

نام خانوادگی :	باسمه تعالی	پایه : دوازدهم
نام درس : هندسه ۳	دبیرستان غیر دولتی موحّد	ساعت شروع : ۷:۴۵
نوبت امتحانی : میان نوبت اول		مدت امتحان : ۶۰ دقیقه
		تاریخ برگزاری: ۱۴۰۱/۰۹/۰۵
نام و نام خانوادگی دبیر:	نمره با عدد:	
تاریخ و امضا:	نمره با حروف:	

ردیف	لطفاً پاسخ سؤالات را در پاسخبرگ بنویسید	بارم
۱	دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید. الف) آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟ ب) حاصل $ A \times B $ را به دست آورید.	۲.۵
۲	اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.	۲.۵
۳	دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.	۲.۵
۴	معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} [x \ 3]$ را حل کنید.	۲.۵
۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$	۲.۵
۶	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.	۲.۵
۷	در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ماتریس A را به دست آورید.	۲.۵
۸	اگر $A = \begin{bmatrix} 5 A  &  A  \\ 5 & 4 A ^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $ A ^3 - 2$ را بیابید.	۲.۵

الف) خیر - زیرا دو ماتریس هم مرتبه نیستند. (ص ۱۳)

ب)  $A \times B = \begin{bmatrix} -۳ & ۴ & -۲ \\ -۴ & ۶ & -۴ \\ -۸ & ۱۱ & -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A \times B| = ۰$  (ص ۳۰)

$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -۸+۲a=۰ \rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰ \rightarrow b=۳ \end{cases}$  (ص ۲۱)

$\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ n=-۱ \end{cases}$

$AB = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$

$[x \ ۳] \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = [x-۳ \ ۱۲] \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = [۳x-۲۱] = ۰ \Rightarrow x=۷$

$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۱۳ \neq ۰, A^{-1} = \frac{1}{۱۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{۱۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ y=۲ \end{cases}$

$\frac{m}{۴} = \frac{۳}{m+۴} \neq \frac{-۳}{۲} \xrightarrow{(\cdot/۵)} m(m+۴) - ۱۲ = ۰ \xrightarrow{(\cdot/۵)} \begin{cases} m = -۶ (\cdot/۲۵) & \text{غیرقابل قبول} \\ m = ۲ (\cdot/۲۵) & \text{قابل قبول} \end{cases}$

فرض کنیم  $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$  پس  $B^{-1} = \frac{1}{-۱} \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$  پس  $C^{-1} = \frac{1}{۱} \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$  داریم.

$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow BAC = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \xrightarrow[\times C^{-1}]{B^{-1} \times} A = B^{-1} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} C^{-1}$   
 $= \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۷ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۴ & -۱۵ \\ -۷ & ۲۵ \end{bmatrix}$

از طرفین تساوی داده شده دترمینان می‌گیریم.

$A = \begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۲۰|A|^۲ - ۵|A| \Rightarrow ۲۰|A|^۲ - ۶|A| = ۰ \Rightarrow ۲|A|(۱۰|A|^۲ - ۳) = ۰$   
 $\Rightarrow \begin{cases} |A| = ۰ \Rightarrow |A|^۲ - ۲ = -۲ \\ ۱۰|A|^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow |A|^۲ = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow |A| = \pm \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow |A|^۲ - ۲ = \pm \frac{۳\sqrt{۳}}{۱۰\sqrt{۱۰}} - ۲ \end{cases}$