نام و نام خانوادگی : **عنوان آزمون :** هندسه ترم دوم

پایه تحصیلی : **زمان آزمون :**

نام دبیر : **تاریخ برگزاری**

۱) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید:

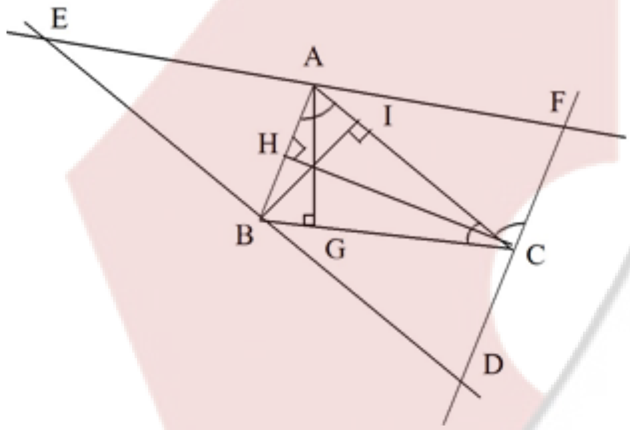
«از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.»

۲) مربعی رسم کنید که طول قطرهای آن برابر با ۴ سانتی‌متر است؟

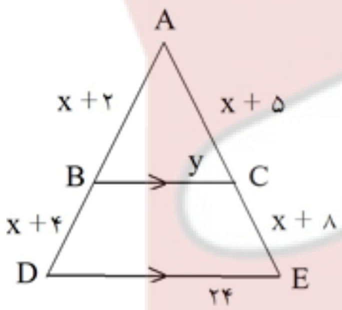
۳) با استدلال استنتاجی ثابت کنید که سه عمودمنصف هر مثلث همرس هستند.

۴) استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.

استدلال: مثلث دلخواه ABC را درنظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF وجود دارد. چهارضلعی $ABCF$ چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟



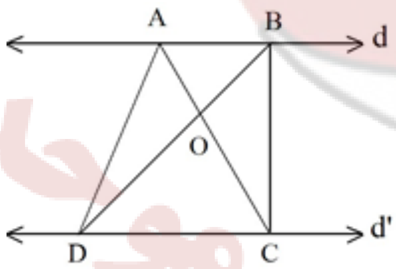
۵) اگر $DE \parallel BC$ باشد مقدار x و y را حساب کنید.



۶) طول اضلاع یک مثلث به‌ترتیب ۶ و ۸ و ۹ است و طول کوچک‌ترین ضلع مثلث متشابه با آن برابر با ۸ است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

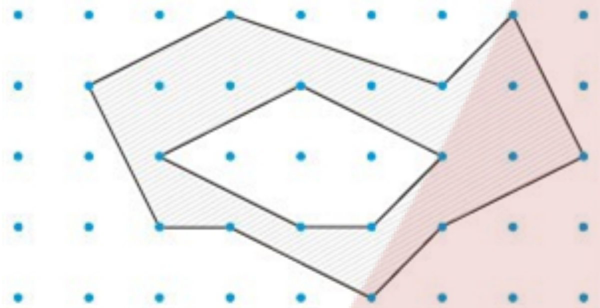
۷) تعمیم قضیه‌ی تالس را بیان و اثبات کنید.

۸) اگر دو خط d و d' موازی باشند با توجه به شکل زیر اگر مساحت ΔOBC برابر S باشد، مساحت ΔOAD را برحسب S به دست آورید.



۹) ثابت کنید که یک میانه در هر مثلث آن‌را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

۱۰) با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (راهنمایی: مساحت چندضلعی داخلی را از مساحت چندضلعی بیرونی کم کنید.)



۱۱) ربع دایره‌ای به شعاع a را حول شعاع دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.

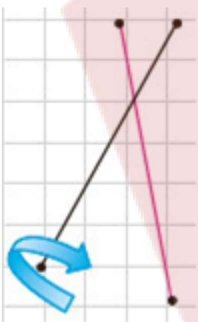
۱۲) هریک از عبارت‌های زیر را تعریف کنید.

الف) دو خط متنافر

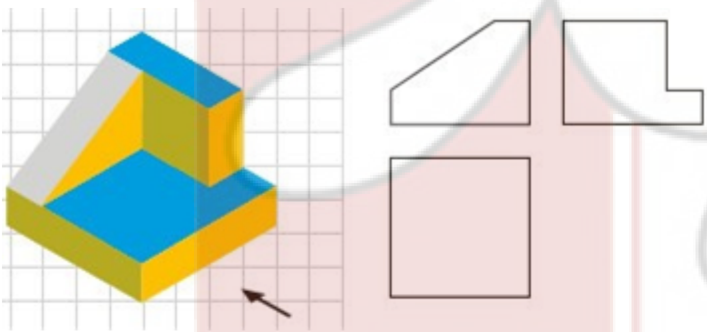
ب) سطح مقطع

ج) فصل مشترک

۱۳) دو پاره‌خط متقاطع را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر یکی از پاره‌خط ها را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی‌ای ساخته می‌شود؟



۱۴) شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

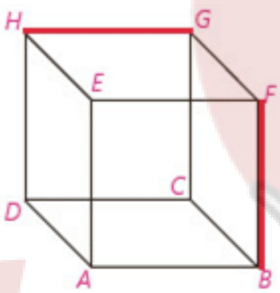


۱۵) دو خط d_1 و d_2 با هم متنافرند.

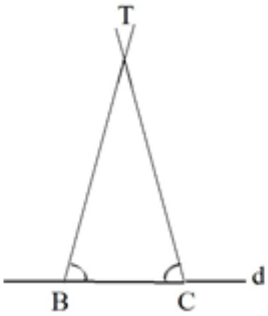
الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

ب) اگر صفحه‌ی P شامل یکی از دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

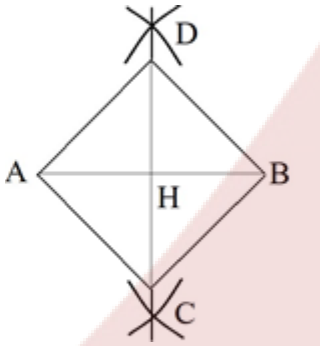
ج) اگر صفحه‌ی P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟



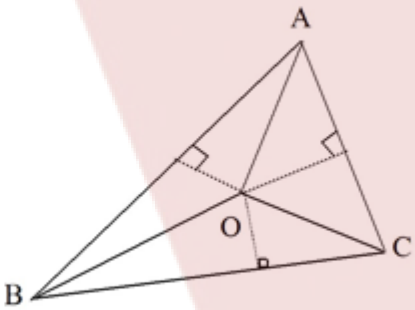
پاسخنامه تشریحی



۱ خط d و نقطه‌ی T بیرون خط d مفروض است.
فرض خلف: از نقطه‌ی T دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم. بنابراین دو عمود خط d را در ۲ نقطه‌ی B و C قطع کرده‌اند. بنابراین یک مثلث داریم که مجموع زاویه‌های داخلی آن از 180° بیش‌تر خواهد شد و این امکان وجود ندارد. بنابراین از نقطه‌ی T دو عمود نمی‌توان رسم کرد و فقط یک عمود می‌توانیم رسم کنیم.



۲ در مربع قطرها عمودمنصف یک‌دیگر و برابر هستند. ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ سانتی‌متر را رسم کرده و سپس عمودمنصف آن‌را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصف و AB را H می‌نامیم.
نقاط D و C را چنان اختیار می‌کنیم که $HD = HC = 2$.
نقاط A، B، C و D را به صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم.



۳ مثلث دلخواه ABC را رسم می‌کنیم و از آن‌جا که پاره‌خط های AB و AC متقاطع هستند، عمودمنصف آن‌ها نیز با هم در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند.
۱- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس: $OA = OC \quad (1)$
۲- نقطه‌ی O روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس: $OA = OB \quad (2)$
$(1), (2) \Rightarrow OB = OC$
طبق قضیه‌ی عمودمنصف‌ها هر نقطه که فاصله‌ی آن از دو سر پاره‌خط یکسان باشد روی عمودمنصف آن قرار دارد. نتیجه می‌گیریم O روی عمودمنصف BC است پس O محل تلاقی سه عمودمنصف است. بنابراین عمودمنصف‌های اضلاع مثلث همرسند.

۴ در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های مقابل مساویند پس:

$\left.\begin{matrix} AB \parallel FC \\ BC \parallel AF \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع است ABCF $\Rightarrow AF = BC$

$\left.\begin{matrix} AE \parallel BC \\ AC \parallel BE \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ متوازی‌الاضلاع است ACBE $\Rightarrow AE = BC$

پس $AF = AE$ یعنی A وسط ضلع EF است.
به همین ترتیب می‌توان نشان داد نقاط B و C به ترتیب وسط اضلاع DE و DF هستند. پس ارتفاع AG عمودمنصف ضلع EF و ارتفاع BI عمودمنصف DE و ارتفاع CH عمودمنصف DF است. بنابراین ارتفاع‌های مثلث ABC روی عمودمنصف‌های مثلث DEF است و می‌دانیم عمودمنصف‌های هر مثلث همرس‌اند پس ارتفاع‌های مثلث ABC همرس‌اند.

۵ چون $DE \parallel BC$ است بنابراین طبق قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{x+۲}{x+۴}=\frac{x+۵}{x+۸} \Rightarrow x^{۲}+۱۰x+۱۶=x^{۲}+۹x+۲۰ \Rightarrow x=۴$$

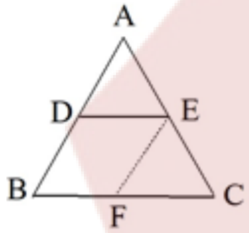
$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{۶}{۱۴}=\frac{y}{۲۴} \Rightarrow y=\frac{۶\times ۲۴}{۱۴} \Rightarrow y=\frac{۷۲}{۷}$$

۶ نسبت تشابه برابر است با $\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ که همان نسبت بین محیط است:

محیط مثلث اول $۱۳+۸+۶=۲۷$

محیط مثلث دوم $\frac{۲۷}{x}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow x=\frac{۴\times \cancel{۲۷}^{۹}}{\cancel{۳}_{۱}}=۳۶$

۷ اگر خطی دو ضلع مثلث را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه‌های ضلع‌هایش با مثلث اصلی متناسب است. می‌دانیم طبق فرض $BC \parallel DE$ باید ثابت کنیم.



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

از نقطه‌ی E پاره‌خط EF را موازی DB رسم می‌کنیم چهارضلعی DEFB یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو دوبه‌دو موازی‌اند، بنابراین $DE=BF$ و $DB=EF$

در مثلث ABC با درنظر گرفتن $BC \parallel DE$ داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (۱)

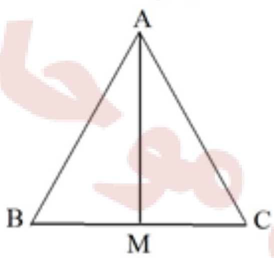
در مثلث ABC و با درنظر گرفتن $AB \parallel EF$ داریم: $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ (۲)

با توجه به ۱ و ۲ و جای‌گذاری DE به جای BF داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

۸ دو مثلث ΔDBC و ΔDAC هم‌قاعده‌اند و رئوس آن‌ها یعنی B و A روی خط موازی قاعده قرار دارند، پس ارتفاع وارد بر DC در هر دو مثلث با هم برابر است، یعنی این دو مثلث هم‌مساحت هستند.

$$S_{DAC}=S_{DBC} \xrightarrow[\text{از کم می کنیم}]{\text{از طرفین } S_{DOC}} S_{DAC}-S_{DOC}=S_{DBC}-S_{DOC} \leftrightarrow S_{OAD}=S_{ABC}$$

۹ ABC یک مثلث است و M وسط ضلع BC. از آن‌جا که این دو مثلث در رأس A مشترک هستند. پس:



$$\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}}=\frac{MB}{MC} \xrightarrow{MB=MC} \frac{S_{AMC}}{S_{AMB}}=۱ \Rightarrow S_{AMC}=S_{AMB}$$

۱۰ ابتدا مساحت چندضلعی بزرگتر را به دست می‌آوریم.

$$b = ۹\ ,\ i = ۱۳ \Rightarrow S = \frac{b}{۲} - ۱ + i = \frac{۹}{۲} - ۱ + ۱۳ = \frac{۳۳}{۲}$$

حال مساحت چندضلعی کوچکتر را پیدا می‌کنیم.

$$b' = ۵\ ,\ i' = ۳ \Rightarrow S' = \frac{b'}{۲} - ۱ + i' = \frac{۵}{۲} - ۱ + ۳ = \frac{۹}{۲}$$

مساحت قسمت سایه‌زده $= S - S' = \frac{۳۳}{۲} - \frac{۹}{۲} = ۱۲$

۱۱ شکل حاصل از دوران یک نیم‌کره است.

حجم کره $V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \Rightarrow$ حجم نیم کره $= \left(\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}\right) \div ۲ = \frac{۲}{۳}\pi a^{۳}$

۱۲ الف) دو خط متنافر: دو خط در فضا که نقطه‌ی اشتراکی نداشته و هیچ صفحه‌ای هم وجود نداشته باشد که شامل هر دو باشد را دو خط متنافر می‌گویند.

ب) سطح مقطع: شکلی را که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع گویند.

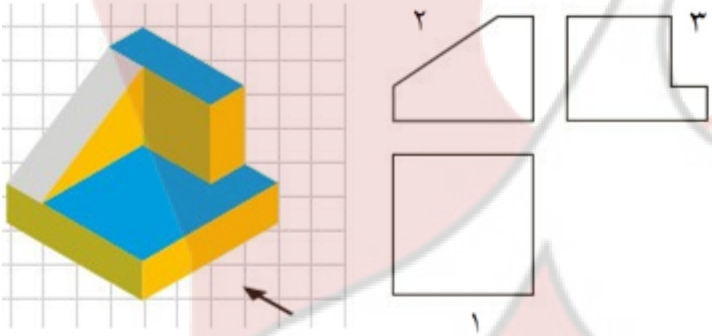
ج) فصل مشترک: خط راستی که اشتراک دو صفحه‌ی متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

۱۳ دو مخروط در بالا و پایین نقطه تلاقی دو پاره‌خط

۱۴ نمای بالا ← (۱)

نمای روبه‌رو ← (۲)

نمای چپ ← (۳)



۱۵ می‌توان از شکل صورت مسئله استفاده کرد و به راحتی به جواب‌ها رسید.

الف) متقاطع

ب) متقاطع یا موازی

ج) موازی یا منطبق یا متقاطع