جزوه درسی هندسه۱ (سال دهم رشته ریاضی)

مدرسه غیردولتی موحد

شامل کلیه تمارین و قضایای کتاب درسی

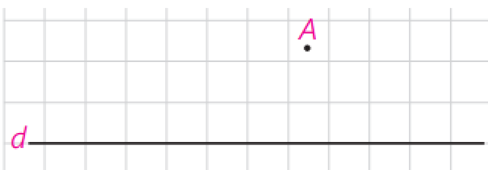
تهیه و تدوین : محمد عبدی

این جزوه شامل تمامی نکات مهم و قضایا و تمرین‌ها و مثال‌های حل‌شده کتاب درسی است و به طور کامل کتاب محور است و تمامی سوالات امتحان نهایی و شبه نهایی داخل جزوه می‌باشد

فصل ۱: درس اول: ترسیم‌های هندسی

۱- نقطه A را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از Aبه یک فاصله مشخص باشند. شرح دهید.

۲- نقطه A مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتیمتر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه A باشند.



۳- نقا ط Aو B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم درنظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه٤ سانتی متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف: نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

این مسئله را در حالت‌های مختلف بررسی کنید.

٤- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتیمتر از هم درنظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان ازA ، ۲ و ازB ، ۲/۵ سانتیمتر باشد.

٥- روش رسم مثلث با اضلاع٤ و ٥ و ٦ را شرح دهید.

٦- نقاط A و B به فاصله ۷ سانتیمتر از هم قرار دارند. نقطه ای پیدا کنید که فاصله اش از نقطه A برابر ....از نقطه B برابر............ باشد.

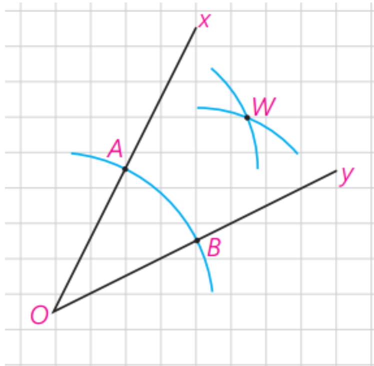
جاهای خالی را به‌گونه ای کامل کنید که مسئله زیر :

الف) دو جواب داشته باشد .

ب) یک جواب داشته باشد .

پ) جواب نداشته باشد.

۷- روش رسم نیمساز را به طور کامل شرح دهید.



نکته: اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد از دو ضلع زاویه به یک فاصله است .

برعکس اگر نقطه‌ای از دو ضلع زاویه به یک فاصله است در این صورت روی نیمساز زاویه قرار دارد.

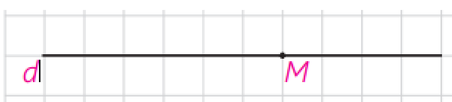
۸- روش رسم عمود منصف پاره خط AB را به طور کامل شرح دهید.

نکته: اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

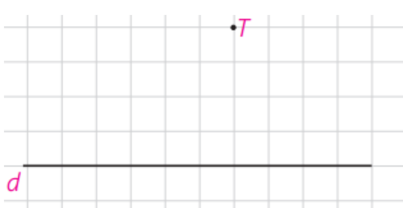
برعکس اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد در این صورت روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

عبارات بالا را ثابت کنید.

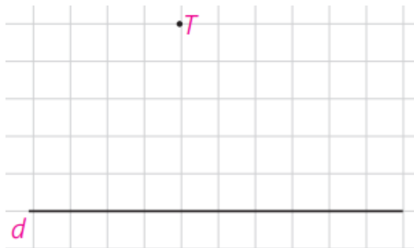
۹- رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه روی آن را شرح دهید.



۱۰- روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید.



۱۱- روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌های غیرواقع بر آن را توضیح دهید.



تمرین‌های کتاب درسی صفحه ۱۵ و ۱۶

۱ـ فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است .
متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ٤ و ۷ باشد.

چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ٤ و ۷ میتوان رسم کرد؟

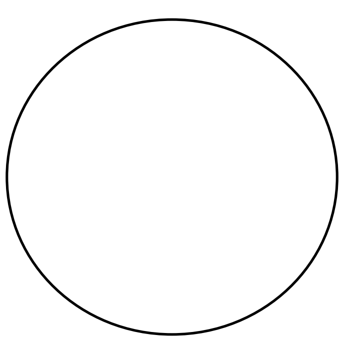
۲- فرض کنیم هر چهار ضلعی که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ٦ سانتیمتر باشد.

۳- فرض کنیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ٥ باشد .

ب)یک لوزی به طول ضلع ٥ و طول قطر ٦ رسم کنید.

٤- یک دایره را در نظر بگیرید. روش پیدا کردن مرکز دایره را توضیح دهید.



۵- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه موردنظر ۲ واحد باشد.

ب) با استفاده از نقطه ای که در قسمت الف یافته‌اید نیمساز زاویه را رسم کنید.

درس دوم: استدلال در هندسه

در هندسه دو مدل استدلال داریم:

۱- استدلال استقرایی: نتیجه گیری کلی بر اساس مشاهدات و شواهد است و هیچ پایه و اساسی ندارد و گاهی اوقا درست و گاهی اوقات نادرست است و نمیتوان نتیجه گیری درستی از آن داشت.

مثال:

۲- استدلال استنتاجی: نتیجه‌گیری کلی بر اساس واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته ایم و قبلا اثبات شده‌اند و همواره درست است.

مثال:

قضیه نیز از استدلال استنتاجی می‌آید و همواره درست است و ما باید بار دیگر اثبات کنیم. و گاهی اوقات در سوال می-گویند با استدلال استنتاجی ثابت کنید.

هر قضیه از دو قسمت **فرض و حکم** تشکیل شده‌است. فرض نیز داده‌های مسئله می‌باشد و باید از آن در اثبات استفاده کنیم ولی حکم عبارتی است که باید به آن برسیم و اثبات کنیم.

فرض معمولا با کلمات **فرض میکنیم، می‌دانیم و اگر** شروع می‌شود ولی گاهی اوقات هم با این کلمات شروع نمی‌شوند و باید خودمان تشخیص دهیم.

حکم معمولا با کلمات **در این صورت، ثابت کنید، آن‌گاه** شروع می‌شود ولی گاهی اوقات هم با این کلمات شروع نمی‌شوند و باید خودمان تشخیص دهیم.

یادآوری دو خط موازی و مورب:

قضیه ۱: مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه می‌باشد.

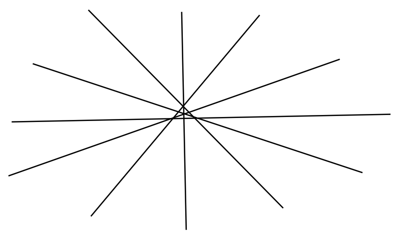
قضیه ۲: با استفاده از قضیه ۱ ثابت کنید مجموع زوایای هر ٤ضلعی ۳٦۰ درجه است.

یادآوری درس ۱: اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

برعکس: اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد در این صورت روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

تعریف خطوط همرس: خطوطی که در یک نقطه به هم میرسند و برخورد می‌کنند را خطوط همرس می‌نامند.

نقطه برخورد این خطوط را نقطه همرسی می‌نامند.



قضیه ۳: ثابت کنید عمود منصف‌های سه ضلع هر مثلث همرس می‌باشند.

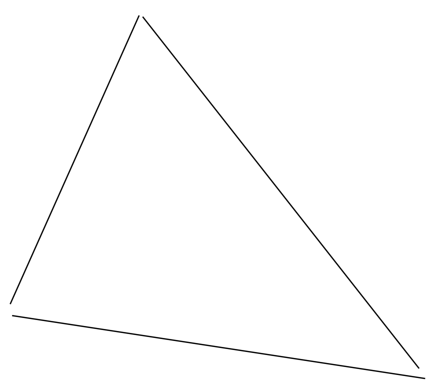
یادآوری درس ۱: اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

برعکس: اگر نقطه‌ای از دو ضلع زاویه به یک فاصله است در این صورت روی نیمساز زاویه قرار دارد.

قضیه ٤: نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.

قضیه ۵: سه ارتفاع هر مثلث همرس اند.

قضیه ٦: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچکتر.



عکس قضیه: اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل میشود «عکس قضیه »گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

قضایای زیر را عکس کنید.

الف: اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

ب: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

پ: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچکتر.

گزاره یک جمله خبری است که یا **درست است یا نادرست**، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما ممکن است معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن **گزارهٔ ساده** میگویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و **ترکیبی از چند گزاره ساده باشد** که به آن **گزاره مرکب** می‌گویند؛

مثلاً گزاره‌های«فردا هوا بارانی است و پانزده عددی اول است، هرکدام یک گزاره ساده است ولی فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است یک گزارهٔ مرکب است.

به طور کل کلیه فرمول‌های ریاضی نیز گزاره می‌باشند ولی جملات عاطفی و امری و پرسشی گزاره به حساب نمی‌آیند.

جمله‌های زیر گزاره اند:

الف: مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

ب: $3 < 2$

جمله‌های زیر گزاره نیستند:

الف: آیا فردا هوا بارانی است؟

ب: چه هوای خوبی!

پ: کتابت را مطالعه کن.

نقیض یک گزاره: همانطورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

نکته: برای نقیض کردن می‌توان فعل آخر جمله را نقیض کرد یا می‌توان اول جمله خبری چنین نیست اضافه کرد.

الف: گزاره((a از b بزرگتر است».

نقیض آن: چنین نیست که a از b بزرگتر باشد. که **معادل است** با a از b

بزرگتر نیست. **معادل است** با aاز b کوچکتر و یا با b برابر است .

ب: گزاره مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰درجه است .

نقیض آن :چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است. که

معادل است با مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰ درجه نیست .

پ: گزاره :یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش ۳۶۰درجه نیست .

نقیض آن:چنین نیست که یک چهارضلعی وجودداشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش ۳۶۰درجه باشد.

معادل است با هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش ۳۶۰درجه است.

گزاره شرطی: در برخی گزاره‌ها به‌جای اینکه درباره چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.

به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گویند. به طور کل گزاره‌هایی که با اگر شروع می‌شوند و سپس آن‌گاه می‌آید را **گزاره‌های شرطی** می‌نامند.

اگر هوا ابری باشد **آن‌گاه** باران می‌بارد.

برهان غیرمستقیم یا برهان خلف: نوعی اثبات است که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد و به یک تناقض یا به یک گزاره غلط یا غیرممکن می‌رسیم. در این حالت نتیجه می‌گیریم که فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی‌تواند غلط باشد.

مثال برهان خلف: ثابت کنید از هر نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک عمود رسم کرد.

عکس قضیه ٦: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگتر، **بزرگتر است** از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچکتر.

قضیه دو شرطی: اگر عکس یک قضیه نیز درست باشد در این صورت عکس آن هم قضیه محسوب میشود و اینگونه قضایا را دو شرطی می‌نامند.

اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویۀ مقابل به ضلع کوچکتر، و برعکس.

برای بیان قضایای دو شرطی می‌توان بین فرض و حکم **((اگر و تنها اگر))** یا **((اگر و فقط اگر))** یا نماد $\Longleftrightarrow$ نیز استفاده کرد همچنین نیزمی‌توان در انتهای جمله کلمه **برعکس** نوشت.

جملات زیر را به صورت دو شرطی بنویسید.

الف: اگر در مثلثی دو ضلع برابر باشد آنگاه متساوی‌الساقین است.

ب: اگر یک چهارضلعی مربع باشد آنگاه دارای چهار ضلع برابر است.

پ: اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود آن‌گاه بر دیگری هم عمود است.

مثال نقض: نوع دیگری از استدلال است برا اینکه بیان کنید یک گزاره نادرست است مثال می‌آوریم و آن عبارت یا گزاره نقض می‌کنیم به طور کلی به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

الف) همه اعداد صحیح، مثبت‌اند.

ب) هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است

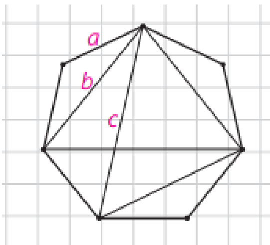
پ) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰درجه است.

ت) به ازای هر عدد طبیعیn ، مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است

ث) تمام اعداد اول فرد می‌باشند.

ج) مربع هر عدد همواره بزرگتر از خود عدد است.

۱ــ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b واز سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی الساقین، به‌دست می‌آید.



۲ــ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه A وB ، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ است.

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، همنهشت اند.

تمرین‌های کتاب صفحه ۲٦ و ۲۷:

۱ــ می دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن میتوان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع میکند.

۲- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ باشد آنگاه $B \neq C$

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچکترین زاویه، کوچکتر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچکتر است.

٤- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف: هر لوزی یک مربع است.

ب: مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ: مثلثی با دو زاویه قائمه وجود ندارد.

ت: همه فلزات جامدند.

۵- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف: در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب:اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ: در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت: اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

٦- فرض کنید ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه A باشد.جاهای خالی را پر کنید.

الف: $D_2 > A_1$ زیرا......................................

ب: $D_2 > A_2$ زیرا......................................

$AC > DC$ زیرا......................................

با روندی مشابه نشان دهید $AB > BD$

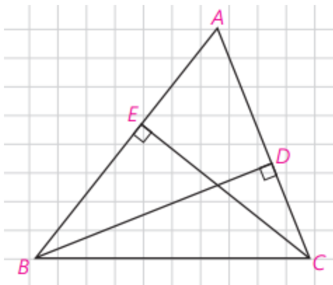
حال نشان دهید $AB + AC > BC$

نتیجه: در هر مثلث مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است.

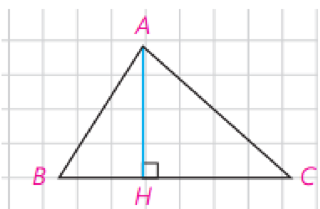
فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

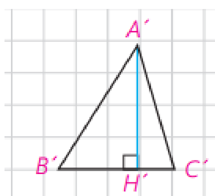
این فصل در مورد خواص مثلث‌ها می‌باشد که در امتحان پایانی ۱ یا ۲ سوال داریم.

قضیه ۱: در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت وارد ارتفاع‌های وارد بر آنها برابر است.

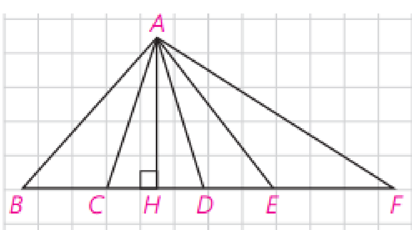


قضیه ۲: هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده است.

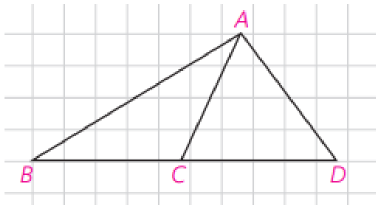




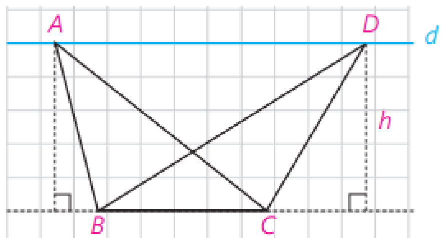
مثال: با توجه به قضیه بالا نسبت مساحت‌های مثلث‌ها را دو به دو بررسی کنید.



قضیه ۳: اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آن‌هاست.



قضیه ٤: اگر دو مثلث، قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعدهٔ آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت اند. مثلا در شکل بالا مثلث‌های ABC، DCB هم‌مساحت اند.



ویژگی‌های تناسب:

۱) $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$$

۲) $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۳) $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\ \text{یا}\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

۴) $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ \text{یا}\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

۵) $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ \text{یا}\ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$$

۶) $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

۷) $$\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}\Rightarrow\frac{a_۱}{b_۱}=\frac{a_۲}{b_۲}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{b_۱+b_۲+\cdots+b_n}$$

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲+۴+۶+۸}{۳+۶+۹+۱۲}=\frac{۲۰}{۳۰}$$

واسطه هندسی: b را واسطه هندسی دو عدد a و c می‌گویند هرگاه $b^2 = a \times c$

به بیان دیگر در کسر مقابل b نیز واسطه هندسی a و c است. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

مثال: واسطه هندسی دو عدد ٤ و ۹ را بیابید.

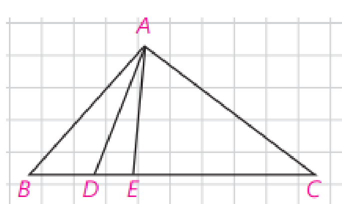
مثال: واسطه هندسی دو عدد ۲ و ۸ را بیابید.

تمرین‌های صفحه ۳۳:

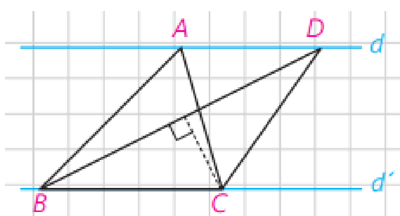
۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ باشد حاصل $x + y + z$ را بیابید.

۲- طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره خط به طول های۸ و ۱۰ سانتی متر است.

۳- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را بیابید.



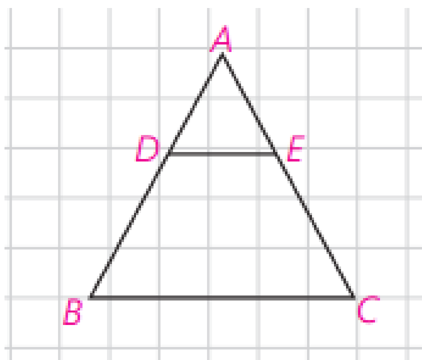
٤- در شکل مقابل $d||d'$ است و مساحت مثلثABC ، $8cm^2$ است. اگر $BD = 6\ cm$ باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست‌آورید.



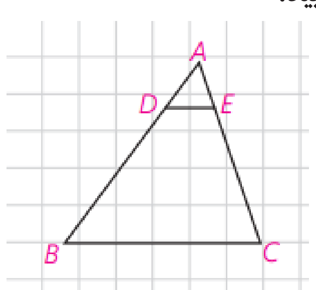
درس دوم: قضیه تالس و کاربردهای آن

قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه رو داشته باشیم **BC||DE**، آنگاه:

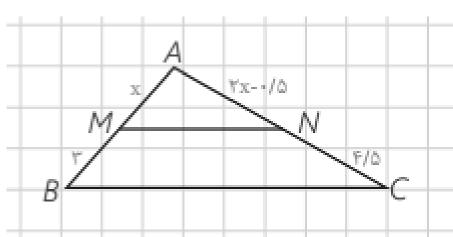
$$\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC}$$



مثال: در شکل مقابل BC||DE و $AD=1$ و $DB=3$ و $AE=0.8$ باشد طول ضلع AC را بیابید.

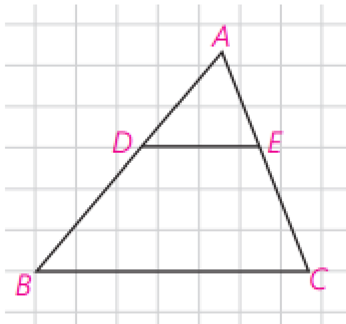


مثال: در شکل مقابل $BC||MN$ ؛ به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.



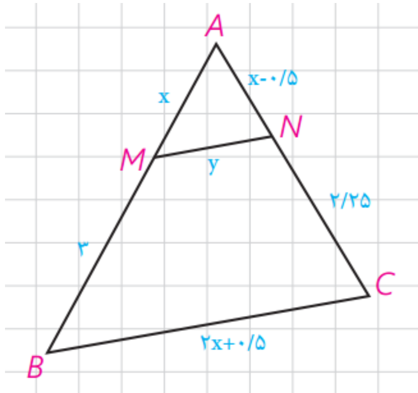
تعمیم قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازهٔ ضلع‌های آن با اندازهٔ ضلع‌های مثلث اصلی متناسب اند و داریم:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$



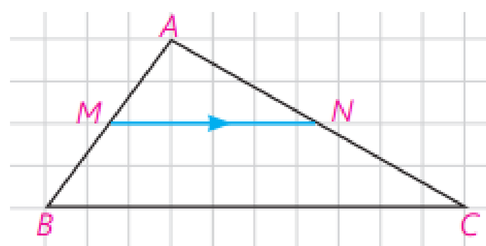
عکس قضیه تالس: عکس قضیه تالس را بیان کنید و سپس اثبات کنید.

مثال: در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y را به دست آورید.



تمرین‌های صفحه ۳۶ و ۳۷:

۱- در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

ب) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

ت) $\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{BC}$

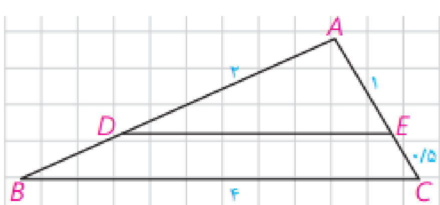
ث) $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{CA} = \frac{MN}{BC}$

ج) $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$

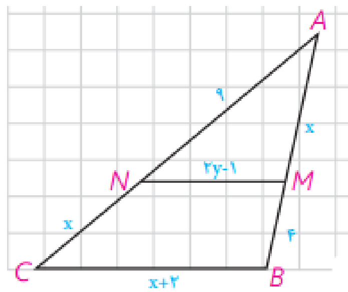
چ) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

ح) $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC}$

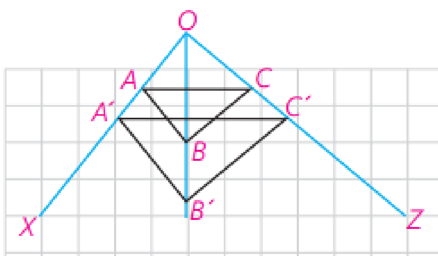
۲- در شکل مقابل $BC \parallel DE$ ؛ باتوجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.



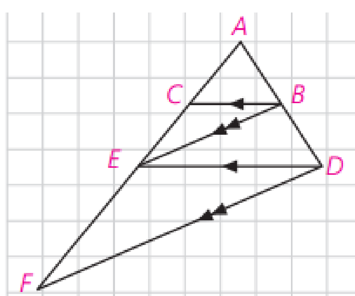
۳- در شکل مقابل BC||MN ؛ مقادیر x و y را به‌دست آورید.



٤- در شکل مقابل میدانیم $AB||A'B'$ و $BC||B'C'$ با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید $AC||A'C'$:

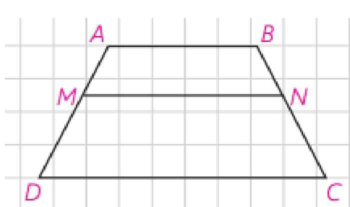


٥- در شکل مقابل می‌دانیم DE ||BC و BE|| DF، به کمک قضیه تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه تناسبها با یکدیگر، ثابت کنید $AE^2 = AF \times AC$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



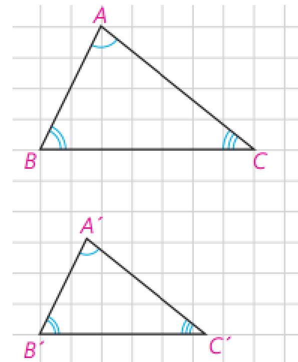
٦- در ذوزنقه مقابل CD||AB||MN ، ثابت کنید.

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$



درس سوم: تشابه دو مثلث

با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم اندازه و اندازه های اضلاع آنها متناسب باشند.



$$\hat{A} = \hat{A'} \quad \hat{B} = \hat{B'} \quad \hat{C} = \hat{C'} \quad \text{و} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \Longleftrightarrow A'B'C' \sim ABC$$

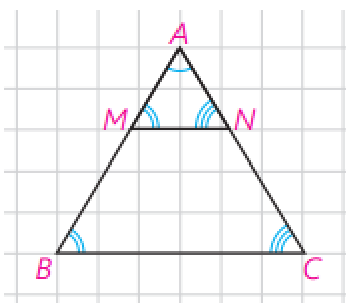
به k نیز نسبت تشابه میگویند.

نکته مهم: اگر دو مثلث باهم متشابه باشند و نسبت تشابهشان k باشد در این صورت همواره داریم:

$\boldsymbol{k} =$ نسبت محیط‌ها $=$ عمود منصف‌ها $=$ نسبت میانه‌ها $=$ نسبت ارتفاع‌ها

$\boldsymbol{k^2} =$ نسبت مساحت‌ها

قضیه۸: تعمیم قضیه تالس و خود قضیه تالس را با استفاده از تشابه دو مثلث ثابت کنید.



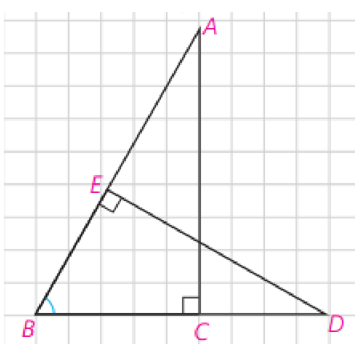
قضیه ۹: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.

قضیه ۱۰: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها، هم اندازه باشند، دو مثلث متشابه اند.

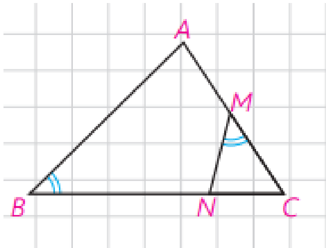
قضیه ۱۱: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه اند.

مثال: در شکل مقابل دلیل تشابه دو مثلث ABC و BDE را بیان کنید.

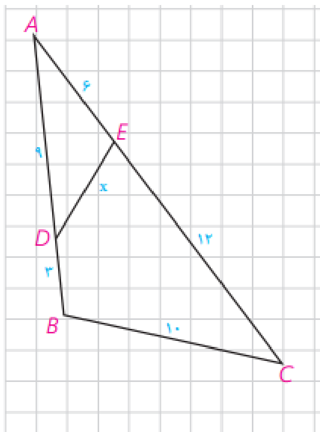
اگر $AB = 21$ و $AC = 18$ و $DE = 15$ باشد اندازه ضلع BD را بیابید.



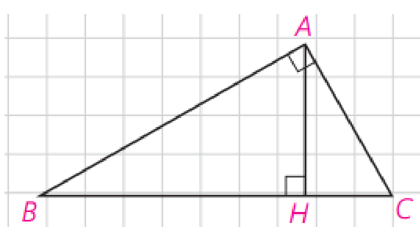
مثال: در مثلث ABC ، از نقطه M وسط AC ، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده ایم. اگر $NC = 2$ و $NB = 4$ در این صورت طول AC را به دست آورید. ((ابتدا دلیل تشابه و نسبت تشابه بنویسید))



مثال: در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را بیابید.



قضیه ۱۲: در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

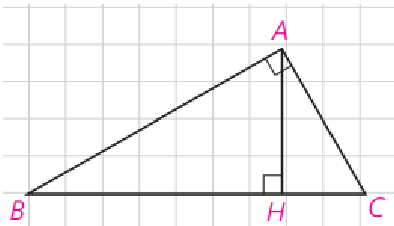


الف: ابتدا تشابه دو مثلث ABC و ABH را ثابت کنید.

ب: سپس تشابه دو مثلث ABC و ACH را ثابت کنید.

پ: از قسمت الف و ب تشابه دو مثلث ACH و ABH را نتیجه بگیرید.

با اثبات قضیه بالا و محاسبه واسطه هندسی از نسبت‌های تشابه نتایج زیر حاصل می‌شود که باید حفظ کنیم.



$1: AB^2 = BC.BH$

$2: AC^2 = BC.CH$

$3: AB^2 + AC^2 = BC^2$

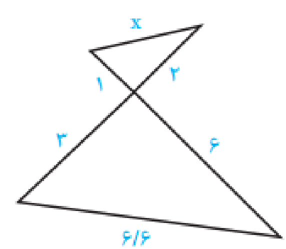
$4: AH^2 = BH.CH$

$5: AH \times BC = AB \times AC$

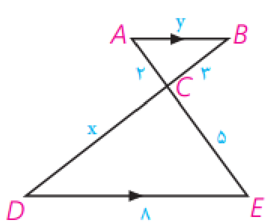
تمرین‌های صفحه ۴۲ و ۴۳ و ۴۴

۱- در هر یک از شکلهای زیر، تشابه مثلثها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x , y را مشخص کنید:

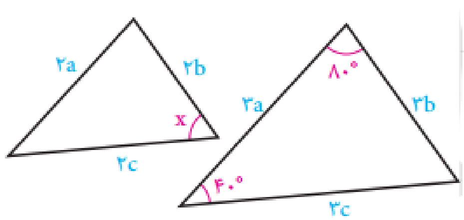
ب



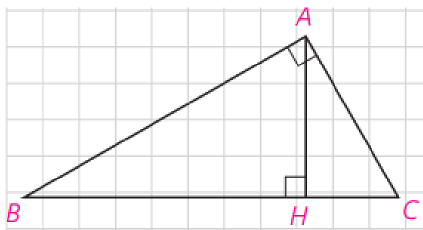
الف



ج



۲- در مثلث قائم الزاویه ABC که $A = 90^{\circ}$، ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

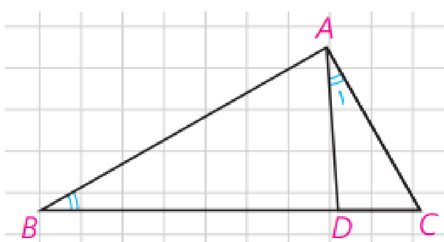


۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=?

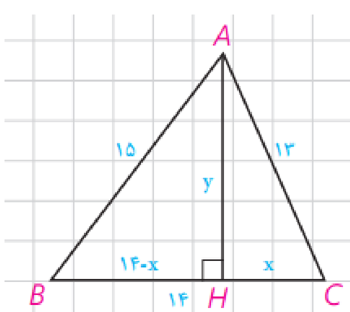
---

۲) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=?

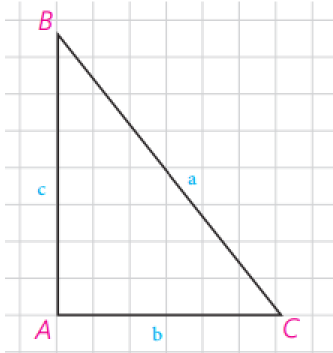
۳- در شکل روبه‌رو $B = A_1$ و $AC = 4$ و $BD = 6$، طول BC را به‌دست آورید.



٤- در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱٤ و۱٥ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH وACH ، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



٦- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می گوید اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه



.$a^2 = b^2 + c^2$

الف: عکس این قضیه را بنویسید.

ب: با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه ای درنظر بگیرید که $\widehat{A'} = 90$ و $AC = A'C'$ و $AB = A'B'$

۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به دست آورید و ثابت کنید $BC = B'C'$

٤) توضیح دهید چرا $ABC \cong A'B'C'$، و نتیجه بگیرید $\widehat{A} = 90$

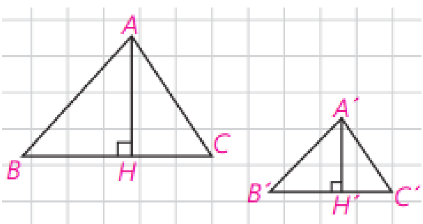
ج) قضیه فیثاغورس و عکس آنرا به صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.

درس چهارم: کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث

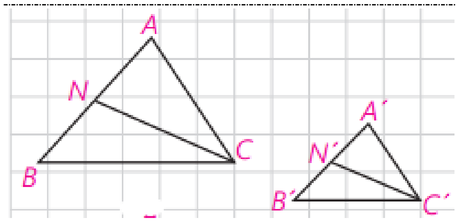
قضیه ۱۳: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

فرض: $A'B'C' \sim ABC \Longleftrightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

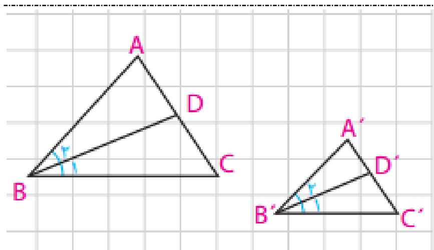
الف: باید نشان دهیم نسبت ارتفاع‌ها k است. حکم: $\frac{A'H'}{AH}=k$



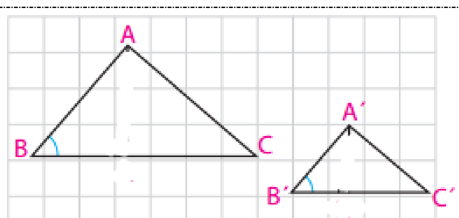
ب: باید نشان دهیم نسبت میانه‌ها k است. حکم: $\frac{N'C'}{NC}=k$



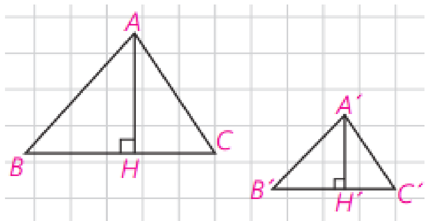
پ: باید نشان دهیم نسبت نیمسازها k است. حکم: $\frac{B'D'}{BD}=k$



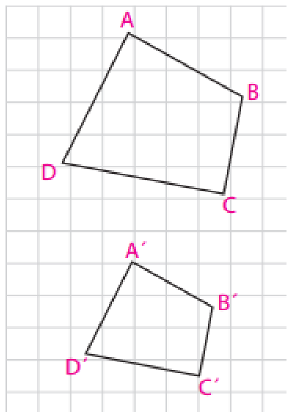
ت: باید نشان دهیم نسبت محیط‌ها k است. حکم: $\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=k$



ث: باید نشان دهیم نسبت مساحت‌ها k^2 است. . حکم: $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k$



قضیه ۱۴: هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط های آنها، مساوی k ونسبت مساحت‌های آنها k^2 است



مثال: محیط یک مثلث متساوی الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگتر، چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

نکته مهم: هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه اند.

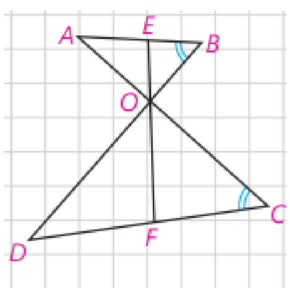
مثال: اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگتر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچکتر، چند واحد سطح است؟

مثال: نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آن‌ها ۱۲ واحد باشد محیط ۵ ضلعی دیگر چند واحد است؟ (مسئله چند جواب دارد؟)

مثال: اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟

مثال: در شکل روبه‌رو $EF = 10cm$ نیمساز دو زاویه دو زاویه متقابل به راس O است و $\widehat{B} = \widehat{C}$.

الف: چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند.



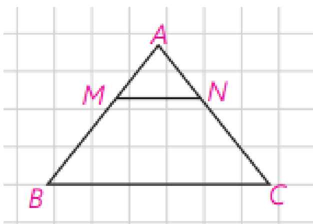
ب: اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ باشد نسبت $\frac{OE}{OF}$ ررا بیابید.

پ: طول‌های OF و OE را بیابید.

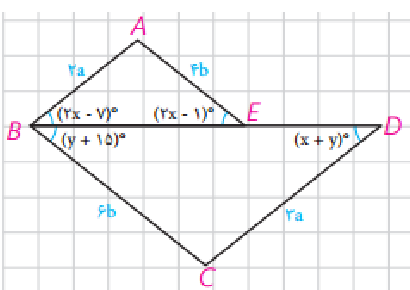
تمرین‌های صفحه ۴۸ و ۴۹

۱- طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتیمتر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتیمتر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

۲- در شکل روبه‌رو $BC \parallel MN$ است و مساحت ذوزنقه $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.

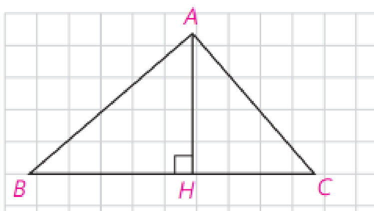


۳- در شکل روبه‌رو میدانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیا نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABEرا بیابید



٤- در مثلث قائم الزاویه ABC که $A = 90^\circ$ ارتفاع AH را رسم میکنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \backsim \Delta ABC \backsim \Delta ACH$ است. با توجه به این موضوع،

الف) ثابت کنید: $\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$ و $\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$



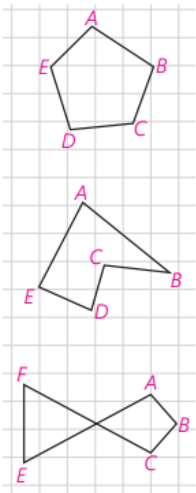
ب: با جمع کردن دو طرف تساوی های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

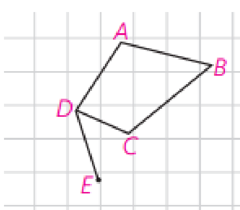
فصل سوم: چندضلعی‌ها

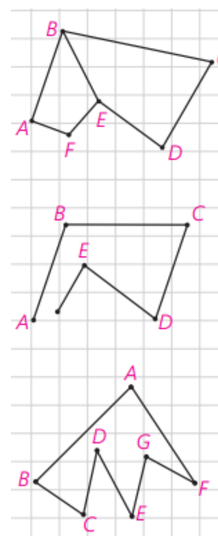
چندضلعی: n ضلعی شکلی است شامل n $(n \geq 3)$ پاره‌خط متوالی که :

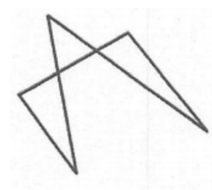
الف: هر پاره‌خط دقیقا دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

ب: هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترکند روی یک خط نباشند.



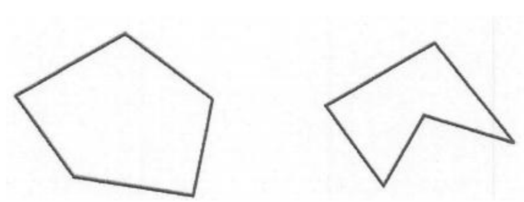






چندضلعی محدب: یک چند ضلعی را محدب گوییم هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند (به بیان ساده‌تر زاویه بزرگتر از ۱۸۰ در چند ضلعی وجود نداشته باشد)

نکته: هر چند ضلعی که محدب نباشد مقعر می‌نامند.



قطر در چند ضلعی محدب: در هر چندضلعی محدب هر پاره‌خط را که در دو انتهای آن دو راس غیر مجاور باشند قطر می‌نامند.

تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب از فرمول مقابل حساب می‌شود. $\frac{n(n-3)}{2}$

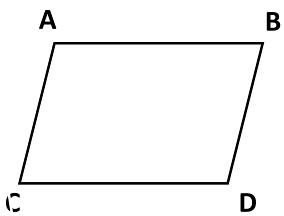
نکته تستی: اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی محدب یک ضلع اضافه شود به تعداد اقطار $(n-1)$ قطر اضافه می‌شود.

مثال: تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب سه برابر تعداد اضلاع آن است. تعداد اضلاع را بیابید.

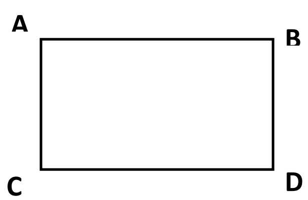
نکته: در هر n ضلعی از هر راس می‌توان $(n-3)$ قطر نیز رسم کرد.

تعاریف مهم چندضلعی‌ها:

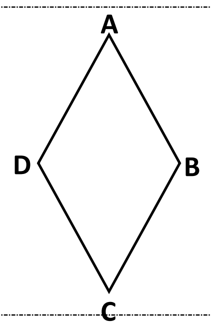
۱- متوازی الاضلاع چهارضلعی ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.



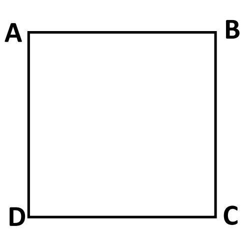
۲- مستطیل چهارضلعی ای است که، هم زاویه‌های آن قائمه باشند .



۳- لوزی چهارضلعی ای است که، هر چهار ضلع آن هم اندازه باشند.



٤- مربع چهارضلعی ای است که هر چهار ضلع آن هم اندازه و حداقل یک زاویه آن قائمه باشد.



چند خاصیت مربع: ۱- قطرها یکدیگر را نصف میکنند و بر هم عمودند. ۲- با رسم قطرها ٤ مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین ساخته می‌شود. ۳- اگر طول هر ضلع مربع برابر a باشد پس طول هر قطر برابر است با $\sqrt{2}a$

نتیجه‌گیری‌های مهم:

۱- هر مستطیل، مربع، لوزی نیز نوعی متوازی‌الاضلاع هستند ولی هر متوازی‌الاضلاع نمی‌تواند مستطیل، مربع، لوزی باشد.

۲- هر مربع نوعی مستطیل و لوزی است ولی هر مستطیل و لوزی نمی‌توانند مربع باشند.

کاردرکلاس صفحه ۵۶:

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید:

الف) مستطیل یک متوازی الاضلاع است.

ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

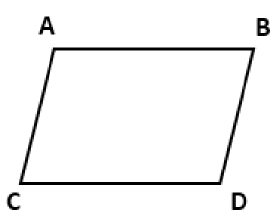
پ) لوزی یک متوازی الاضلاع است.

در لوزی ABCD قطر AC را رسم میکنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت .... همنهشت اند. بنابراین دو زاویه.................... و ....هم اندازه اند.

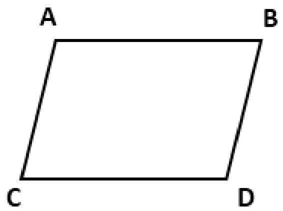
در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و ADنیز موازی اند. یعنی لوزی متوازی الاضلاع است. بنابراین، لوزی متوازی الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی الاضلاع است.

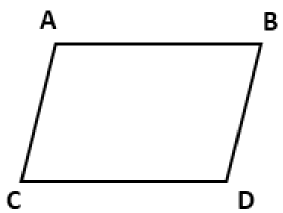
قضیه ۱: ثابت کنید در هر متوازی‌الا ضلاع، اضلاع روبه‌رو باهم برابرند.



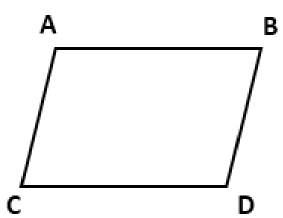
عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع روبه‌رو باهم برابر باشند آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



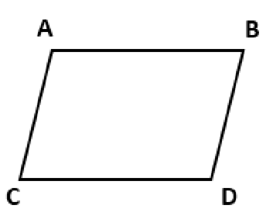
قضیه ۲: در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.



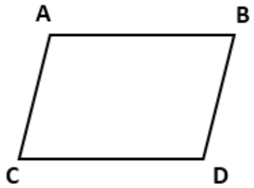
عکس قضیه ۲: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مجاور مکمل باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



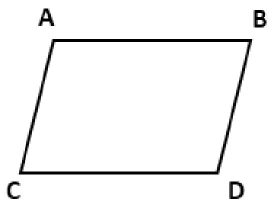
قضیه ۳: در هر متوازی‌الاضلاع زوایای مقابل برابرند.



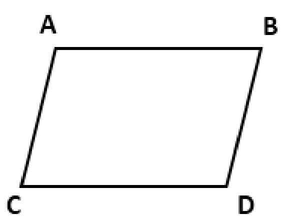
عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مقابل برابر باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



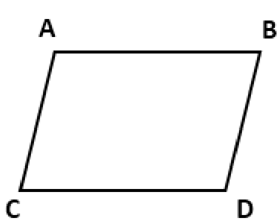
قضیه ٤: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.



عکس قضیه ٤: اگر در یک چهارضلعی قطرها منصف یکدیگر باشند، آنگاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



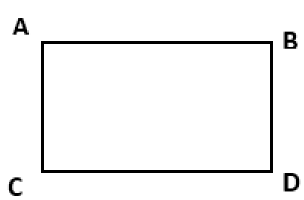
فعالیت کتاب درسی صفحه ٥٩: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشد، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



تمرین کتاب درسی صفحه ٦٤ شماره ۷: ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهار ضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

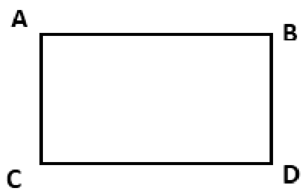
ب: رابطه‌ای برای محیط متوازی‌الاضلاع بیابید.

۲: مستطیل: متوازی‌الاضلاعی است که دارای حداقل یک زاویه ۹۰ درجه باشد.



قضیه ٥: در هر مستطیل ۲ قطر باهم برابر و منصف یکدیگرند. (بر عهده دانش‌آموز)

قضیه ٦: متوازی‌الاضلاعی که دو قطر برابر دارد مستطیل است.



ویژگی بسیار مهم در مثلث قائم‌الزاویه:

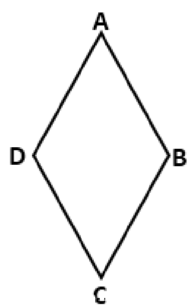
قضیه ۷: در هر مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است. (بسیار مهم)

عکس قضیه ۷: اگر در مثلثی میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آنگاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

تمرین ٤ کتاب درسی صفحه ٦٤: در مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۳۰ درجه باشد آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است.

ب: ضلع مجاور به زاویه ۳۰ درجه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

عکس تمرین بالا: در مثلث قائم‌الزاویه اگر یک ضلع نصف وتر باشد آن‌گاه زاویه روبه‌رو به این ضلع ۳۰ درجه است.

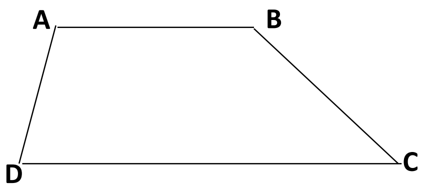


٤- لوزی: چهارضلعی است که هر ٤ ضلع آن برابرند.

ویژگی‌های لوزی: قطرها عمودمنصف یکدیگرند و قطرها نیم‌ساز زاویه‌های لوزی می‌باشند.

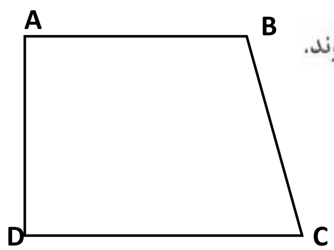
تمرین: نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است .

تمرین: نشان دهید متوازی الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویه آن باشد، لوزی است



۵- ذوزنقه: چهار ضلعی است که فقط ۲ ضلع آن موازی‌اند.

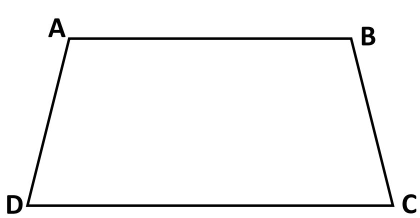
$$AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \\ \hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \end{cases}$$



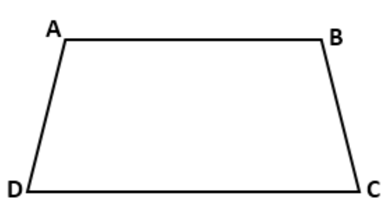
ضلع‌های غیر موازی AD و BC **ساق‌های** ذوزنقه و AB و CD **قاعده‌های** ذوزنقه نامیده می‌شوند.

ذوزنقه قائم‌الزاویه: هر گاه یک ساق بر یکی از قائده‌ها عمود شود مسلما بر دیگری هم عمود است و این ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامیم.

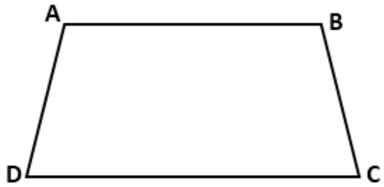
ذوزنقه متساوی‌الساقین: اگر در یک ذوزنقه ساق‌ها باهم برابر باشند ذوزنقه را متساوی‌الساقین می‌نامیم.



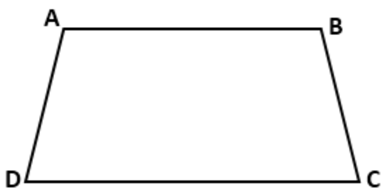
قضیه۸: در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده باهم برابرند.



عکس قضیه بالا: اگر در یک ذوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده باهم برابر باشند آن‌گاه ذوزنقه متساوی‌الساقین است.



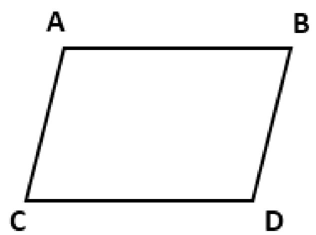
قضیه۹: در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین اقطار با یکدیگر برابرند و برعکس.



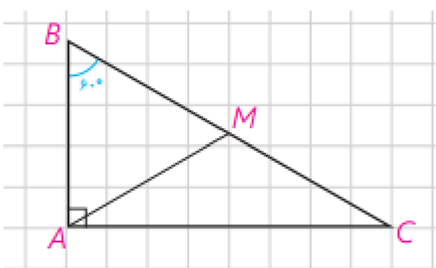
تمرین‌های کتاب صفحه ۶۳:

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

۳- از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.



٤- در مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۳۰ درجه باشد آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است.

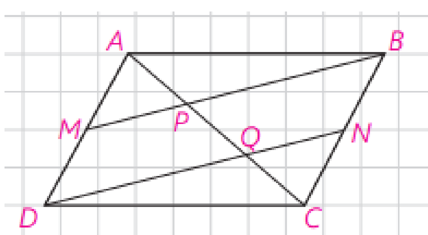


ب: ضلع مجاور به زاویه ۳۰ درجه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

پ: اکنون مثلث قائم‌الزاویه ای رسم کنید که اندازه یک زاویه آن 45° باشد و نشان دهید که اندازه هر ضلع زاویه قائمه در آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ اندازه وتر است.

۵- در مثلث قائم الزاویه ABC، اندازه زاویه B برابر 15° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است.

٦- در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$



۷- ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می آید.

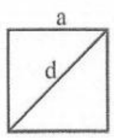
ب: این چهارضلعی باید چه ویژگی ای داشته‌باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

پ:چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

درس دوم: مساحت و کاربردهای آن

۱- مربع:

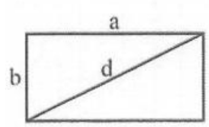
$$\begin{cases} S = a^2 \rightarrow \text{یک ضلع به توان ۲} \\ P = 4a \\ d = a\sqrt{2} \end{cases}$$



مثال: مساحت یک مربع با محیط آن برابر است. طول قطر آن را بیابید.

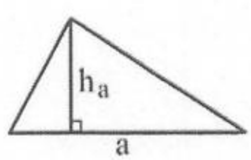
۲- مستطیل:

$$\begin{cases} S = ab \rightarrow \text{طول * عرض} \\ P = 2(a+b) \\ d = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$



۳- مثلث:

$$\begin{cases} S = \dfrac{a \times h_a}{2} \rightarrow \dfrac{\text{قاعده * ارتفاع}}{2} \\ P = \text{مجموع طول سه ضلع} \end{cases}$$

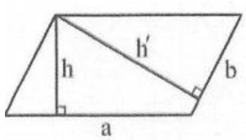


مثال: در یک مثلث متساوی‌الساقین ABC، اگر $AB = AC = 5$ و $BC = 6$ باشد مساحت مثلث را بیابید.

تمرین: با استفاده از قضیه فیثاغورس فرمولی برای مساحت و ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a بیابید.

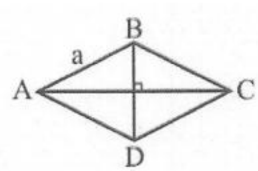
٤– متوازی‌الاضلاع:

$$\begin{cases} S = a \times h = b \times h' \rightarrow \text{ارتفاع × قاعده} \\ P = ۲(a+b) \end{cases}$$

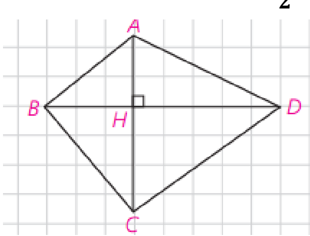


٥– لوزی:

$$\begin{cases} S = \dfrac{AC \times BD}{۲} \rightarrow \text{نصف حاصل‌ضرب دو قطر} \\ P = ۴a \end{cases}$$



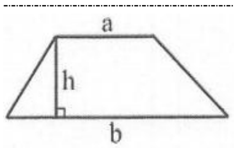
تمرین کتاب: در چهار ضلعی $ABCD$، دو قطر AC و BD بر هم عمودند. ثابت کنید $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD$



نکته مهم: هر چهار ضلعی که دو قطر آن بر هم عمود باشند مساحت برابر است با..........................

٦– ذوزنقه:

$$\begin{cases} S = \dfrac{(a+b) \times h}{۲} \rightarrow \text{نصف مجموع دو قاعده × ارتفاع} \\ P = \text{مجموع طول چهار ضلع} \end{cases}$$



مساحت اشکال زیر را بیابید.

مثال مهم: در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است از نقطه دل‌خواه M روی قاعده BC دو عمود MF و ME بر دو ساق رسم کرده‌ایم نشان دهید مجموع این ۲ عمود برابر است با ....

نتیجه: در هر مثلث متساوی‌الساقین مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده از ....برابر است با ....

مثال مهم: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a از نقطه دل‌خواه o درون مثلث سه عمود OMو OL و OK بر سه ضلع رسم می‌کنیم. نشان دهید $OK+OL+OM=h$

نتیجه: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث از سه ضلع برابر........................ هست.

یادآوری چند ویژگی مهم در مثلث:

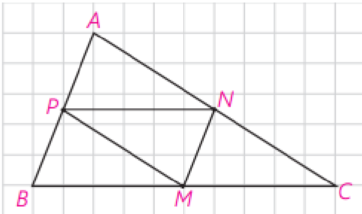
ویژگی ۱: در دو مثلث اگر اندازهٔ قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های متناظر این قاعده-هاست.

$$\frac{S}{S'}=\frac{h}{h'}$$

ویژگی ۲: در دو مثلث که اندازهٔ دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

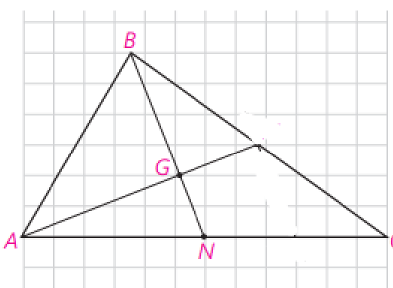
مثال مهم: نشان دهید در هر مثلث هر میانه مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند.

تمرین کتاب : P و N و M وسط‌های سه ضلع مثلث ABC می‌باشند نشان دهید ٤ مثلث هم‌نهشت به وجود می‌آید.



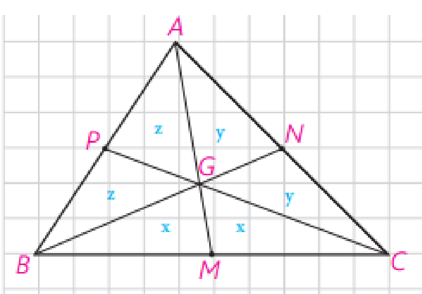
نتیجه بسیار مهم: اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث همنهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می آید.

قضیه ۱۰: سه میانه هر مثلث در نقطه ای درون آن مثلث همرس‌اند ثابت کنید فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازهٔ میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازهٔ میانه نظیر آن رأس است.

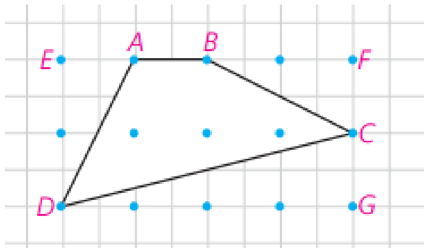


نکته: G را نقطه ثقل مثلث می‌نامند .

مثال مهم: نشان دهید سه میانه مثلث آن را به ٦ مثلث هم مساحت تقسیم می کند.



نقاط شبکه‌ای و مساحت



مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع اند؛ به طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر **۱ واحد** است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه ای واقع اند، **چندضلعی‌های شبکه ای** می‌نامند .

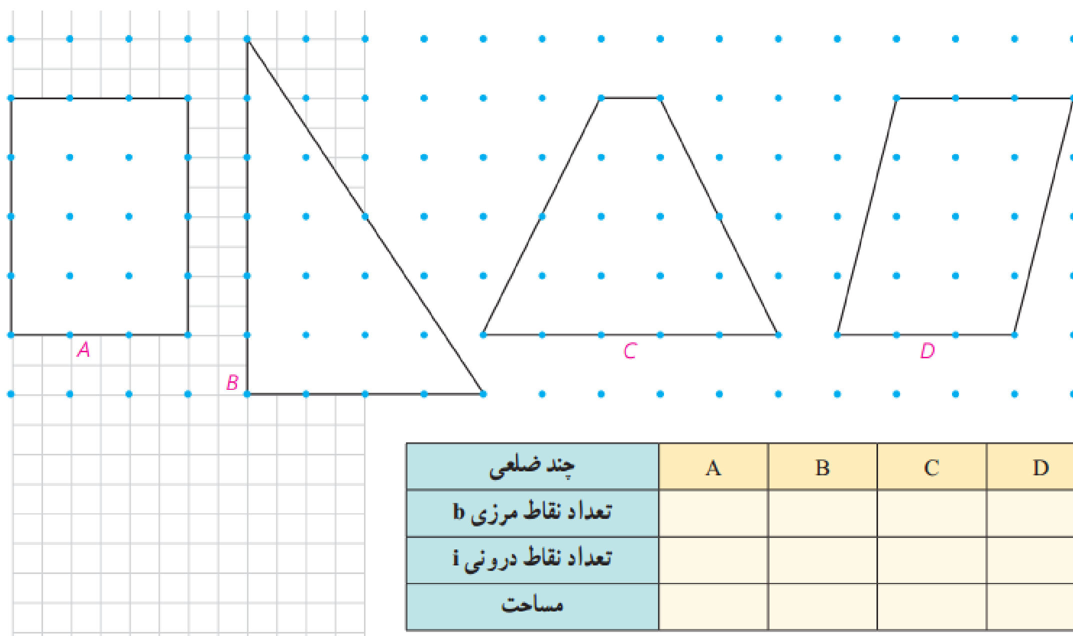
نقاط شبکه ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را **نقاط مرزی** و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط **درونی شبکه‌ای** برای چندضلعی شبکه ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه ای است که دارای ٤ نقطه مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

مساحت چند ضلعی شبکه‌ای از فرمول زیر به دست می‌آید.

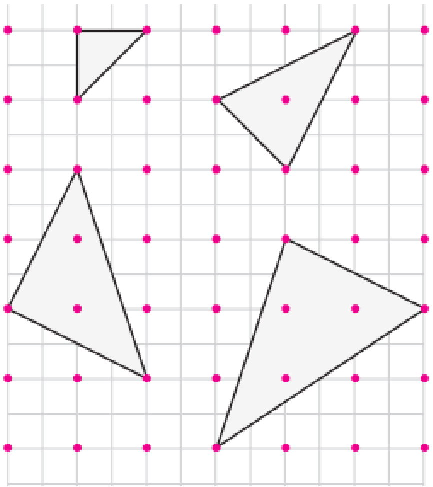
$$S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

به طوری که **b را نقاط مرزی** و **i را نقاط درونی شبکه‌ای** می‌نامند.

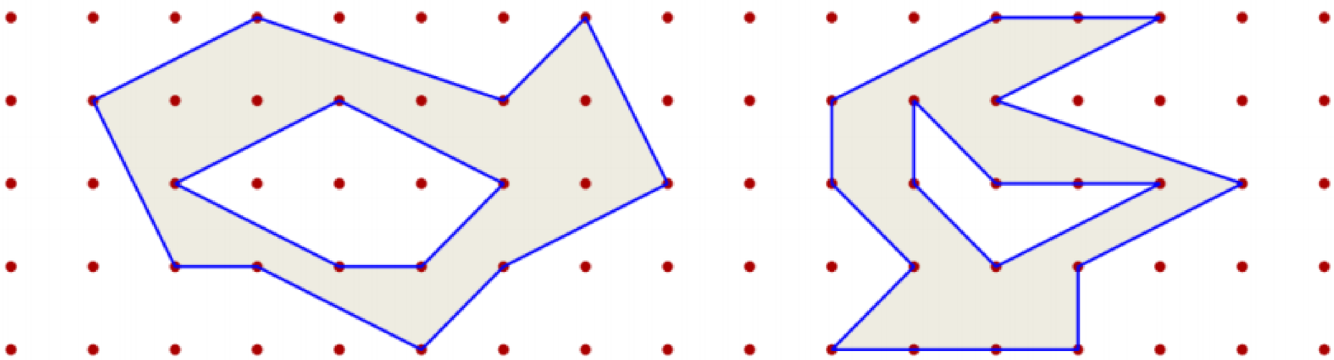


چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b				
تعداد نقاط درونی i				
مساحت				

مثال: مساحت مثلث‌های مقابل را بیابید.



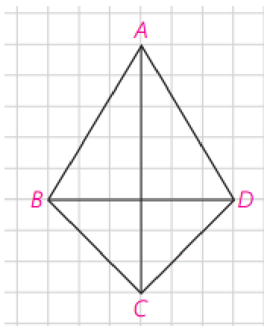
مثال: در شکل‌های زیر مساحت قسمت هاشورخورده را بیابید.



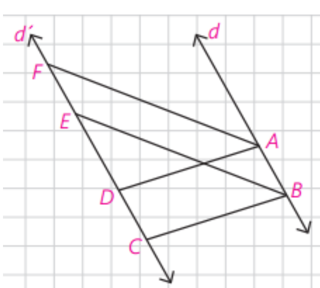
تمرین‌های کتاب صفحه ۷۲

۱- در یک لوزی اندازه هر ضلع $2\sqrt{10}$ است و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را بیابید.

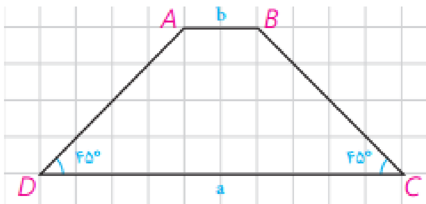
۲- در چهارضلعی ABCD ، مطابق شکل AB = AD و BC = CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای A و C است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ٦ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



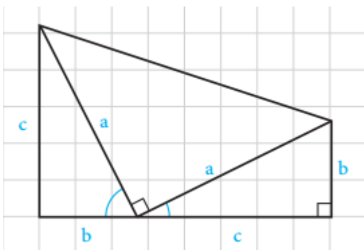
۳- در شکل دو خط d و d' موازی‌اند و ABCD و ABEF هردو متوازی الاضلاع اند .اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



٤- در ذوزنقه شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه های دو زاویه مجاور به یک قاعده $45°$ است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید

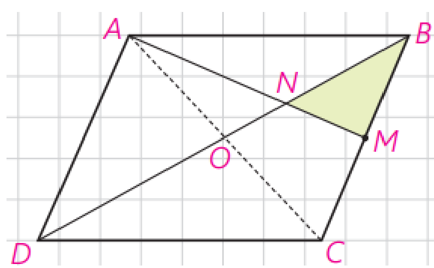


۵- مساحت ذوزنقه مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه ای به‌دست می‌آید؟

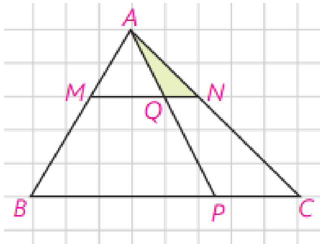


٦- در متوازی الاضلاع ABCD ، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید:

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$



۷- در مثلث ABC ، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$ وهمچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

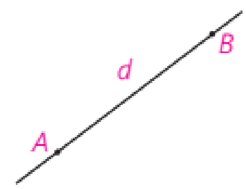


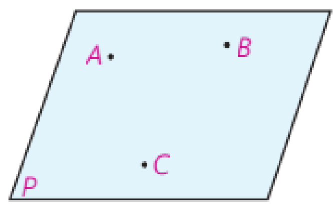
۹- یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

۱۰- مساحت یک چندضلعی شبکهای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

فصل چهارم: تجسم فضایی

مفاهیم <u>نقطه، خط و صفحه</u> از اساسی‌ترین مفاهیم در هندسه است که معمولاً برای نمایش آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم.

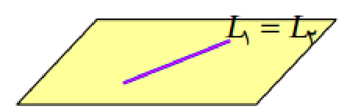


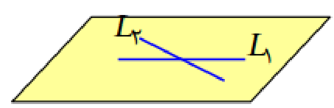


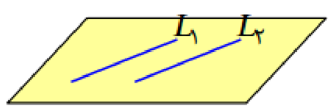
نکته: خط راست از هر دو طرف نامحدود است. صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامتی ندارد.

حالتهای مختلف دو خط در صفحه و فضا

دو خط در یک صفحه نسبت به هم موازی یا متقاطع اند. وقتی دو خط برهم منطبق میشوند، آنها را یک خط در نظر می‌گیریم.







توجه :

۱ : از هر نقطه در صفحه ، بیشمار خط می گذرد.

۲ : از دو نقطه‌ی متمایز در صفحه ، فقط یک خط می گذرد.

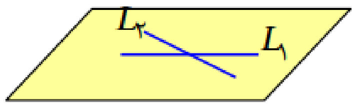
۳ : از هر نقطه‌ی بیرون یک خط در صفحه، فقط یک خط موازی آن می گذرد.

۴ : در هر صفحه دو خط موازی با یک خط ، با هم موازیند.

۵ : در هر صفحه دو خط عمود بر یک خط ، با هم موازیند.

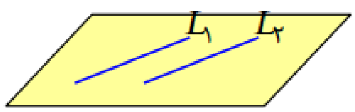
☑ حالت های مختلف دو خط در فضا

دو خط در فضا حالت های زیر را نسبت به هم دارند.



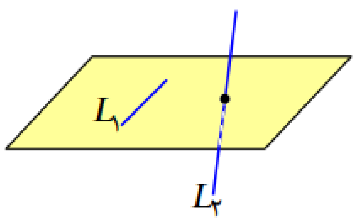
الف : متقاطع (فقط در یک نقطه مشترک هستند.)

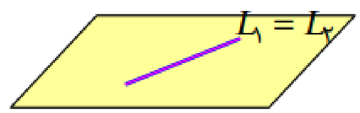
ب : موازی (هیچ نقطه‌ی مشترک ندارند و صفحه‌ای وجود دارد که شامل هر دوی آنها است.)



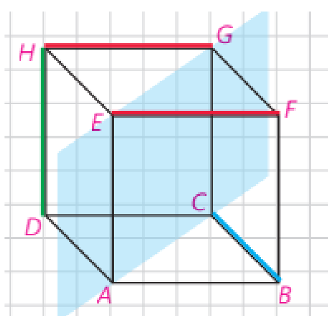
ج : متنافر (هیچ نقطه‌ی مشترک ندارند و صفحه‌ای وجود ندارد که شامل هر دوی آنها است.)

د : منطبق (در تمام نقاط مشترک هستند.)





تمرین: در هر مورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا میتوان صفحه ای شامل آن دو در نظر گرفت؟



HG و HD :

HG و EF :

EC و FD :

GC و EA :

GD و AB :

BC و HD :

---

۱ : از هر نقطه در فضا ، بیشمار خط می گذرد.

۲ : از دو نقطه‌ی متمایز در فضا ، فقط یک خط می گذرد.

۳ : از هر نقطه‌ی بیرون یک خط در فضا ، فقط یک خط موازی آن می گذرد.

۴ : در فضا دو خط موازی با یک خط ، با هم موازیند.

۵ : از هر خط در فضا ، بیشمار صفحه می گذرد.

۶ : اگر دو نقطه‌ی متمایز از خطی،در یک صفحه باشند،آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می گیرد.

تمرین : آیا دو خط عمود بر یک خط در فضا ، لزوماً با هم موازیند؟ (چرا؟)

تمرین : آیا دو خط متنافر می توانند بر هم عمود باشند. عمود بودن آنها چگونه تعریف می شود؟

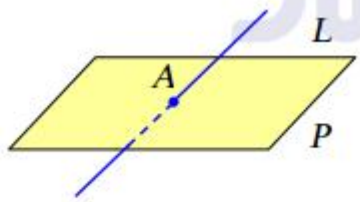
☑ حالت های مختلف یک خط و یک صفحه در فضا

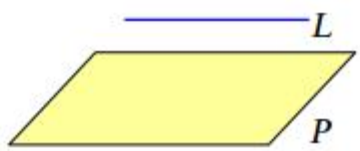
یک خط و یک صفحه در فضا حالت های زیر را نسبت به هم دارند.

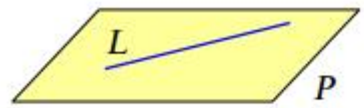
الف : متقاطع (فقط در یک نقطه مشترک هستند.)

ب : موازی (هیچ نقطه ی مشترک ندارند.)

ج : منطبق (در تمام نقاط مشترک هستند.)







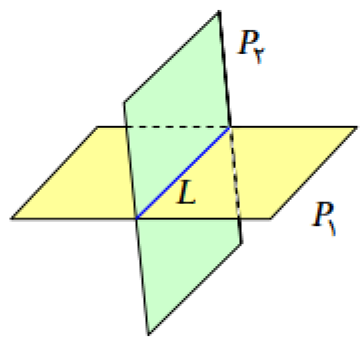
☑ حالت های مختلف دو صفحه در فضا

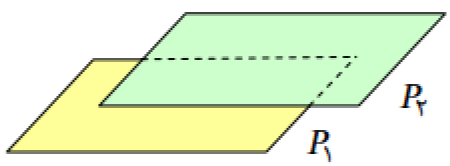
دو صفحه در فضا حالت های زیر را نسبت به هم دارند.

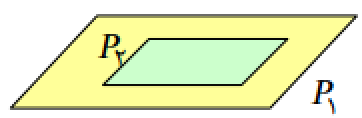
الف : متقاطع (فقط در یک خط مشترک هستند.)

ب : موازی (هیچ نقطه ی مشترک ندارند.)

ج : منطبق (در تمام نقاط مشترک هستند.)





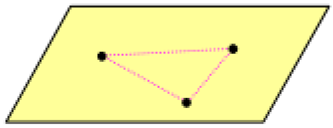


اگر دو صفحه متقاطع باشند، همدیگر را در یک خط قطع می کنند، این خط را فصل مشترک دو صفحه می نامند.

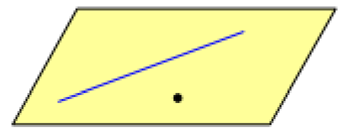
☑ صورت های مشخص کردن صفحه در فضا

یک صفحه در فضا به یکی از حالت های زیر مشخص می شود.

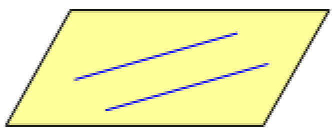
۱ : از هر سه نقطه ی متمایز غیر واقع بر یک خط، یک و تنها یک صفحه می گذرد.



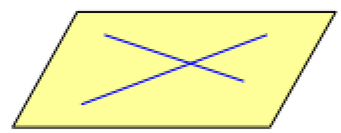
۲ : از یک خط ویک نقطه ی بیرون آن، یک وتنها یک صفحه می گذرد.



۳ : از دوخط متمایز موازی، یک وتنها یک صفحه می گذرد.

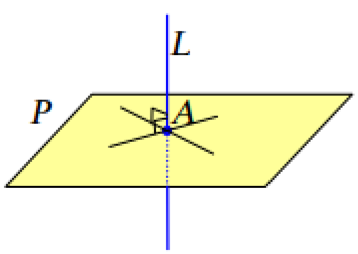


۴ : از دوخط متقاطع، یک وتنها یک صفحه می گذرد.



☑ تعامد خط و صفحه در فضا

یک خط مانند L را بر صفحه‌ی P در نقطه‌ی A عمود گویند، هرگاه بر تمام خط های گذرا از A و منطبق بر صفحه‌ی P عمود باشد.



نتیجه : اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه ای، عمود باشد، آن خط بر صفحه عمود است.

توجه :

۱ : دو صفحه‌ی عمود بر یک خط با هم موازیند.

۲ : دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازیند.

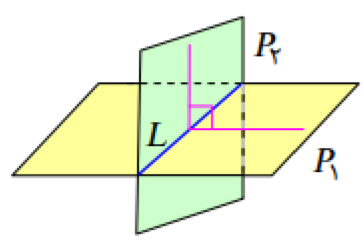
۳ : دو صفحه‌ی موازی با یک صفحه، با هم موازیند.

۴ : اگر خطی بر یکی از دو صفحه‌ی موازی، عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

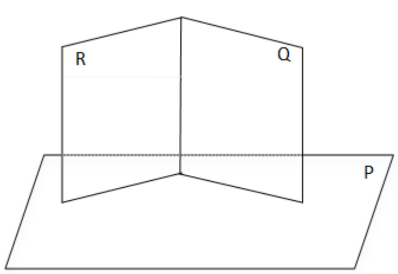
تمرین: اگر خطی بر یک خط از صفحه‌ای عمود باشد آیا می‌توان گفت بر آن صفحه عمود است؟

☑ تعامد دو صفحه در فضا

دو صفحه را عمود بر هم می‌نامند، هرگاه هر کدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.



تمرین: آیا دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه لزوماً موازیند؟ چرا؟



دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه لزوماً موازی نبوده و ممکن است متقاطع باشند.

۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید. (میتوانید از تصاویر کمک بگیرید).

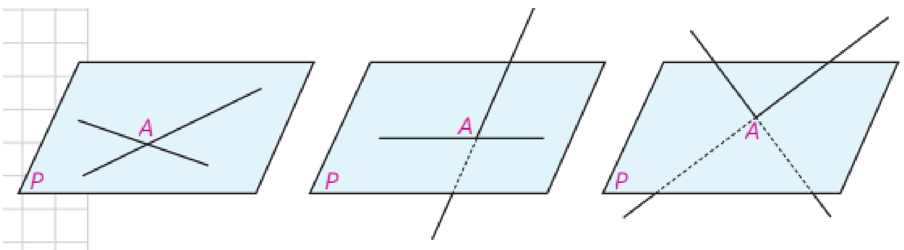
ــ از یک خط در فضا چند صفحه میگذرد؟

ــ از دو خط متقاطع چند صفحه میگذرد؟

ــ از دو خط موازی چطور؟

ــ از یک نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه میتوان رسم کرد؟

۲- دو خط در نقطه A متقاطع اند و صفحه P شامل نقطه A است. با توجه به شکل‌های زیر حالت های مختلف خطوط متقاطع و صفحه P را بررسی کنید.



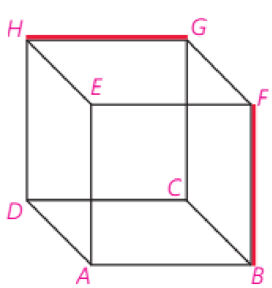
۳ــ دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی اند .

الف) اگر صفحه ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟

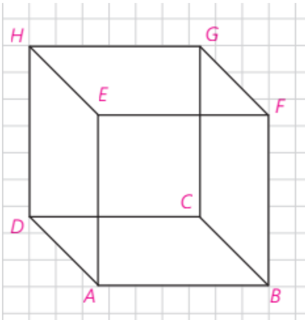
ب) اگر صفحه P شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

ج) اگر صفحه P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟

٤- مسئله قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متنافرند.



تمرین:



به این مکعب دقت کنید :

الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟

HGو DC چطور؟

EFو GC چطور؟

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟

با چند خط موازی است؟

با چند خط متنافر است؟

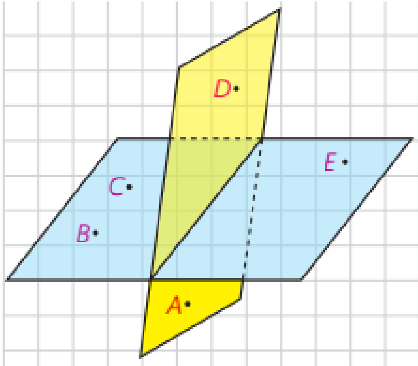
ج) HD با کدام صفحه موازی است؟

با کدام متقاطع است؟

بر کدام واقع است؟

د) دو صفحه موازی و دو صفحه متقاطع نام ببرید؟

تمرین‌های صفحه ۸٤ کتاب



۱- با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید:

الف:چند صفحه در شکل میبینید، نام ببرید.

ب: سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه اند .

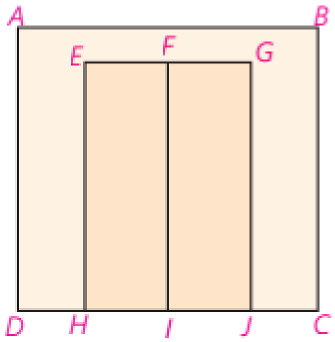
ج: چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند .

د: دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ AC و CE چطور؟

۲- دو صفحه P1 و P2 را به‌گونه ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید.)

الف) اگر P'صفحه ای باشد که با P1 موازی باشد، نسبت به P2 چه وضعیتی خواهد داشت.

ب) اگر P' صفحه ای باشد که با P1 متقاطع است، با P2 چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد.



۳- شکل زیر یک دیوار و یک در دولنگه را که در دیوار قرار گرفته است، نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

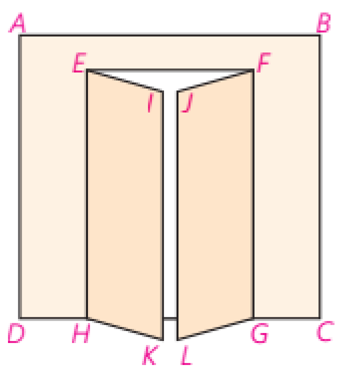
الف: وضعیت صفحات EFIH و ABCD و FGJI را دو به‌دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خطوط FI وBC

ج) خطوط FI وAB

د) خطوط FG وEF

هـ) خطوط FG وH



٤- تجسم کنید دو لنگه در هر کدام $30°$ باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحههای EIKH و ABCD و JFGLرا دو به دو نسبت به هم بررسی کنید

ب) خط FJ و صفحهEIKH

ج) خط JL و صفحهEIKH

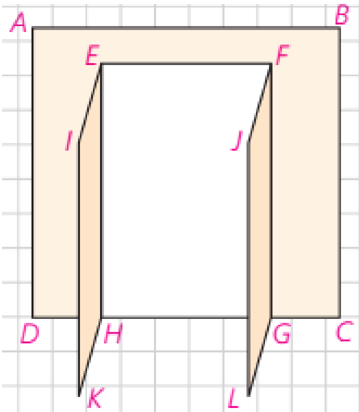
د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

هـ) خطوط EI وJF

و) خطوط EI و FG

ز) خطوط FJ وBC

۵- تصور کنید دو لنگه در هرکدام $90°$ باز شده اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



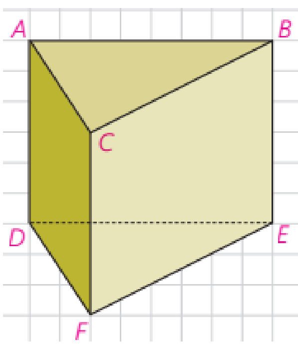
الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دو به دو نسبت به هم بررسی کنید.

ب) خط FJ و صفحه EIKH

ج)خط JL و صفحهEIKH

د) خطوط EI وFJ

هـ) خطوط FJ وH



٦- منشور سه‌پهلوی روبه‌رو را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

الف) سه جفت خط متمایز دو بهدو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دو به‌دو متنافر نام ببرید.

ج) سه جفت خط دو به‌دو متقاطع نام ببرید.

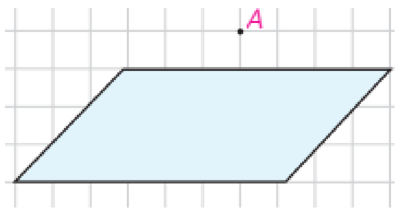
د) سه خط همرس نام ببرید.

هـ) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید.

و) دو صفحه موازی نام ببرید.

ز) سه صفحه دو به دو متقاطع نام ببرید

۷- از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط میتوان به آن صفحه عمود کرد؟

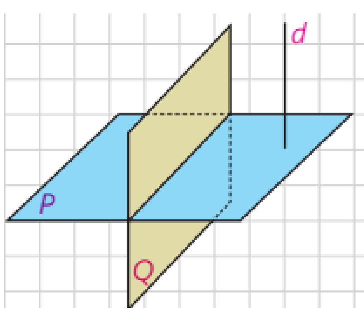


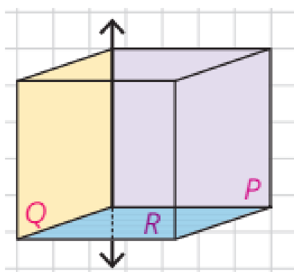
۸- از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه میتوان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

الف) خط بر صفحه عمود باشد.

ب) خط بر صفحه عمود نباشد

۹- دو صفحه P و Q برهم عمودند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟





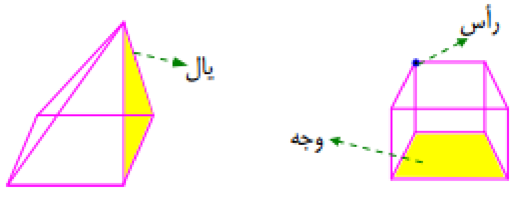
۱۰- دو صفحه متقاطع P و Q بر صفحه R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحه R چه وضعیتی دارد؟

فصل چهارم: تفکر تجسمی

در تفکر تجسمی از عبارات و جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نمی‌شود؛ بلکه این تصاویر هستند که در ذهن ما نقش می‌بندند و به ما کمک می‌کنند دربارهٔ موضوع مورد نظر فکر کنیم.

☑ چند وجهی

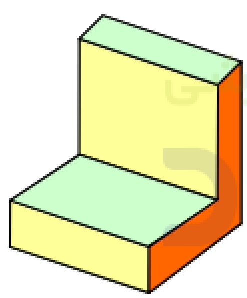
بخشی از فضا که از همه طرف به یک چندضلعی مسطح محدود باشد، جسمی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی می‌گویند.



شش وجهی　　　پنج وجهی

در یک چندوجهی هر کدام از چندضلعی‌ها را یک وجه و ضلع‌های این وجه‌ها را یال و رأس‌های این وجه‌ها را رأس گویند.

تمرین: در شکل زیر



الف: دو یال موازی نام گذاری کنید.

ب : دو یال عمود بر هم نام گذاری کنید.

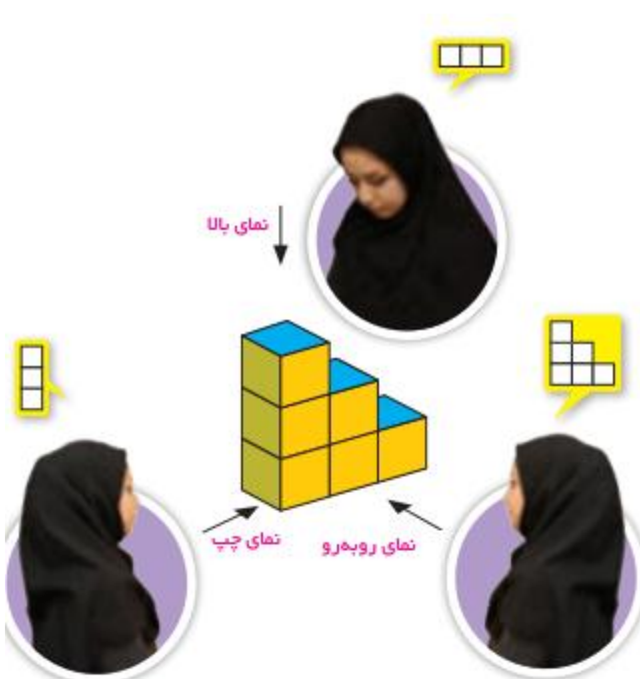
ج: دو وجه عمود بر هم و دو وجه موازی هم را مشخص کنید.

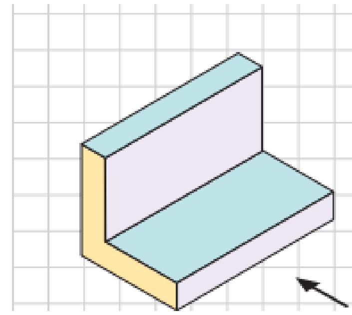
د : تعداد وجوه ، یالها و رئوس را بنویسید.

☑ نما های مختلف تفکر تجسمی

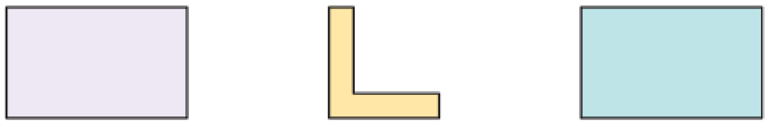
هرگاه در تفکر به جای استفاده از عبارت ها ، کلمات و یا شیوه های زبانی از تصاویر استفاده کنیم، تفکر را تفکر تجسمی می گویند. در تفکر تجسمی از نماهای (زاویه های دید) مختلف به یک شیئ نگاه می شود و تصویری از آنچه که دیده می شود، را رسم می شود. در تفکر تجسمی سه نما کاربرد های بیشتر دارند.

الف) نمای بالا ب) نمای چپ ج) نمای روبرو



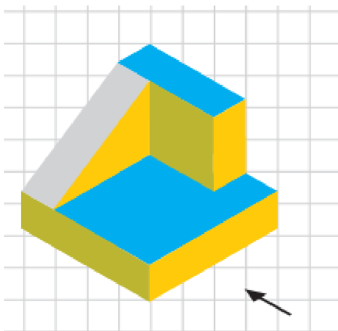


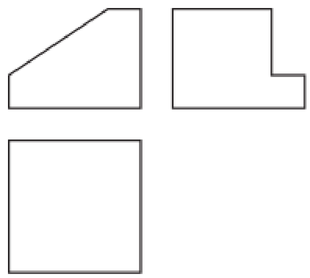
تصویر زیر از نمای بالا، چپ و روبه‌رو رسم شده است.

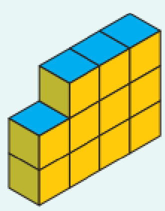
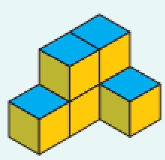
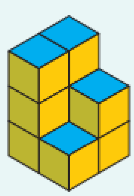


نمای بالا | نمای چپ | نمای روبه‌رو

۱– شکل روبه‌رو از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

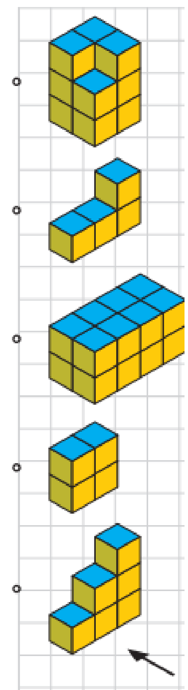


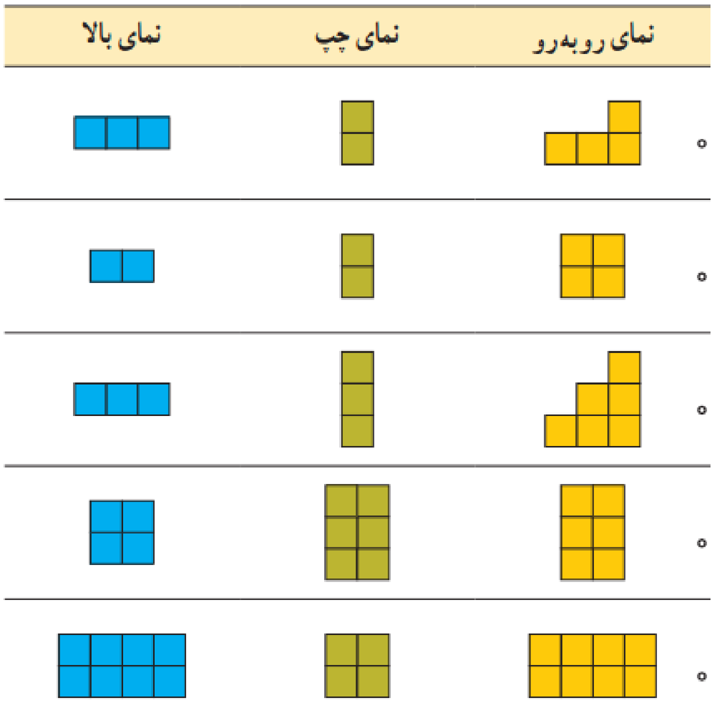


نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ	
			
			
			

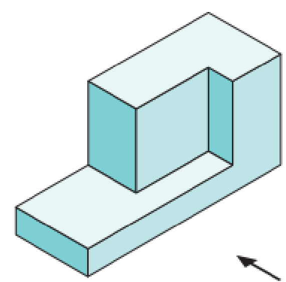
تمرین‌های کتاب صفحه ۹۰

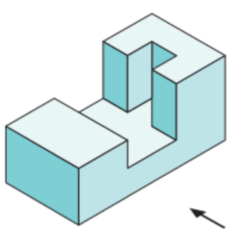
۱- نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.

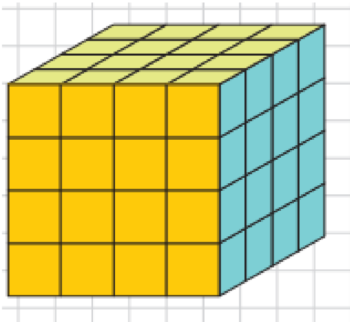




۲- در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.







۳- تمام وجه‌های مکعبی را رنگ‌آمیزی کرده ایم.

ــ چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟

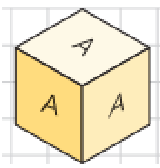
ــ چند مکعب، رنگ نشده است؟

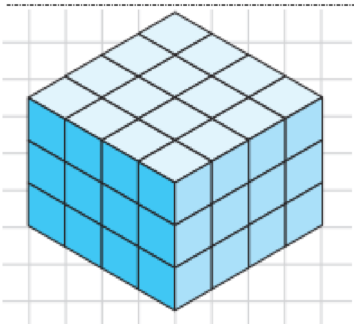
ــ چند مکعب، رنگ شده است؟

ــ چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟

ــ چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟

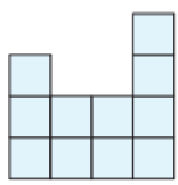
٤- روی تمام وجه‌های مکعب‌ها حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم میچینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟





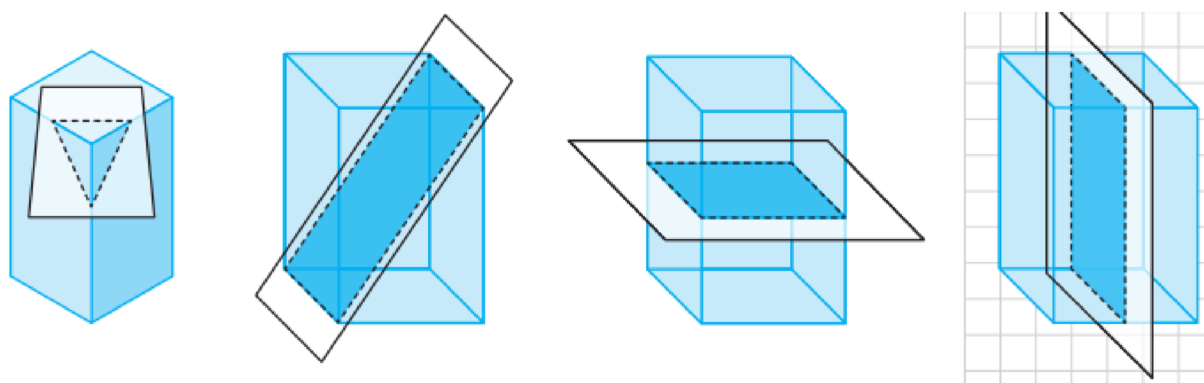
۵- شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟

حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟

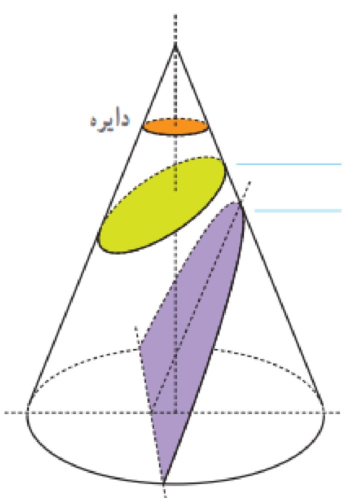


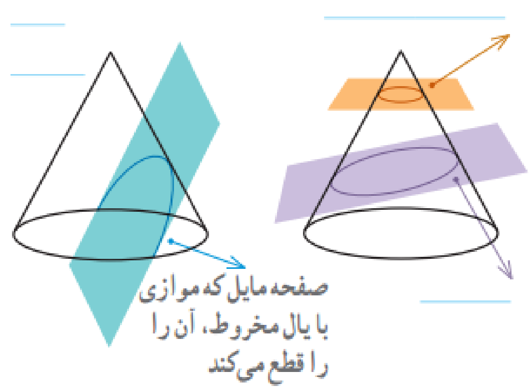
درس سوم: برش

تعریف: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود.



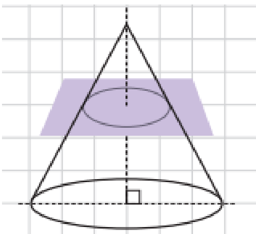
سطح مقطع یک مخروط قائم در برخورد با صفحه‌های افقی و مایل به چه شکل است؟



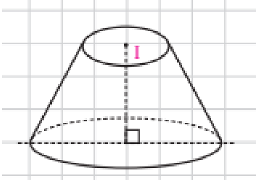


نکته: مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه ای موازی قاعده آن برخورد داده ایم. این صفحه مخروط را به دو بخش تقسیم میکند. بخش بالایی به چه شکل است؟

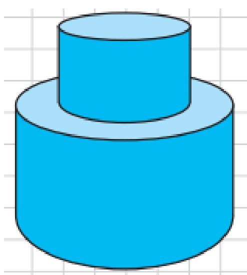
بخش زیرین را مخروط ناقص می‌نامند.



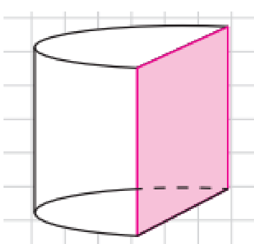
اگر صفحه ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کند، سطح مقطع حاصل چیست؟



۱- دو استوانه را روی هم قرار دادهایم. اگر صفحه ای به شکل عمودی با هر دو این استوانهها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟

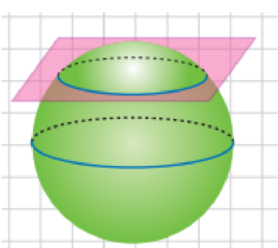


۲- در شکل روبهرو نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه های افقی، عمودی و صفحه مایلی که از قاعده استوانه عبور نکند به چه شکل است؟



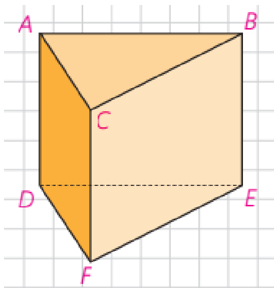
۳ـــ سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟

در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟



تمرین‌های صفحه ۹۴

۱ــ فرض کنید منشور سمت راست، یک قطعه چوبی توپر باشد. این قطعه چوبی را طوری اره می‌کنیم که از سه نقطه مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟

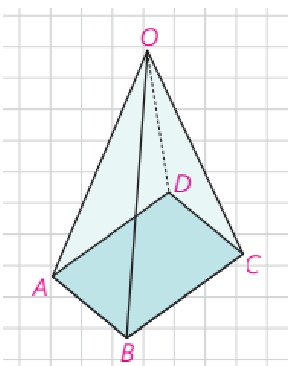


الف) M و N و P وسط پاره‌خط‌های BE ، CF و AD

ب) C،D و E

ج) C ،F و Q (وسط پاره خط AB)

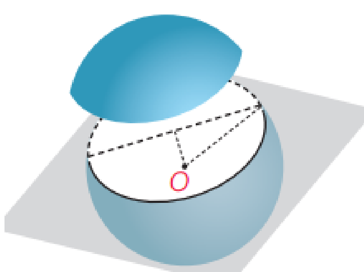
۲- قاعده هرمی، مستطیل ABCD است. رأس این هرم را O نامیده ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.



الف) صفحه P بر ارتفاع هرم عمود باشد.

ب) صفحه P از O بگذرد و بر قاعده هرم عمود باشد .

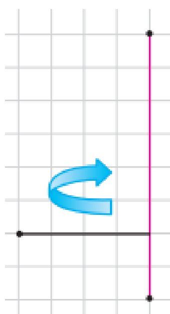
ج) صفحه P از O نگذرد؛ ولی بر قاعده هرم عمود باشد.



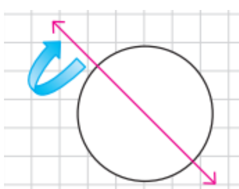
۳- صفحه P کره ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتیمتر را قطع کرده است .
اگر فاصله نقطه O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟

٤- دو کره با شعاع‌های r و r'یکدیگر را قطع کرده اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟ اگر همه این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

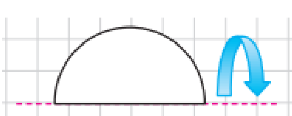
دوران



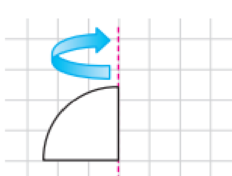
الف: فرض کنید دو پاره‌خط برهم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده ایم. چه شکل هندسی ای ساخته میشود؟



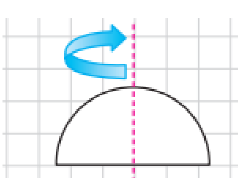
ب: دایره ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده ایم. شکل حاصل چیست؟



پ :یک نیم دایره را حول قطر دوران میدهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟

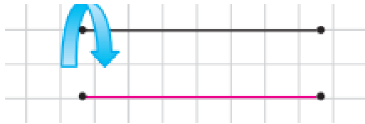


ت: اگر همین نیم دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته میشود؟

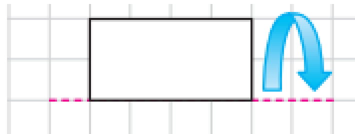


ث : اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟

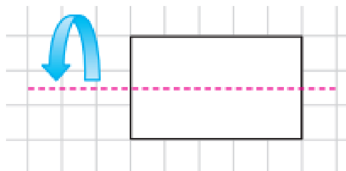
ج: دو پاره‌خط موازی را در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته میشود؟



چ: اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم، چطور؟

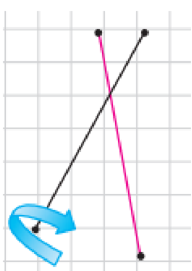


ح: اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟



تمرین کتاب صفحه ۹۶

۱- دو پاره‌خط متقاطع را مطابق شکل درنظر بگیرید. اگر یکی از پاره‌خطها را حول دیگری دوران دهیم، چه جسم هندسی ای ساخته میشود؟



۲- در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

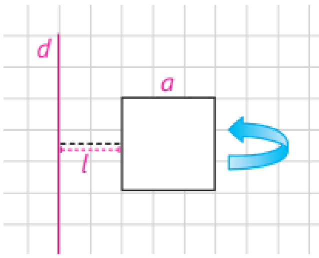
الف) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع آن:

ب) دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه:

پ) دوران یک ذوزنقه قائم الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها:

ت) دوران یک مثلث متساوی الساقین حول قاعده آن:

۳- مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده ایم. شکل حاصل را توصیف کنید .



٤- شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته میشود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید .

پایان کتاب درسی