲}+۳}{ax+b}\rightarrow y'=\frac{۲x(ax+b)-a(x^{۲}+۳)}{(ax+b)^{۲}}$$

$$\begin{cases} f(۱)=۲\Rightarrow \frac{(۱)^{۲}+۳}{a(۱)+b}=۲ \\ f'(۱)=۰\Rightarrow \frac{۲(۱)(a+b)-a(۱+۳)}{(a+b)^{۲}}=۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a+b=۲ \\ -۲a+۲b=۰ \end{cases}\Rightarrow a=۱, b=۱$$

۹۳

$$y'=-۳\,\mathrm{Cos}^{۲}x.\,\mathrm{Sin}\,x+۲\left(۱+\mathrm{tg}^{۲}\left(۲x-\frac{\pi}{۳}\right)\right)$$

۹۴

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+\sqrt{x^{۲}+۷}}{۲x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+|x|}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+x}{۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x}{۲x}=۳$$

۹۵

$$y'=\frac{۳}{۴}mx^{۲}-۲x-۱\rightarrow \begin{cases} a<۰\rightarrow \frac{۳}{۴}m<۰\rightarrow m<۰ \\ \text{و} \\ \Delta\leqslant ۰\rightarrow ۴+۳m\leqslant ۰\rightarrow m\leqslant -\frac{۴}{۳} \end{cases}$$

پس $m\leqslant -\frac{۴}{۳}$ جواب است.

۹۶

$$y'=\frac{-\mathrm{Sin}\,x}{۲\sqrt{۴+\mathrm{Cos}\,x}}\rightarrow m_{\text{مماس}}=\frac{-\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{۲}}{۲\sqrt{۴+\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{۲}}}=\frac{-۱}{۴}\ m_{\text{قائم}}=۴\rightarrow y-۲=۴\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)$$

۹۷

$$y'=۳\left(\frac{۵x-۷}{۱+x^{۲}}\right)^{۲}\left(\frac{۵(۱+x^{۲})-۲x(۵x-۷)}{(۱+x^{۲})^{۲}}\right)+۲(۱+\mathrm{tg}^{۲}(۱-۲x))$$

۹۸

$$y'=۳x^{۲}-۳=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۱\Rightarrow y=-۲ \\ x=-۱\Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

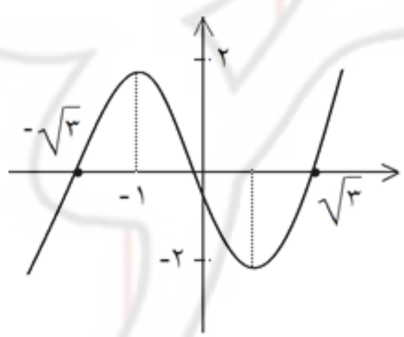
$$x=۰\Rightarrow y=۰$$

$$y=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^{۲}=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

$y'=۶x=۰\Rightarrow x=۰, y=۰$ نقطه عطف

نقاط بحرانی $(-۱,۲),(۱,-۲)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{۳}$	-۱	۰	۱	$\sqrt{۳}$	$+\infty$
y'	+		۰	−	۰	+	
y	$-\infty$ ↗	۰ ↗	۲ ↘	۰ ↘	-۲ ↗	۰ ↗	$+\infty$



۹۹

الف) $y' = \dfrac{\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x}}(x^۲+۱) - ۲x\sqrt{۲x}}{(x^۲+۱)^۲}$

ب) $y' = ۳\,\mathrm{Sin}^۲x\,\mathrm{Cos}\,x + \dfrac{-\mathrm{Sin}\,x}{۵\sqrt[۵]{\mathrm{Cos}^۴x}}$

ج) $y' = ۵(x^۲-x+۱)^۳ + ۳(x^۲-x+۱)^۲(۲x-۱)۵x$

۱۰۰

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^۳-۳x^۲+۲}{x^۲-۱} = \lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{(x-۱)(x^۲-۲\mathrm{x}-۲)}{(x-۱)(x+۱)} = \dfrac{-۳}{۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۲\,\mathrm{Sin}\frac{\mathrm{ax-bx}}{۲}\mathrm{Cos}\frac{\mathrm{ax+bx}}{۲}}{\mathrm{ax-bx}} = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\mathrm{Sin}\frac{\mathrm{ax-bx}}{۲}}{\frac{\mathrm{ax-bx}}{۲}} \times \mathrm{Cos}\left(\dfrac{\mathrm{ax+bx}}{۲}\right) = ۱$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{[x]-۲}{x-۲} = \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{۲-۲}{۰^+} = \dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر نسبی}} = ۰$

د) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۲x-۱}{\sqrt{۴x^۲+x+۱}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۲x}{\sqrt{۴x^۲\left(۱+\frac{۱}{۴\mathrm{x}}+\frac{۱}{۴\mathrm{x}^۲}\right)}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۲x}{|۲x|} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۲x}{-۲x} = -۱$