نام و نام خانوادگی :

عنوان آزمون : هندسه میان ترم دهم

پایه تحصیلی :

زمان آزمون :

نام دبیر :

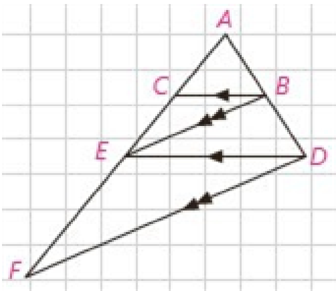
۱ با استدلال استنتاجی ثابت کنید که سه عمودمنصف هر مثلث همرس هستند.

۲ عمودمنصف پاره‌خط AB به طول ۶ سانتی‌متر را رسم کنید. نحوه‌ی رسم عمودمنصف را توضیح دهید.

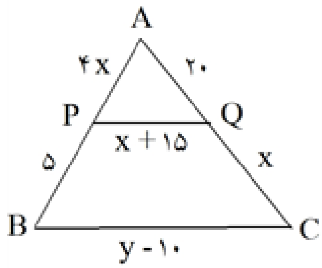
۳ قضیه: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی کوچک‌تر است.

۴ در شکل مقابل می‌دانیم $DE \parallel BC$ و $DF \parallel BE$، به کمک قضیه‌ی تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه‌ی تناسب‌ها با یک‌دیگر، ثابت کنید:

$AE^۲ = AC.AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)

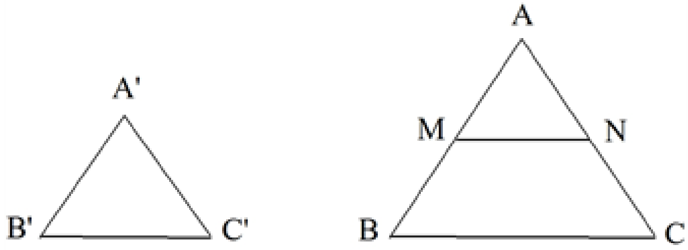


۵ در شکل زیر، PQ با BC موازی است، مقادیر x و y را محاسبه کنید.



۶ تعمیم قضیه‌ی تالس را بیان و اثبات کنید.

۷ ۱- ثابت کنید هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



(در فرض، به جای A'B' و A'C' مساوی‌های آن‌ها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $\mathrm{MN} \parallel \mathrm{BC}$؟)

۲- از قضیه‌ی اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۳- تعمیم قضیه‌ی تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه‌ی این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض نتیجه بگیرید:

$\mathrm{MN} = B'C'$

۴- مثلث‌های A'B'C' و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از این‌جا درستی حکم را ثابت کنید.

۸ در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند.

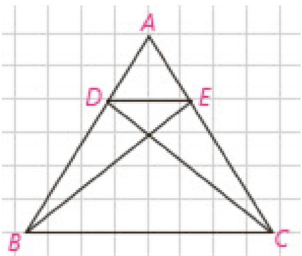
الف) قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟

ب) تناسب‌های زیر را کامل کنید.

$$\frac{S_{\mathrm{DAE}}}{S_{\mathrm{DEC}}} = \frac{\cdots}{\cdots} , \frac{S_{\mathrm{ADE}}}{S_{\mathrm{DBE}}} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

ج) مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند. چرا؟

د) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا چه تناسبی را نتیجه‌گیری می‌کنید.



پاسخنامه تشریحی

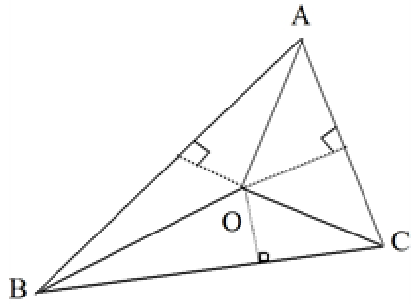
۱ مثلث دلخواه ABC را رسم می‌کنیم و از آن‌جا که پاره‌خط های AB و AC متقاطع هستند، عمودمنصف آن‌ها نیز با هم در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند.

۱- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس: $\mathrm{OA}=\mathrm{OC}\quad (۱)$

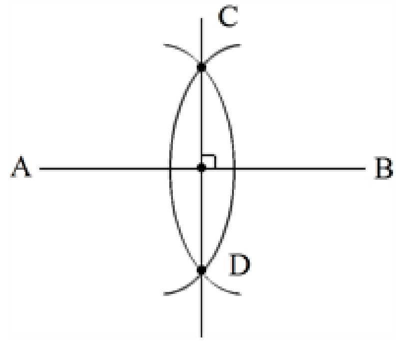
۲- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس: $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}\quad (۲)$

$(۱),(۲)\Rightarrow \mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

طبق قضیه‌ی عمودمنصف‌ها هر نقطه که فاصله‌ی آن از دو سر پاره‌خط یکسان باشد روی عمودمنصف آن قرار دارد. نتیجه می‌گیریم O روی عمودمنصف BC است پس O محل تلاقی سه عمودمنصف است. بنابراین عمودمنصف‌های اضلاع مثلث همرسند.



۲ ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی بیش از نصف AB باز کرده و دو کمان به مرکز A و B رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان را D و C می‌نامیم و نقاط D و C را به هم وصل می‌کنیم. خط گذرنده از D و C، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



۳ فرض: $\widehat{A}>\widehat{B}$ حکم: $\mathrm{BC}>\mathrm{AC}$

برهان خلف: فرض می‌کنیم $\mathrm{AC}\geqslant\mathrm{BC}$ ۰/۲۵ دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

الف) AC=BC در این حالت مثلث متساوی‌الساقین است. پس $\widehat{A}=\widehat{B}$ که این خلاف فرض است. ۰/۵

ب) AC<BC در این حالت با توجه به قضیه‌ی لولا $\widehat{A}<\widehat{B}$ که این نیز خلاف فرض است. ۰/۵

پس فرض خلف باطل است و حکم درست می‌باشد.

۴
$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{BC}\parallel\mathrm{DE}\Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}}\\ \mathrm{BE}\parallel\mathrm{DF}\Rightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AF}}\Rightarrow \mathrm{AE}^{۲}=\mathrm{AC}.\mathrm{AF}$$

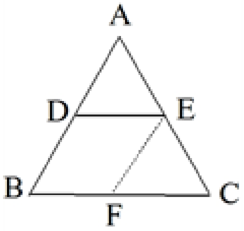
۵ با توجه به قضیه تالس داریم:

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{CQ}}\Rightarrow\frac{۴x}{۵}=\frac{۲۰}{x}\Rightarrow ۴x^{۲}=۱۰۰\Rightarrow x^{۲}=۲۵\Rightarrow x=۵$$

با توجه به تعمیم قضیه تالس داریم:

$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BC}}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲۰+x}=\frac{x+۱۵}{y-۱۰}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲۵}=\frac{۲۰}{y-۱۰}\Rightarrow y-۱۰=۲۵\Rightarrow y=۳۵$$

۶ اگر خطی دو ضلع مثلث را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه‌های ضلع‌هایش با مثلث اصلی متناسب است. می‌دانیم طبق فرض $DE \parallel BC$ باید ثابت کنیم.



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

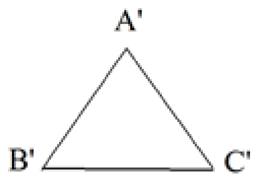
از نقطه‌ی E پاره‌خط EF را موازی DB رسم می‌کنیم چهارضلعی DEFB یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو دوبه‌دو موازی‌اند، بنابراین $DE = BF$ و $DB = EF$

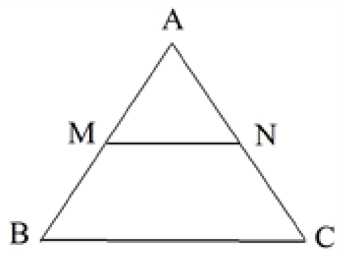
در مثلث ABC با درنظر گرفتن $DE \parallel BC$ داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (۱)

در مثلث ABC و با درنظر گرفتن $EF \parallel AB$ داریم: $\frac{BF}{BC} = \frac{AE}{AC}$ (۲)

با توجه به ۱ و ۲ و جای‌گذاری DE به جای BF داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

۷ در مثلث ABC، روی AB و AC، پاره‌خط های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازه‌ی A'B' و A'C' جدا کنید.





۱) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

طبق قضیه‌ی اساسی تشابه نتیجه می‌گیریم: $MN \parallel BC$

۲- ضلع‌ها متناسب و زاویه‌ها برابرند، پس: $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

۳) $\left.\begin{array}{l} \text{تعمیم تالس} : \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \\ \text{فرض} : \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow MN = B'C'$

$\xrightarrow{\text{ض ض ض}} AMN \sim A'B'C'$

۴- بنابراین نتیجه می‌گیریم: $\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \\ \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

۸ الف) در مثلث ADE قاعده‌ی ADE قاعده‌ی AE و در مثلث DEC قاعده‌ی EC مقابل رأس D است.

ب) $\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}} = \frac{AE}{EC}, \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{AD}{DB}$

برای دو مثلث ADE و DBE قاعده‌های روبه‌رو به رأس مشترک E را درنظر می‌گیریم.

ج) چون هر دو یک قاعده دارند (DE) و نقاط رأس مقابل به قاعده آن‌ها در یک خط موازی DE قرار دارند، پس مساحت هر دوی آن‌ها برابر است.

د) چون $S_{DBE} = S_{\overset{\triangle}{DEC}}$، پس دو کسر بالا با هم برابرند، در نتیجه: $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$