جزوه درسی هندسه۳ (سال دوازدهم رشته ریاضی)

دبیرستان غیردولتی موحّد

شامل کلیه تمارین و قضایای کتاب درسی

تهیه و تدوین : محمد عبدی

این جزوه شامل تمامی نکات مهم و قضایا و تمرین‌ها و مثال‌های حل‌شده کتاب درسی است و به طور کامل کتاب محور است و تمامی سوالات امتحان نهایی و شبه نهایی داخل جزوه می‌باشد

فصل ۱: ماتریس و کاربردهای آن

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

ماتریس: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می شود. هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را درایه می گوییم. که در ماتریس هر سطر را با i و هر ستون را با j نشان می‌دهیم.

$$\text{نمایش یک ماتریس} \xRightarrow{\text{ماتریس } A_{m\times n} \text{ دارای } m \text{ سطر و } n \text{ ستون}} A_{m\times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

نکته: $m \times n$ را مرتبه ماتریس می‌نامند.

مثال ۱:

مثال۲: فرض کنید $[a_{ij}]_{2\times 2} = \begin{cases} a_{ij} = 1 & i < j \\ a_{ij} = 5 & i = j \\ a_{ij} = -2 & i > j \end{cases}$ **باشد.ماتریس A را بیابید.**

مثال۳: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **باشد حاصل** $a_{21} + 2a_{32} - 3a_{33}$ **را بیابید.**

مثال٤: فرض کنید $[a_{ij}]_{2\times 2} = \begin{cases} i-j+ij & i \geq j \\ i+j-ij & i < j \end{cases}$ باشد.ماتریس A را بیابید.

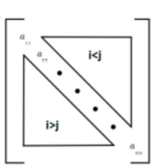
مثال٥: فرض کنید $A = [i+j-i^j]_{2\times 3}$ باشد.ماتریس A را بیابید.

معرفی چند ماتریس خاص:

۱) ماتریس سطری : ماتریسی است که دارای یک سطر و n ستون میباشد مانند:

---

۲) ماتریس ستونی : ماتریسی است که دارای mسطر و یک ستون میباشد مانند:



۳) ماتریس مربعی : ماتریسی که تعداد سطر و ستون آن با هم برابرند:

قطر اصلی:

قطر فرعی:

نکته: در شکل روبرو درایه های بالای قطر اصلی و پایین قطر اصلی به شکل مقابل هستند.

٤) ماتریس بالا مثلثی : ماتریسی مربعی است که در آن درایه های واقع در زیر قطر اصلی صفرند مانند:

٥) ماتریس اکیدابالا مثلثی : ماتریسی مربعی است که درآن درایه های واقع برقطر اصلی وزیرآن صفرند مانند:

٦) ماتریس پایین مثلثی :ماتریسی مربعی است که درآن درایه های واقع دربالای قطر اصلی آن صفرند مانند:

٧) ماتریس اکیدا پایین مثلثی : ماتریسی مربعی است که در آن درایه های واقع بر قطر اصلی و بالای آن صفرند. مانند:

١٠) ماتریس قطری: ماتریسی مربعی است که در آن درایه های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند مانند:

۱۱) ماتریس اسکالر : ماتریسی قطری است که درایه های واقع بر قطر اصلی آن برابرند مانند:

۱۲) ماتریس همانی (واحد): ماتریسی مربعی است که در آن تمام درایه های واقع بر قطر اصلی یک و بقیه درایه ها صفرند و این ماتریس را با I_n نیز نمایش می‌دهند. مثال:

نکته: هر ماتریس اسکالر را می‌توان به صورت حاصلضرب عدد اسکالر در ماتریس همانی نوشت.

۱۳) ماتریس صفر : ماتریسی است که همه‌ی درایه های آن صفر باشند، ماتریس صفر را با نماد O نشان می دهیم.

نکته: ماتریس قطری ؛ هم بالا مثلثی هستند و هم پایین مثلثی.

نکته: ماتریس 1×1 همان تک عدد و تک درایه می‌باشد.

الف: جمع و تفریق ماتریس‌ها:

نکته: فقط و فقط ماتریس های هم مرتبه می توانند با هم جمع و تفریق شوند .
برای جمع و تفریق ماتریس ها باید حتما هم مرتبه باشند. و ماتریس حاصل ماتریسی هم مرتبه با آنها است که از جمع و تفریق درایه های نظیر به وجود آمده است. هر درایه با درایه مربوط به خود جمع می‌شود.

مثال٦:

ب: ضرب عدد در ماتریس:

اگر عددی در یک ماتریس ضرب شود آن عدد در تک تک درایه‌های آن ماتریس ضرب می‌شود.

نکته: در ماتریس خاصیت فاکتورگیری برقرار است.یعنی اگر تمام اعداد یک ماتریس بر عددی بخش‌پذیر باشند می‌توان از آن عدد فاکتور گرفت و دربیرون ماتریس نوشت.

مثال۷:

پ: قرینه یک ماتریس:

اگر تمام درایه‌های یک ماتریس را قرینه کنیم (در عدد (۱-) ضرب کنیم) در این صورت آن ماتریس قرینه شده‌است.

نکته: جمع هر ماتریس با قرینه‌اش ماتریس صفر (O) به ما می‌دهد که سوال در مسائل زیاد داریم مورد می‌آید.

$$A + B = \bar{O} \Rightarrow A = -B$$

ت: دو ماتریس مساوی:

دو ماتریس A و B را مساوی گوییم و می نویسیم $A = B$ هرگاه:
الف: دارای مرتبه یکسان باشند   ب: درایه های نظیر به نظیر آن ها با هم برابر باشد.

مثال۸: اگر $\begin{bmatrix}3 & x+1\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-1 & 5\\ x-3y & 5\end{bmatrix}$ **باشد. مقدار x و y را بیابید.**

مثال۹: اگر $\begin{bmatrix}3x-y & 0\\ z+3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & x-2y\\ 4 & -t\end{bmatrix}$ **باشد. مقدار** $x+y+z+t$ **را بیابید.**

تمرین‌های مهم:

۱-اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{bmatrix}$ **و** $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$ **باشد آنگاه ماتریس** C **را طوری بیابید که** $A+2B-C=\overline{O}$

۲- اگر $A=\left[i-j^2\right]_{3\times3}$ **و** $B=[6-ij]_{3\times3}$ **باشد.مجموع درای‌های سطر دوم را بیابید.**

۳- اگر $A = [i - 2j]_{2\times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ باشد.ماتریس $\mathrm{A} - 2\mathrm{B}$ را بیابید.

٤-ماتریس $A = \left[i^2 - 3j\right]_{2\times 2}$ را بیابید.

۵- ماتریس‌های زیر را بیابید.

الف: $A = \left[a_{ij}\right]_{2\times 2} = \begin{cases} 2i & i < j \\ i - 3j & i = j \\ -2i + j & i > j \end{cases}$

ب: $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{3\times 3} = \begin{cases} \frac{1}{2} & i < j \\ \sqrt{2} & i = j \\ -2 & i > j \end{cases}$

پ: $C = \left[c_{ij}\right]_{3\times 4} = \left[i^2 - 2ij\right]$

۶- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ باشد و بصورت $[a_{ij}]_{3\times3}=\begin{cases} ij & i<j \\ i^2 & i=j \\ 2i-j & i>j \end{cases}$ باشد.ماتریس A را بیابید.

۷- اگر $5A+2B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد ماتریس A را بیابید.

۸- اگر $A=\begin{bmatrix} ab & 1 \\ 4 & a+b \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ باهم برابر باشند مقدار a^2+b^2 را بیابید.

۹- فرض کنید B و A دو ماتریس مربعی مرتبه دو باشند و داشته باشیم $3A-2B=\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$ و $B+5A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت مقدار ماتریس A و B را بیابید.

۱۰- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x+1 & y+2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A+B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 8 & 3\end{bmatrix}$ باشد در این صورت مقادیر مجهول را بیابید.

ضرب دو ماتریس:

نکته : برای ضرب اولین موضوعی که به آن دقت میکنیم این است که وقتی دو ماتریسی که کنار هم نوشته می‌شوند تعداد ستون های اولی با تعداد سطر های دومی باید با هم برابر باشند در غیر این صورت امکان ضرب وجود ندارد. $A_{m\times n}\times B_{n\times t}=C_{m\times t}$

برای ضرب دو ماتریس به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$[1\quad 2\quad 4]\times\begin{bmatrix}-1\\ 4\\ 5\end{bmatrix}=$$

برای ضرب به روش زیر عمل می کنیم

۱- ابتدا بررسی می کنیم ضرب قابل انجام دادن هست یا خیر.

۲- ماتریس اولی را سطر به سطر عمل می کنیم.

۳- ماتریس دومی رو ستون به ستون عمل می کنیم.

٤- یک سطر از ماتریس اولی را با یک ستون از ماتریس دومی با روش ضرب سطری در ستونی ضرب می کنیم. سپس سراغ سطر بعدی می رویم.

مثال۱۰: فرض کنید $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ **و** $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 1\end{bmatrix}$ **باشند.**

الف: ماتریس $A\times B$ **و** $B\times A$ **و** A^2 **و** B^2 **را بیابید.**

ب: درایه سطر سطر دوم ستون سوم ماتریس $A \times B$ را بیابید.

نکته:

پ: سطر دوم ماتریس $A \times B$ را بیابید.

نکته:

ت: ستون سوم $A \times B$ را بیابید.

نکته:

مثال۱۱: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد.

الف: ماتریس ABC را بیابید.

در امتحان نهایی اگر به ما ضرب ۳ ماتریس در هم را داده‌بود باید به ترتیب از چپ به راست دو ماتریس اول را در هم ضرب کنیم سپس جواب را در ماتریس سوم ضرب کنیم.

ب: درایه واقع بر سطر دوم و ستون اول ماتریس ABC رابیابید.

نکته تستی مهم: برای یافتن عضو d_{ij} از ماتریس ABC: (ستون $\boldsymbol{j}$ام ماتریس $\boldsymbol{C}$) $\times$ (ماتریس $\mathbf{B}$) $\times$ (سطر $\boldsymbol{i}$ام ماتریس $\boldsymbol{A}$)

مثال۱۲: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$ باشد در این صورت درایه سطر دوم ستون سوم $A\times B$ را بیابید.

مثال۱۳: اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 5 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 2 & 0 & -5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & -1 & 1\\ 7 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ باشد سطر دوم $A\times B$ را بیابید.

مثال۱٤: اگر $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$ باشد مقدار $x+y$ را بیابید.

مثال۱۵: فرض کنید $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ مطلوب است مقادیرزیر را بیابید.

الف: $A \times B$

ب: $(A + B) \times (A - B)$

پ: $2A^2 - 3I$

چند ویژگی مهم و کاربردی ضرب ماتریس‌ها

۱-ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جا به جایی ندارد یعنی $A \times B \neq B \times A$. (در جمع ماتریس‌ها داریم)

۳ حالت خاص برای برقراری خاصیت جابه‌جایی داریم:

الف: اگر خود سوال بگوید خاصیت جابه‌جایی داریم یعنی $A \times B = B \times A$

ب: برای دو ماتریس B و A هم مرتبه و مربعی اگر $A + B = I$ باشد خاصیت جابه جایی داریم.

پ: اگر یکی از ۲ ماتریس A و B همانی باشند در این صورت خاصیت جابه‌جایی داریم.

۲- ضرب همانی در ماتریس، خاصیت جابه جایی دارد: $AI = IA$

۳- اگر $A \times B = A \times C$ نمی توان نتیجه گرفت $B = C$ (حذف برقرار نیست و نمی‌توان ماتریس‌ها را همیشه ساده کرد)

اگر $kB = kC$ باشد k عدد صحیح باشد همواره می توان نتیجه گرفت $B = C$

نکته: وقتی خاصیت حذف برقرار است که ماتریس وارون پذیر باشد که در قسمت جلو یاد می‌گیریم.)

٤- ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

۵- ضرب ماتریس ها خاصیت توزیع پذیری و فاکتور گیری دارد $A \times (B \pm C) = (A \times B) \pm (A \times C)$

٦- در اعداد حقیقی همواره داریم: $if\ a \times b = 0 \Longrightarrow a = 0$ یا $b = 0$

اما این خاصیت در ضرب ماتریس ها برقرار نیست یعنی اگر بدانیم $A \times B = O$ نمیتوان نتیجه گرفت $B = O$ یا $A = O$

دو ماتریس ناصفر مثال بزند که حاصلضرب آنها ماتریس صفرشود و درستی حکم بالا را نشان دهید.

۷- حاصلضرب دو ماتریس قطری: کافی است فقط قطرهای اصلی را در هم ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

نکته: در توان رساندن ماتریس قطری هم به همین روش عمل می‌کنیم و کافی‌است درایه‌های قطر اصلی را به توان مورد نظر برسانیم.

مثال ضرب و توان ماتریس قطری:

اتحادها در ماتریس‌ها : خاصیت اتحاد در ماتریس‌ها در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

تنها زمانی دو ماتریس B و A تعویض پذیر(خاصیت جابه‌جایی) باشند یعنی $A \times B = B \times A$ آنگاه اتحادهای زیر در مورد آنها برقرار است.

الف) اتحاد مربع دو جمله

ب) اتحاد مزدوج

پ) اتحاد چاق و لاغر.

تمرین‌های دوره‌ای فصل۱ درس ۱

۱-اگر ضرب ماتریسی $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشند حاصل $[x \quad 2 \quad -y] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -x \end{bmatrix} =$ را بیابید.

۲-اگر $A=\begin{bmatrix}4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ باشد مقدار b و a را جنان بیابید که $A\times B$ ماتریسی قطری شود.

۳- اگر $A=\begin{bmatrix}x & y\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $A^2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ باشدآنگاه مقدار y و x را بیابید.

نکته مهم: اگر A^2نیز قطری باشد نمی‌توان لزوما نتیجه گرفت A نیز قطری است. البته مثال‌هایی هم وجود دارد که ماتریس A قطری باشد ولی همیشه درست نمی‌باشد.

٤- اگر $A^2=\begin{bmatrix}x & y\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B^2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 6 & 6\end{bmatrix}$ باشد مقدار $AB+BA$ را بیابید.

۵- اگر $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\7&2a&0\\8&4&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2b&0&0\\5&4&0\\5&6&4c\end{bmatrix}$ و $4a+3b-2c=7$ باشد مجموع عناصر روی قطر اصلی BA را بیابید.

٦-حاصل جمع ریشه‌های معادله $\bar{O}=\begin{bmatrix}-2\\x\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&1&-1\\-1&2&2\\0&x&1\end{bmatrix}[2\quad -1\quad 1]$ را بیابید.

۷- در معادله ماتریسی $\bar{O}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-3&6\end{bmatrix}[3x\quad 2]$ مقدار x را بیابید.

۸- اگر $A-B=-kI$ باشد حاصل $A^2-AB+kB$ را بیابید.

توان‌های بالا در ماتریس‌ها:

۹- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ باشد ماتریس A^7-A^4 کدام است.

۱۰-نهایی: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I$ باشد دوتایی (α,β) را بیابید.

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ حاصل A^n-A^{n-1} را بیابید.

۱۲- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$ باشد A^{11} را بیابید.

۱۳-اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل A^7 را بیابید.

۱٤- اگر $A^2 = I$ باشد آنگاه $A^{1397} + A^{1398}$ را بیابید.

۱۵-اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه مجموع درایه‌های $A^{146} - A^{139}$ را بیابید.

۱۶- اگر $(A - I)^2 = \bar{O}$ باشد آنگاه A^4 را بیابید.

۱۷-اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد درایه سطر دوم A^2 را بیابید.

وارون یک ماتریس:

در ماتریس ها وارون ماتریس ناصفر A ، ماتریسی مانند Bاست هرگاه $\begin{matrix} A \times B = I \\ B \times A = I \end{matrix}$

وارون ماتریس A را با A^{-1} نمایش می‌دهند.

مثال: اگر $A^3 = I$ باشد در این صورت حال‌های زیر برقرار است.

دترمینان یک ماتریس ۲×۲:

برای اینکه بتوانیم وارون یک ماتریس را محاسبه کنیم باید با مفهوم دترمینان آشنا شویم.

دترمینان ماتریس $A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$: $ad - bc =$ حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی $-$ حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی

دترمینان ماتریس A را با $|A|$ نمایش می‌دهند.

نکته: یک ماتریس وقتی وارون دارد که دترمینان آن صفر نشود .پس اگر دترمینان ماتریسی برابر صفر شود ، ماتریس وارون ندارد. اصطلاحا می‌گوییم وارون پذیر نیست. یعنی نمی‌توان ماتریسی پیدا کرد که اگر در خود ماتریس ضرب شود حاصل I شود.

روش محاسبه ماتریس وارون ۲×۲:

۱- دترمینان ماتریس داده شده را محاسبه می‌کنیم و نباید صفر باشد (اگر صفر بود که میگوییم ماتریس وارون‌پذیر نمی‌باشد).

۲- جای درایه‌های روی قطر اصلی را عوض می‌کنیم و درایه‌های روی قطر فرعی را قرینه می‌کنیم.

۳- معکوس دترمینان را در ماتریس جدید ضرب می‌کنیم و وارون ماتریس حاصل می‌شود.

$$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{معکوس میکنیم}} A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نکات مهم وارون:

۱- وارون ماتریس همانی خودش است. $I^{-1} = I$ و $I^n = I$ و $|I| = 1$

۲-

$(kI)^{-1} = \frac{1}{k}I$

نکات مهم وارون‌پذیری ماتریس‌های ۲×۲ :

ب: $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

الف: $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

ت: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

پ: $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$

ج: $|A^n| = |A|^n$

ث: $\left(B^{-1}AB\right)^n = B^{-1}A^nB$

چ: $|A^n|^{-1} = \left|A^{-1}\right|^n = \frac{1}{|A|^n}$

قضیه یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود یکتاست.

اثبات: فرض کنید ماتریس‌های B و C هر دو وارون ماتریس A باشند در این صورت نشان می‌دهیم $B = C$ است.

$$\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases} \xRightarrow{\text{از طرفی می‌توان نوشت}} B = IB = CAB = CI = C \xRightarrow{\text{پس داریم}} B = C$$

مثال۱۸: مقدار a را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ نیز وارون پذیر باشد.

مثال۱۹: وارون ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

الف: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ب: $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

پ: $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$

ت: $D = \begin{bmatrix} cosa & -sina \\ sina & cosa \end{bmatrix}$

ث: $E = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

نکته : برای وارون کردن ماتریس قطری کافی است درایه های روی قطر اصلی را معکوس کنیم.

مثال۲۰: اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a+2 & 3 \\ a & -4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1-b & 2 \\ -b & 3 \end{bmatrix}$ دو ماتریسی باشند که معکوس پذیر نمی‌باشند حاصل $A \times B$ را بیابید.

مثال۲۱: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $(A+I)(A^{-1}+I)$ را بیابید.

مثال۲۲: اگر $A^3 = I$ آنگاه A^{-1} را بیابید.

مثال۲۳: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}5 & 13\\ -7 & 15\end{bmatrix}$ باشند حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف: $\left(BAB^{-1}\right)^{14}=$

ب: $|A-B|=$

دستگاه دو معادله دو مجهول:

اگر دستگاه $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ را بخواهیم به صورت ماتریس بنویسیم به صورت $\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}$.

نکته: $\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب و ماتریس $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ را ماتریس مجهول و $\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}$ را ماتریس مقادیر معلوم می‌نامند.

بنابراین شکل ماتریسی دستگاه بالا به فرم $AX=B$ تبدیل می‌شود.

برای حل این ماتریس به روش مقابل عمل می‌کنیم. $AX=B\xrightarrow{\text{ضرب در ماتریس معکوس}}A^{1}(AX)=A^{-1}B\Longrightarrow X=A^{-1}B$

مثال۲۵: اگر $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=A\times\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 6 & 14\end{bmatrix}$ ماتریس A را بیابید.

مثال: دستگاه‌های زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases}2x+3y=0\\ 4x+5y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 5y = -1 \\ 4x + 3y = 19 \end{cases}$$

تعبیر هندسی دستگاه دو معادله دو مجهول

دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ متشکل از دو معادله خط است. اگر خاصی در دستگاه صدق کند جواب دستگاه است.

وقتی برای حل دستگاه مقدار (x, y) به دست می‌آوریم یعنی محل تلاقی دو خط را به دست می‌آوریم.

حال باشد وضعیت دو خط را باهم پیدا می‌کنیم.

الف: اگر دو خط متقاطع باشند: پس یک جواب منحصربه فرد دارد $\Longleftrightarrow m \neq m' \Longleftrightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$

ب: دو خط موازی هستند اما منطبق نیستند. جواب ندارد $\Longleftrightarrow m = m' \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

پ: دو خط موازی و منطبق هستند. بیشمار جواب دارد $\Longleftrightarrow m = m' \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{c}{c'}$

نکته مهم: در حالت الف دترمینان ماتریس مخالف صفر$(|A| \neq 0)$ است در این صورت دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد.

ولی در حالت ب و پ دترمینان صفر$(|A| = 0)$ می‌باشد.

مثال۲۶: مقدار b و k را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} 3x - y = k \\ 2x + by = 7 \end{cases}$ بیشمار جواب داشته باشد.

مثال۲۷: مقدار aرا طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ ax + 2y = 3 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

مثال۲۸: مقدار mرا طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+3y=-3 \\ 4x+(m+4)y=2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

دترمینان ماتریس ۳×۳:

فرم کلی ماتریس ۳×۳ به صورت $A_{3\times 3}=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ **نیز می‌باشد.**

گام اول: ابتدا تصمیم می گیریم که با کدام سطر یا ستون میخواهیم دترمینان را محاسبه کنیم.

گام دوم: از اولین درایه برای تمام درایه ها میتوان به صورت یک در میان علامت مثبت و منفی در نظر گرفت .

گام سوم : هر درایه باید در یک دترمینان2 ×2 ضرب شود. روش به دست آوردن این دترمینان به این صورت است که تمام درایه هایی که در سطر و ستون این درایه ی مورد نظر هست را حذف میکنیم و بقیه را در دترمینان مورد نظر مینویسیم.

مثال۲۹: دترمینان ماتریس‌های زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}=$$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}=$$

روش ساروس در دترمینان ماتریس ۳×۳:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Longrightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

مثال۳۰: دترمینان ماتریس‌های زیر را به روش ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} =$$

برخی خواص دترمینان برای حل انواع سوالات:

گاهی اوقات در سوالات باید از ویژگی‌های دترمینان استفاده کنیم. در قسمت پایین برخی ویژگی‌های دترمینان را می‌آوریم.

ویژگی ۱: اگر دو سطر یا دو ستون ماتریس 3×3 و 2×2 باهم برابر بودند دترمینان این ماتریس صفر است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \quad \text{یا} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow |B| = 0$$

ویژگی ۲: اگر یک سطر یا ستون یک ماتریس را k برابر کنیم بنابراین دترمینان این ماتریس در همان عدد k نیز ضرب می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Longrightarrow |B| = k|A|$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b & kc \\ d & e & kf \\ g & h & ki \end{bmatrix} \Longrightarrow |B| = k|A|$$

مثال: اگر $|A_{3\times3}| = -4$ باشد و سطر اول ماتریس را در $-\frac{3}{2}$ و ستون دوم آن را در $-\frac{1}{6}$ ضرب کنیم در این صورت دترمینان ماتریس A را بیابید.

سوال نهایی: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ a & b & c \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد و $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ a & b & c \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ باشد و بدانیم $|B| \neq 0$ باشد در این صورت $\frac{|A|}{|B|}$ را بیابید.(با دلیل)

ویژگی ۳: اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه n باشند در این صورت رابطه مقابل همواره برقرار است.

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$$

مثال:

ویژگی ٤: اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد در این صورت رابطه مقابل همواره برقرار است.

$$|A^n| = |A|^n$$

مثال:

ویژگی ۵: دترمینان هر ماتریس قطری و اسکالر حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی است.

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = xyz$$

ویژگی ٦: اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشند و k عددی طبیعی باشد در این صورت رابطه مقابل همواره برقرار است.

$$|kA| = k^n|A|$$

به طور مثال فرض کنید ماتریس A یک ماتریس مربعی ۳*۳ باشد در این صورت : $|kA| = k^3|A|$

به طور مثال فرض کنید ماتریس I یک ماتریس مربعی ۳*۳ باشد در این صورت : $|kI| = k^3|I| = k^3$

مثال: اگر $|A_{3\times3}| = -4$ و $I_{3\times3}$ باشد در این صورت حاصل $|3I - |$ و $\left|\frac{1}{2}A\right|$ و $|3A|$ و $|A|A||$ را بیابید.

مثال: اگر رابطه ماتریسی $A \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ برقرار باشد در این صورت دترمینان ماتریس A را بیابید.

مثال: اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه 3 باشند و $|A| = 5$ و $A^2 - 4A = 5I$ باشد حاصل $|A - 4I|$ را بیابید.

مثال نهایی: اگر $|A| = k$ باشدو $A = \begin{bmatrix} 5k & k \\ 5 & 4k^2 \end{bmatrix}$ در اینصورت k را بیابید.

مثال نهایی: اگر $A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\ -3 & |A|^2\end{bmatrix}$ در اینصورت $|A|$ را بیابید و وارون‌پذیری ماتریس A را بررسی کنید.

نهایی: اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & 0 & 1\\ 1 & |A| & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ باشد. مقدار $|A|$ را بیابید.

نهایی: ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ معرفی شده‌است، مقدار k را طوری بیابید که رابطه $k|kA|=625$ برقرار باشد.

تمرین‌های کتاب صفحه ۳۰ و ۳۱

۱ــ اگر $A=[۱ \quad ۲ \quad -۳]$ و $B=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۱ & ۰ & -۵\end{bmatrix}$ در این صورت $|A^۲|$ را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix}۵|A| & |A|\\ ۵ & ۴|A|^۲\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(|A|^۳-۲\right)$ را بیابید.

۴ــ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ ماتریسی ۳ × ۳ چون A بیابید که $|A| = ۳$.

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۵ & -۱\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

۷ــ اگر $A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

۸ــ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

۹ــ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰ــ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=۵$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۱۱ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۱۲ــ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx+۳y=۴ \\ x-۲y=۳ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد.

۱۳ــ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

الف) $\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x+۳y=۵ \\ -۲x-۶y=۱ \end{cases}$

پ) $\begin{cases} -۲x+۳y=۲ \\ ۴x-۶y=-۴ \end{cases}$

فصل دو: ((مقاطع مخروطی))

تهیه و تدوین: محمد عبدی

سرفصل‌ها:

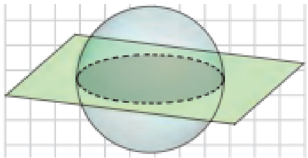
الف: مقاطع مخروطی و مکان هندسی

ب: دایره و نکات مهم

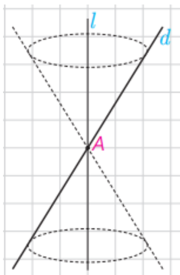
پ: بیضی

ت: سهمی

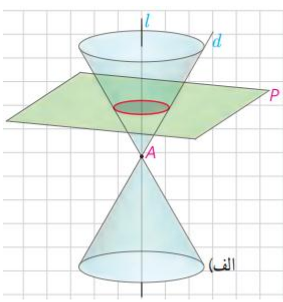
درس اول: آشنایی به مقاطع مخروطی و مکان هندسی



فرض کنید یک کره را مانند شکل مقابل(توسط یک صفحه قطع کنیم)برش دهیم. منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعه نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی میتواند باشد؟



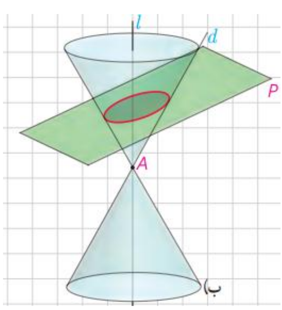
رویه مخروطی :فرض کنید دو خط l و d در نقطه A مانند شکل(متقاطع و غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.



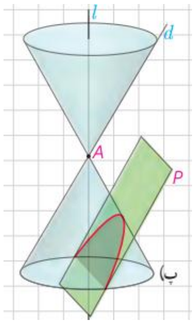
بررسی فصل مشترک صفحه و رویه مخروطی:

حالت اول: در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است .

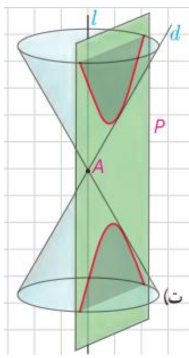
نکته: در حالتی که صفحه P از راس رویه عبور کند فصل مشترک........................می‌باشد.



حالت دوم: در حالتی که صفحه Pبر محور l عمود نباشد و با d مولد نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.



حالت سوم: اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است .



حالت چهارم: اگر صفحه P به‌گونه ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص هذلولی نخواهیم پرداخت.

مثال ۱: یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه P عمود بر محور رویه مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید.

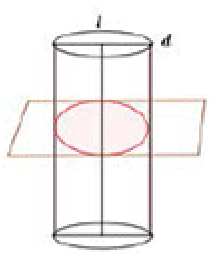
مثال۲: یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه P بر محور رویه مخروطی عمود نباشد و با مولد رویه نیز موازی نباشد، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه و رویه چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید.

مثال۳: یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه P هر دو تکه بالایی و پایینی رویه مخروطی را قطع کند و شامل محور رویه نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی چه شکلی است؟ شکل مناسب بکشید.

مثال٤: هرگاه صفحه ای دقیقا از محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد و از مرکز هم عبور کند، فصل مشترک حاصل چه خواهد بود؟

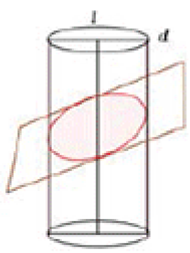
استوانه: هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد میشود که آن را یک سطح استوانه ای می‌نامیم.

به طوری که در بالا و پایین این استوانه دایره تشکیل می‌شود و قاعده استوانه می‌نامیم و خطی که این دو دایره را به یکدیگر وصل کند ارتفاع می‌نامند.



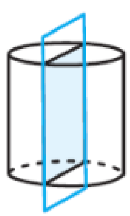
حال فرض کنید صفحه P، یک سطح استوانه ای را قطع کند و حالت‌های زیر حاصل می‌شود.

حالت اول: در حالتی که صفحه P بر خط d و l عمود باشد و از استوانه عبور کند، شکل حاصل یک دایره است .



حالت دوم: در حالتی که صفحه P بر خط l عمود نباشد سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.

حالت سوم: اگر صفحه P با استوانه مماس باشد در این صورت سطح مقطع و فصل مشترک همان خط d نیز می‌باشد.



حالت چهارم: اگر صفحه P به موازات خط l و d استوانه را قطع کند سطح مقطع مستطیل می‌باشد.

مکان هندسی: مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

نکته: برای تشخیص مکان هندسی باید سه مرحله کار انجام دهیم:

۱- به اندازه کافی نقاطی پیدا کنیم که تصوری شهودی از مکان مورد نظر پیدا کنیم.

۲- آن نقطه‌ها را به هم وصل کنید تا تصوری شهودی از مکان هندسی مورد نظر پیدا کنید .

۳- مکان هندسی را توصیف کنید.

مکان‌های هندسی مهم در امتحانات:

۱- عمود منصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه است که از دو سر این پاره‌خط به یک فاصله‌اند .

(ویژگی مشترک: یکسان بودن فاصله نقطه از دو سر پاره خط)

۲- نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه هایی در صفحه این زاویه است که فاصله آنها از دو ضلع زاویه برابر است.

(ویژگی مشترک: یکسان بودن فاصله نقطه از دوضلع زاویه)

۳- دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله شان از نقطه ثابتی به نام مرکز به یک فاصله است .

٤- کره مکان هندسی نقاطی از فضا که از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک فاصله است .

۵- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از سه نقطه غیرواقع بر یک خط به فاصله باشند، یک نقطه است.

این نقطه چه نقطه ای است؟

٦- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله معلوم باشد، دو خط در طرفین dاست.

۷- مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط d به فاصله معلوم باشد، یک استوانه است.

مثال ۵ نهایی: خط d و دو نقطه B و A خارج از این خط d در صفحه مفروضند، نقطه ای بیابید که از به یک فاصله بوده و از خط به فاصله ۳ سانتیمتر است.

مثال ٦: نقاط A و B و Cدر صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

مثال۷: نقطه Aو خط d در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتیمتر و از d به فاصله ۳ سانتیمتر باشد.

مثال ۸ نهایی: نقاط D و A و B و C در صفحه مفروض اند به کمک مکان هندسی نقطه یا نقاطی در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از D و C به یک فاصله باشند. (در مورد حالتهای مختلف بحث کنید)

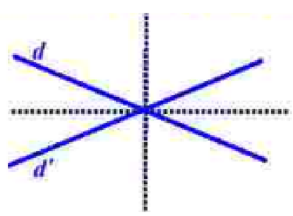
مثال ۹: نقاط C و B و A در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از Aو B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد بحث کنید

مثال۱۰ نهایی: مکان هندسی نقاطی از صفحه را معین کنید که از خط d واقع بر صفحه و دو نقطه ی Aو Bبر روی آن به یک فاصله باشند. حالات مختلف موجود را بیان کنید.

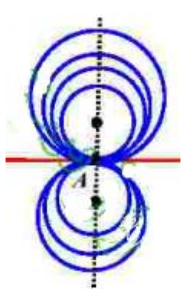
تمرین‌های کتاب صفحه ۳۹:

۱ــ مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

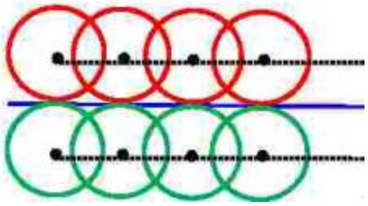
الف: نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و ´d به یک فاصله اند.



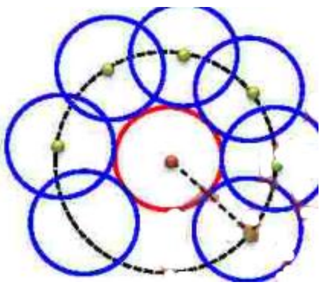
ب: مرکزهای همه دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس اند.



پ: مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند.



ت: مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $c(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی اند.



۲ـ نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از B و A به یک فاصله و از D و C نیز به یک فاصله باشد. بحث کنید.۳ حالت جواب داریم.

۳ـ نقاط A و B و C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتیمتر باشد .بحث کنید.

٤ـ نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتیمتر و از d به فاصله ۳ سانتیمتر باشد (بحث کنید.)

۵- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکل است؟

٦- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران lحول dسطحی ایجاد میشود که آن را یک سطح استوانه ای می نامیم. حال فرض کنید صفحه P که سطح استوانه ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)

پایان درس اول فصل دوم

درس دوم: دایره

نکته مهم: برای حل سوالات دایره باید چند فرمولی که سال گذشته خوانده‌ایم را به طور کامل بلد باشیم.

۱- روابط نقطه با نقطه: فاصله دو نقطه از هم

فاصله دو نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از هم را از فرمول زیر به دست می‌آوریم.

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

نکته بسیار مهم: فاصله دو نقطه مانند A و B از هم یعنی همان طول پاره خط AB. پس اگر در سوال به ما دو نقطه داد و طول پاره خطی که این دو نقطه باهم تشکیل می‌دهند را خواست کافی‌است فاصله این دو نقطه از هم را بیابیم.

نکته: مختصات وسط دو نقطه از فرمول $M = (\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ به دست می‌آید.

مثال:

۲- رابطه نقطه با خط: فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه از خط: برای اینکه بتوانیم فاصله نقطه مانند (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$ را بیابیم ابتدا باید بدانیم که خط را به صورت غیر استاندارد تبدیل کنیم و همه عبارت‌ها را یک طرف مساوی ببریم سپس از فرمول مقابل فاصله نقطه از خط به دست می‌آید.

نکته: فاصله نقطه از خط یعنی طول خط عمود از آن نقطه به آن خط

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

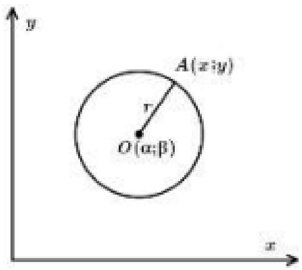
علامت قدر مطلق نشان‌دهنده این است که فاصله هیچ‌گاه منفی نمی‌شود.

مثال: فاصله نقطه $A(2, 5)$ از هر یک از خط $2y - 3x = 4$ زیر بیابید.

مثال: فاصله نقطه $A(-1, 4)$ از هر یک از خط $6y = 1 - 2x$ زیر بیابید.

تعریف :مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله ثابت(شعاع) باشد و هر دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $c(O,r)$ نمایش می‌دهند.

معادله استاندارد دایره:



معادله دایره به مرکز (α,β) و شعاع r به صورت زیر می‌باشد.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

معادله بالا را معادله استاندارد دایره می‌نامند.

یافتن محل برخورد دایره با محور x و y :

مثال ۱: معادله دایره‌ای بنویسید که:

الف: دارای مرکز $(-1,4)$ شعاع ۳ باشد.

ب: دارای مرکز مبدا مختصات و شعاع ۲ باشد.

مثال ۲: معادله دایره ای بنویسید که نقاط $(1,5)$و$(-3,6)$دو سر قطر آن باشند.

مثال ۳: معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن$(2,-4)$ باشد و $(3,1)$یکی از نقاط روی آن باشد.

مثال ٤: مرکز و شعاع دایره $(x-3)^2+(y+1)^2=25$ را بیابید.

ب: محل برخورد این دایره با محور x و y را بیابید.

معادله گسترده (ضمنی) دایره:

اگر معادله استاندارد دایره را به کمک اتحادها باز کنیم به معادله مقابل می‌رسیم که معادله ضمنی یا گسترده دایره می‌رسیم.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

نکته ۱: در معادله بالا حتما حتما ضریب x^2 و y^2 باید باهم یک باشند و اگر هر دو باهم یک نبودند معادله داده‌شده دایره نمی‌باشد.

نکته ۲: اگر x^2 و y^2 هر دو باهم یک ضریب برابر غیر یک داشتند دو طرف معادله را می‌توان بر آن عدد تقسیم کرد تا معادله به دایره تبدیل شود.

برای تبدیل معادله گسترده به استاندارد می‌توان مانند مثال‌های بالا از روش مربع کامل استفاده کرد و معادلعه استاندارد را بسازیم ولی بسیار وقت گیر است که برای راحتی کار می‌توان از دو فرمول مقابل برای یافتن شعاع و مرکز دایره استفاده کرد که بسیار مفید است.

$$\text{مرکز دایره} \Longrightarrow O\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right) \qquad \text{شعاع دایره} \Longrightarrow r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

نکته بسیار مهم: می‌دانیم زیر رادیکال هیچ گاه منفی نمی‌شود پس ۳ حالت زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر زیر رادیکال منفی شود معادله داده شده هیچ نقطه‌ای در صفحه را مشخص نمی‌کند. $a^2+b^2<4c$

حالت دوم: اگر زیر رادیکال صفر شود معادله داده شده نشان‌دهنده یک نقطه در صفحه می‌باشد. $a^2 + b^2 = 4c$

حالت سوم: اگر زیر رادیکال مثبت شود معادله داده شده نشان‌دهنده دایره در صفحه نیز می‌باشد. $a^2 + b^2 > 4c$

پس با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، میتوان معادله آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله دایره میتوان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

مثال ۵: مرکز و شعاع دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ را بیابید.

مثال ٦: مساحت دایره به معادله $(x-1)^2 + y^2 + 4y - 2 = 0$ را بیابید.

مثال ۷: کدام یک از معادله‌های داده شده زیر دایره می‌باشد.مختصات مرکز و شعاع را بیابید و رسم کنید.

الف: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

ب: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 14 = 0$

پ: $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$

ت: $4x^2 + 4y^2 + 16x - 4y + 1 = 0$

ث: $x^2 - y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$

ج: $x^2 + 3y^2 - 4x - 3y + 1 = 0$

تمرین‌های مهم دایره:

۱- روی محور دایره $2x^2 + ay^2 + 8x - 4y - 8 = 0$ را رسم کنید و به صورت استاندارد بنویسید.

۲- مقدار k را چنین بیابید که شعاع دایره مقابل ۲ شود و سپس استاندارد بنویسید. $2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y - k = 0$

۳- مرکز و شعاع دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y = -9$ را بیابید.

٤- مقدار m را چنین بیابید که معادله مقابل دایره شود و سپس استاندارد بنوسید. $x^2 + y^2 + (m-1)x + 2y + 5 = 0$

٥- معادله ضمنی دایره ای بنویسید که نقاط $(2,3)$ و $(-4,1)$ دو سر قطر آن باشند.

۶- معادله دایره‌ای به مرکز $(-2, -1)$ و طول قطر ۵ بنویسید.

۷- معادله دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و از نقطه $(-1, 2)$ عبور کند.

۸- مختصات مرکز دایره $x^2 + y^2 - ax + 2by = 0$ به صورت $(-1, -2)$ است مقادیر a و b را بیابید.

۹- تست: اگر دایره $x^2 + ax + y^2 - 4y = b$ در ربع اول بر محور x و y مماس شود مقادیر a و b را بیابید.

نکات مهم برای حل برخی سوالات امتحان نهایی:

نکته ۱: روش تشخیص محل قرار گرفتن نقطه نسبت به دایره:

ابتدا نقطه را داخل معادله ضمنی دایره قرار می‌دهیم. ۳ حالت زیر رخ می‌دهد.

حالت ۱: اگر جواب برابر صفر شد نقطه روی محیط دایره است.

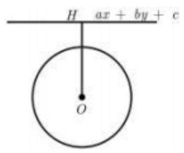
حالت ۲: اگر جواب مثبت شد نقطه خارج دایره است.

حالت ۳: اگر جواب منفی شد نقطه داخل دایره است.

مثال۸: وضعیت هر یک از نقاط $(-1, -1)$و$(2, 3)$و $(-2, 1)$و$(4, -1)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 5$ تعیین کنید.

نکته ۲: وضعیت خط و دایره نسبت به هم:

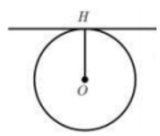
۳ حالت زیر رخ می‌دهد که هر کدام نکات مربوط به خودش را دارند.



OH > R

حالت ۱: خط خارج دایره قرار دارد. **فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع بیشتر است.**

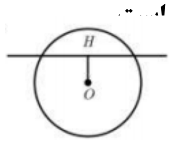
$$OH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}>r$$



حالت۲: خط مماس بر دایره است. **فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع است.**

$$OH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$$

نکته مهم: پس اگر خطی بر دایره مماس شود فاصله مرکز دایره تا خط مماس همان شعاع است پس طبق فرمول فاصله نقطه از خط اندازه شعاع حاصل می‌شود.



OH < R

حالت۳: خط داخل دایره قرار دارد و خط و دایره متقاطع می‌باشند. **فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع کمتر است.**

نکته مهم: خط گذرنده از دایره وتری به معادله $ax+by+c=0$ نیز ایجاد می کند.

$$OH=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$$

در این حالت برای یافتن شعاع باید حتما از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم.

$$r^2=OH^2+\left(\text{نصف وتر}\right)^2$$

مثال ۹: وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید

الف: $3x-4y=0$ و $x^2+y^2-4x-4y=-7$

ب: $x + y = 0$ و $x^2 + y^2 = 2$

پ: $x + y = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

مثال۱۰ : معادله دایره‌ای به مرکز $(-2,1)$ و بر خط $3x - 4y = 9$ مماس شود را بنویسید.

مثال ۱۱ تمرین کتاب: معادله دایره‌ای بنویسید مرکز آن $O(-1,-1)$ بوده و روی خط $x + y = 1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

مثال کتاب درسی: معادله دایره ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

مثال ۱۲: از نقطه $(2,3)$ روی دایره $x^2+y^2-2x+2y=3$ مماسی رسم کرده ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید

نکته ۳: محل برخورد قطرهای دایره

محل برخورد قطرهای دایره همان مرکز دایره می‌باشد پس اگر در سوالی معادله ۲ قطر دایره را داد کافی است محل تقاطع دو خط را بیابیم (با استفاده از دستگاه)

مثال۹: معادله دایره‌ای بنویسید که خطوط $x-y=3$ و $x+y=1$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.

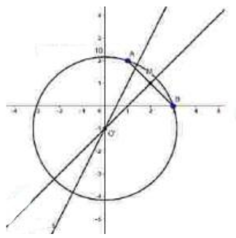
مثال ۱۱: معادله دایره ای که معادله $mx+(m-1)y=2$ کلیه اقطار آن باشد و بر خط به معادله $3x-4y=8$ مماس باشد.

(راهنمایی: دو عدد دلخواه به m بدهید تا دو قطر حاصل شود)

نکته ٤: وتر گذرنده از دو نقطه دلخواه و نوشتن معادله قطر عمود بر وتر:

اگر دو نقطه دل‌خواه که روی محیط دایره می‌باشند را داشته باشیم از وصل شدن آن دو نقطه وتر حاصل می‌شود.

در سال یازدهم خواندیم در هر دایره برای هر وتر دل‌خواه قطری وجود دارد که بر آن وتر عمود و آن را نصف می‌کند پس می‌توان با استفاده از این وتر معادله قطر عمود بر این وتر را نوشت. که به روش مقابل می‌باشد.



تمرین کتاب سوال ۱ قسمت ج: معادله دایره‌ای بنویسید اکه ار دو نقطه $(3,0)$و$(1,2)$ عبور کرده و $y = 2x - 1$ قطر آن باشد.

تمرین کتاب سوال ٥: نقاط $A(-1,-1)$و$B(1,1)$و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABCرا بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B را بیابید.

امتحانی: معادله دایره‌ای که از ۳ نقطه $(-2,-2)$ و $(4,6)$ و $(5,-1)$ عبور می کند را بیابید.

برخی نکات مهم تست:

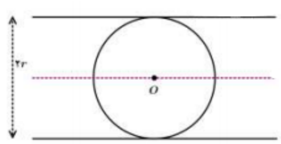
نکته ۱: اگر مرکز دایره روی نیمساز ربع اول و سوم باشد یعنی $x=y$ می‌باشد و مختصات مرکز (x,x) می‌باشد.

نکته ۲: اگر مرکز دایره روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد یعنی $x=-y$ می‌باشد و مختصات مرکز $(x,-x)$ می‌باشد.

مثال ۱۲: قلمچی: مثال مرکز دایره ای بر روی نیمساز ناحیه اول است. اگر این دایره از نقطه $(6,3)$ گذشته و بر خط $y=2x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟

نکته ۳: همانطور که در فصل ۱ خواندیم اگر دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c$ باهم موازی باشند دارای ویژگی زیر می‌باشند.

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\neq\frac{c}{c'}\Longleftrightarrow m=m'$$



و در اصل شیب‌هایشان باهم برابر است.

حال اگر دوخط موازی بر یک دایره مماس شوند طبق شکل فاصله دو خط موازی از هم قطر دایره می‌باشد.

و فاصله دو خط موازی از هم از فرمول مقابل به دست می‌آید.

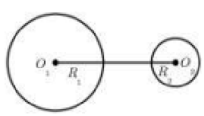
$$2r=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ و معادله خط گذرنده از مرکز : $$\Delta= ax+by+\frac{c+c'}{2}$$

مثال ۱۳: معادله دایره ای را بنویسید که بر خط های به معادلات $y = x + 3$ و $y = x - 1$ مماس بوده و طول مرکزش برابر یک باشد.

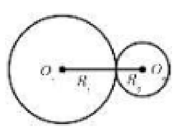
مثال قلمچی: دایره‌ای که از ۲ نقطه $(0,2)$ و $(4,0)$ عبور می‌کند , و بر محور طول‌ها مماس است این دایره محور عرض‌ها را در کدام عرض دیگر قطع می‌کند؟

وضعیت دو دایره نسبت به هم:

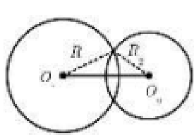
۱- دو دایره متخارج: $O_1O_2 > R_1 + R_2$



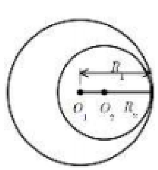
۲- دو دایره مماس بیرون $O_1O_2 = R_1 + R_2$



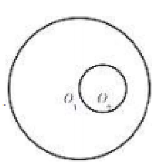
۳- دو دایره متقاطع $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < |R_1 + R_2|$



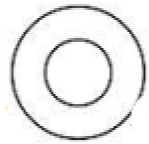
٤- دو دایره مماس درون $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$



۵- دو دایره متداخل $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$



٦- دو دایره هم مرکز $O_1O_2 = 0$



مثال ١٤: وضعیت جفت دایره‌های زیر را بیابید.

روش حل:

الف: $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 2x = 4$

ب: $x^2 + (y-1)^2 = 1$ و $(x-1)^2 + y^2 = 1$

پ: $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$

ت: $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

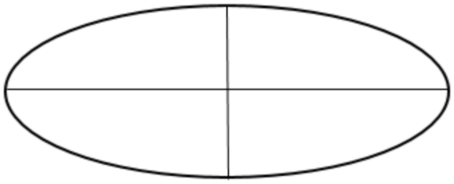
معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(-1,1)$ باشد و دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ مماس بیرونی باشد.

معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس داخل باشد.

(پایان درس دوم)

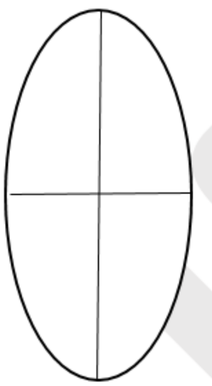
بیضی

آشنایی باش بیضی:



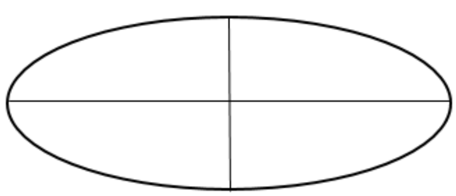
الف: بیضی افقی:

ب: بیضی قائم:

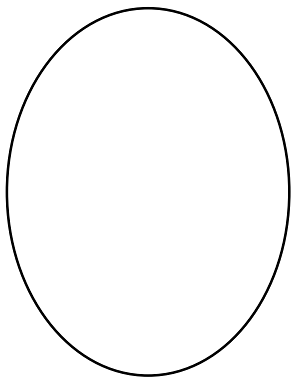


تعریف بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت (کانون‌های بیضی) مقدار ثابتی باشد.

(برابر قطر بزرگ باشد.) $MF + MF' = 2a$



خروج از مرکز بیضی : در هر بیضی نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز گوییم و میزان کشیدگی یک بیضی را نشان می‌دهد و عددی بین صفر و یک است و اگر خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود شکل به دایره نزدیک می‌شود و اگر به عدد ۱ نزدیک شود بیضی شبیه پاره خط می‌شود و با e نمایش می‌دهند.



چند نکته خاص از بیضی:

۱- فاصله یک راس کانونی از یک راس ناکانونی همواره برابر.............................است.

۲-بیشترین فاصله یک راس کانونی از کانون بیضی همواره برابر............................و همچنین کمترین فاصله یک راس کانونی از کانون بیضی همواره برابر....................است.

۳- فاصله یک راس ناکانونی از کانون همواره برابر.............................است.

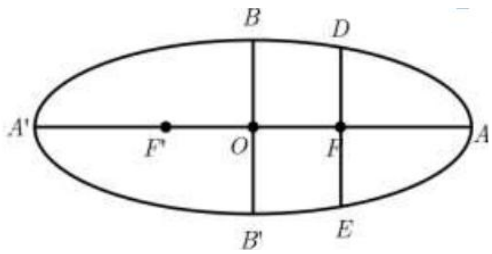
مثال: اگر طول قطر کوچک بیضی$4\sqrt{2}$ و فاصله کانون تا مرکز بیضی ۲ باشد خروج از مرکز بیضی را بیابید .

مثال: قطر کوچک بیضی ، نصف قطر بزرگ آن است. خروج از مرکز را بیابید.

مثال: یک بیضی بر خطوط $x=-1$ و $x=5$ و $y=-4$ و $y=6$ مماس است. مختصات کلیه رئوس بیضی را بیابید.

مثال: فاصله یک رأس ناکانونی بیضی از کانون و رأس کانونی به ترتیب ۲و $\sqrt{5}$ است، بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ روی بیضی از یکی از کانون های بیضی کدام است؟

نکته :اگر مرکز یک بیضی برمبدا مختصات و قطرهای آن برمحورهای مختصات منطبق باشد، طول وتری که بر از کانون گذشته و بر قطر بزرگ عمود است برابر است با$DE = \frac{2b^2}{a}$ و پاره خطDE را وتر کانونی میگوییم.



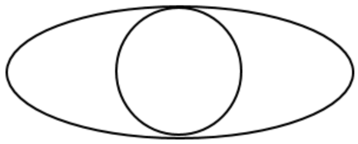
مثال: طول وتر کانونی مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه $F(2,-4)$ و $F'(2,2)$ برابر ۸ باشد، چقدر است؟

مثال: اگر $F(4,2)$ و $F'(-2,2)$کانون های یک بیضی باشند و و $A(6,2)$ یک رأس آن است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.

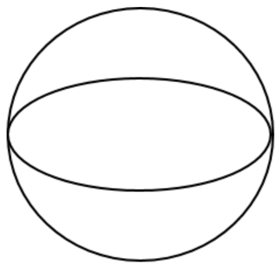
مثال:$B(1-\frac{2}{\sqrt{3}},0)$ و $B'(1+\frac{2}{\sqrt{3}},0)$ رئوس ناکانونی بیضی هستند. اگر خروج از مرکز بیضی$\frac{\sqrt{5}}{3}$ باشد، مجموع فواصل نقطهٔ P روی بیضی از دوکانون بیضی کدام است؟

دایره‌های محیطی و محاطی بیضی:

الف: اگر یک دایره محاطی باشد یعنی درون بیضی است پس در این صورت طول قطر دایره برابر $2b$ است یعنی شعاع دایره b است و مرکز دایره و بیضی باهم یکسان هستند.



ب: اگر یک دایره محیطی باشد یعنی بیرون بیضی است پس در این صورت طول قطر دایره برابر $2a$ است یعنی شعاع دایره a است و مرکز دایره و بیضی باهم یکسان هستند.

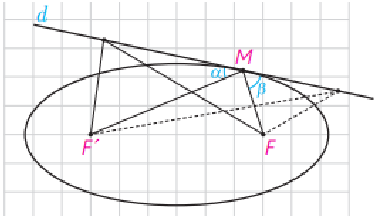


مثال: در یک بیضی طول قطرها ۸ و ٦ واحد بوده و مرکز بیضی روی مبدأ مختصات میباشد.

الف: خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

ب: معادلات دایره های محاطی و محیطی بیضی را بنویسید.

نکته :خاصیت انعکاس نور در بیضی: اگر از یکی از کانون های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابانده شود، انعکاس نور از کانون دیگر خواهد گذشت



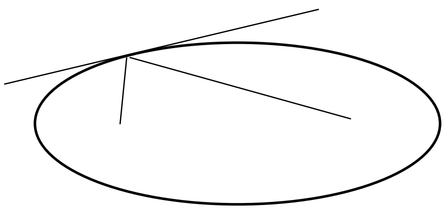
فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه M بر بیضی مماس باشد .

۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون Fو F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

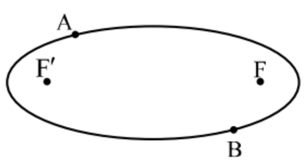
۲-دو زاویه αو βنسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳- با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه ای باشد و از یکی از کانون های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

پ: درشکل روبرو اگر خط dدرنقطه M بربیضی مماس باشد، زاویه$FMF' = 50°$ باشد آنگاه اندازه زاویه α و β را بیابید.



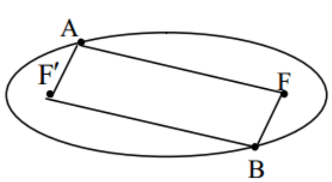
قضیه‌های مهم فصل ۲:



دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F′ کانونهای بیضی‌اند.

اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF′ موازی‌اند.

پاسخ:



نقاط A و B را به کانون های بیضی وصل می کنیم

نقطه A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی (۱) $AF + AF' = ۲a$ (۰/۲۵)

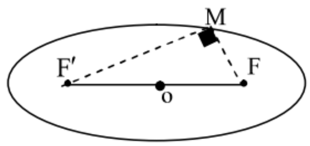
نقطه B روی بیضی قرار دارد (۲) $BF + BF' = ۲a$ (۰/۲۵)

از (۱) و (۲) و فرض ($AF' = BF$)نتیجه می شود $AF = BF'$ (۰/۲۵)

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی الاضلاع است(۰/۲۵) در متوازی الاضلاع ،ضلع های روبرو موازی‌اند.

$AF \parallel BF'$ (۰/۲۵)

نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم‌الزاویه است، طول MF را به‌دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند).



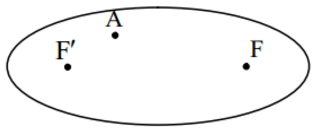
پاسخ:

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \xrightarrow{(۰/۲۵)} c = ۴ \ (۰/۲۵)$$

$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \rightarrow MF' = ۱۰ - MF \ (۰/۲۵)$$

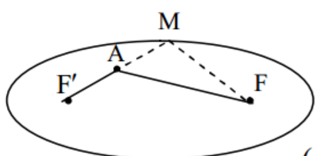
$$(MF)^۲ + (MF')^۲ = (FF')^۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} (MF)^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} MF = ۵ \pm \sqrt{۷} \ (۰/۲۵)$$

در شکل مقابل نقطه A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند.
ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F و F' کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است.



ص۴۷

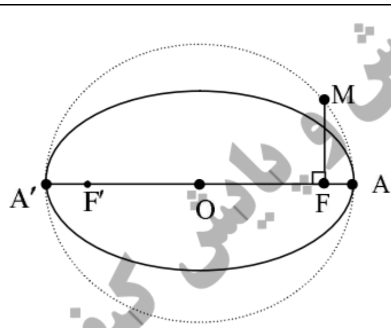
پاره خط $F'A$ را ادامه می دهیم تا بیضی را در نقطه M قطع کند M را به F وصل می کنیم (۰/۲۵) نقطه M روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی داریم: $MF' + MF = ۲a$ (۰/۲۵)



در مثلث $\overset{\Delta}{MAF}$ بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم: $AF < MA + MF$ (۰/۲۵)

به طرفین نا مساوی مقدار AF' را اضافه می کنیم . $\underbrace{AF + AF' < (MA + AF') + MF}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{MF' + MF}_{(۰/۲۵)} = ۲a$

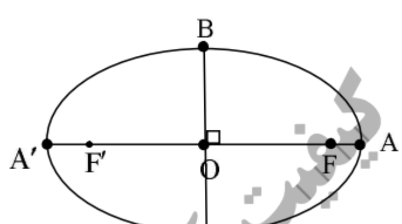
قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است
واز کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا
دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند.
ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



$$OM = OA = a \ (۰/۲۵)$$

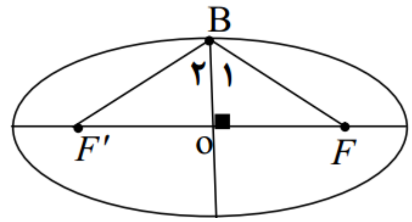
$$\overset{\Delta}{OMF}: OF^۲ + MF^۲ = OM^۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} c^۲ + MF^۲ = a^۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} MF = b \ (۰/۲۵)$$

در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



$$\text{۲}a = \sqrt{\text{۲}}\,(\text{۲}b) \rightarrow a = b\sqrt{\text{۲}} \xrightarrow{(\text{۰/۲۵})} \underbrace{\cos B_1 = \frac{OB}{BF}}_{(\text{۰/۲۵})} = \underbrace{\frac{b}{b\sqrt{\text{۲}}}}_{(\text{۰/۲۵})} = \underbrace{\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}}_{(\text{۰/۲۵})} \rightarrow B_1 = \text{۴۵}^\circ\ (\text{./۲۵})$$

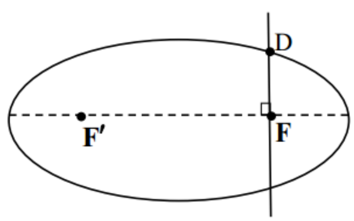
$$F\hat{B}F' = \text{۲} \times \text{۴۵} = \text{۹۰}^\circ \quad (\text{۰/۲۵})$$



در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} + ax + by + c = \circ$ با استفاده از روش مربع کامل،ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r = \frac{\sqrt{a^{\text{۲}} + b^{\text{۲}} - \text{۴}c}}{\text{۲}}$ است.

بیضی با قطربزرگ $\text{۲}a$ ، قطرکوچک $\text{۲}b$ وکانون های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است . اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمودباشد و بیضی را در نقطه D قطع کند، ثابت کنید :

$$DF = \frac{b^{\text{۲}}}{a}$$



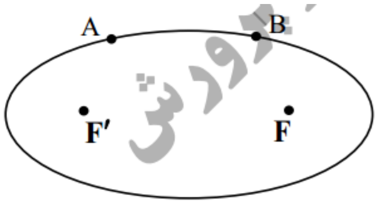
نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF + DF' = \text{۲}a\ (\text{۰ / ۲۵})$

در مثلث قائم الزاویه DFF' بنا به قضیه فیثاغورث داریم:

$$DF^{\text{۲}} + FF'^{\text{۲}} = DF'^{\text{۲}} \xrightarrow{(\text{۰/۲۵})} DF^{\text{۲}} + (\text{۲}c)^{\text{۲}} = (\text{۲}a - DF)^{\text{۲}}\ (\text{۰ / ۲۵})$$

$$DF = \frac{a^{\text{۲}} - c^{\text{۲}}}{a} \xrightarrow[(\text{۰/۵})]{a^{\text{۲}} - c^{\text{۲}} = b^{\text{۲}}} DF = \frac{b^{\text{۲}}}{a}$$

در شکل روبه‌رو دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. اگر $AF' = BF$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید: مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.

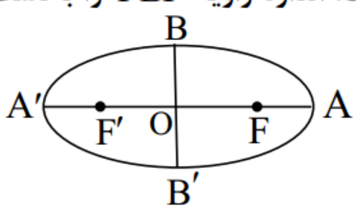


نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، با توجه به تعریف بیضی:

$$\underbrace{AF + AF' = ۲a = BF + BF'}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{AF'=BF} AF = BF' \ (۰/۲۵)$$

دو مثلث AFF' و BFF' بنا به حالت $(AF = BF' \,,\, AF' = BF \,,\, FF' = FF')$ برابری سه ضلع همنهشت هستند (۰/۵)، نتیجه دو زاویه $A\hat{F}F' = B\hat{F'}F$ (۰/۲۵)، مثلث MFF' متساوی الساقین است و $MF = MF'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره خط AFF' (قطر کوچک بیضی) است .(۰/۲۵)

در یک بیضی با کانون‌های F و F'، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ را به‌دست آورید.

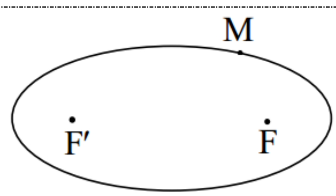


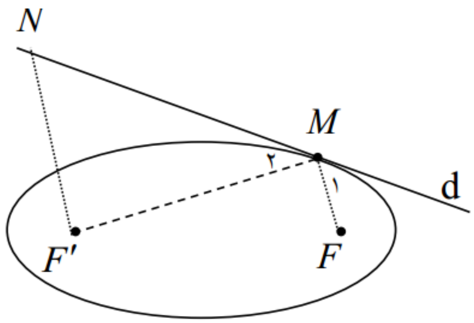
$$\underbrace{BB' = \frac{۱}{۲}AA'}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{۲b = \frac{۱}{۲}(۲a) \Rightarrow a = ۲b}_{(۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{\cos F'\hat{B}O = \frac{BO}{BF'} = \frac{b}{a} = \frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{F'\hat{B}O = ۶۰^\circ}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{F'\hat{B}F = ۱۲۰^\circ}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم: برای حل مسأله با استفاده از تانژانت زاویه $F'\hat{B}O$ نمره لحاظ گردد. ص۵۸

در شکل مقابل، نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده است. خط d را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$.





مجموع $MF + MF'$ کم‌ترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (۰/۲۵)

از طرفی : $MF \parallel NF'$ و d مورب ، درنتیجه $\hat{N} = \hat{M}_1$ (۰/۲۵)

نتیجه می شود $\hat{N} = \hat{M}_2$ (۰/۲۵)

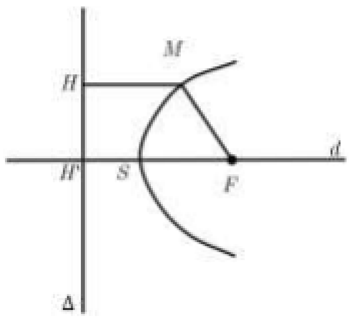
مثلث MNF' متساوی الساقین است.

یعنی $MF' = NF'$.

رسم شکل : (۰/۲۵) .

سهمی

تعریف :مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط(کانون) به یک فاصله‌اند یعنی $|MH| = |MF|$



نکات مهم :نقطه F را کانون و S را رأس سهمی و خط Δ را خط هادی و خط d که از S و F می‌گذرد و بر خط هادی عمود است را محور تقارن یا محور سهمی می‌نامیم.

نکته :فاصله ی کانون تا رأس یعنی $|FS|$ و راس تا خط هادی یعنی $|SH'|$ را با $|a|$ نمایش می‌دهیم .

نکته :فاصله کانون تا خط هادی $2|a|$ است .

نکته: اگر دهانه سهمی به سمت قسمت مثبت یا منفی محور طول‌ها باشد سهمی را افقی و اگر دهانه آن به سمت بالا یا پایین باشد آن را سهمی قائم می‌گوییم. سهمی خوانده شده در سال دهم و یازدهم از نوع سهمی قائم بودند

حالت‌های مختلف سهمی (معادله استاندارد یا متعارف)

الف: زمانی که راس سهمی مبدا مختصات باشد.

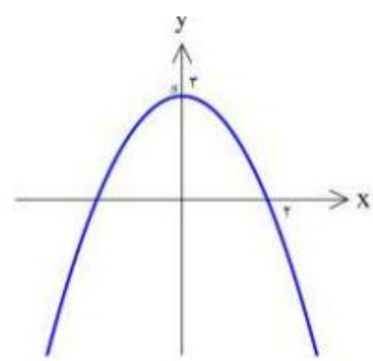
نکته: اگر دهانه سهمی با راست یا بالا باشد همواره a مثبت است.

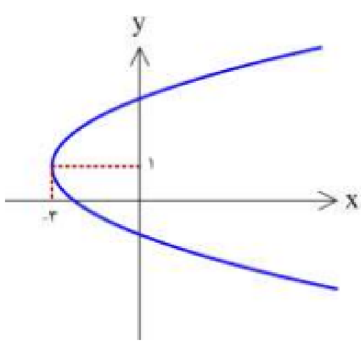
نکته: اگر دهانه سهمی با چپ یا پایین باشد همواره a منفی است.

ب: زمانی که راس سهمی $S(\alpha,\beta)$ باشد.

نکته‌های مهم: اگر در سوال یک نقطه دل‌خواه از سهمی را مشخص کرده باشد یعنی آن نقطه در معادله سهمی صدق می‌کند و حواسمان باشد آن نقطه را به جای x و y قرار دهیم و فقط α و β مخصوص راس سهمی می‌باشد.

مثال: معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.





مثال: نقطه $S(1,2)$ راس سهمی و خط $y=-1$ خط هادی آن است. معادله سهمی را بنویسید.

مثال: معادله سهمی را به دست آورید که $F(2,3)$ کانون و خط $X=-4$ به معادله خط هادی آن باشد.

مثال: معادله سهمی را به دست آورید که $S(1,-1)$ راس آنو $F(3,-1)$ کانون آن باشد.

مثال: معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط $x=-1$ و نقطه $A(-3,2)$ به یک فاصله هستند، کدام است؟

مثال: مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی به معادله $(x+4)^2 = -8(y+2)$ را تعیین نموده و نمودار آن را رسم کنید.

نکته :به خطی که از کانون سهمی بر محور سهمی عمود رسم شود وتر کانونی سهمی می‌گوییم و طول پاره خط ایجاد شده، همواره مقدار ثابت $4|a|$ است

مثال: اگر یک سهمی قائم رو به بالا باز شود و دو سر وتر کانونی آن $A(-1,2)$ و $B(3,2)$ باشند، معادله سهمی کدام است.

مثال: معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن به معادله $x=0$ و محور آن به معادله $y=3$ بوده و از نقطه $A(2,5)$ عبور کند.

مثال: سهمی با کانون $F(1,2)$ و خط هادی $x=3$ محور ها yها را در دو نقطه Aو B قطع میکند. فاصله Aو B چقدر است؟

معادله ضمنی یا گسترده سهمی به استاندارد یا متعارف:

مثال: معادله ی $x^2 + 4y + 2x + 9 = 0$ را استاندارد کرده و مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی را بنویسید.

مثال: مختصات رأس و کانون سهمی $y^2 = 2x - 4y$ و همچنین نقاط برخورد سهمی با محور های مختصات را بیابید و آن را رسم کنید.

مثال: معادله یک سهمی را بنویسید که رأس آن مبدامختصات و محور x نیز محور تقارن آن باشد واز نقطه $(-4,-2)$ عبور کند.

مثال: سهمی $y^2=4x-4$ نیز مفروض است. به مرکز کانون سهمی دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل تلاقی سهمی و دایره را بیابید.

مثال: نمودار $y^2-2y+8x+9=0$ را رسم کنید.

مثال: معادله سهمی را به دست آورید که $A(2,1)$ راس آن و $F(2,5)$ کانون آن باشد و سپس معادله خط هادی را هم بنویسید.

مثال: در سهمی $3x^2+4y-6x+11=0$ نیز معادله خط هادی را بنویسید.

مثال: مقدار $\mathbf{m}$ را طوری بیابید که طول نقطه راس سهمی $2y^2+4y-x+m=0$ برابر $\frac{17}{8}$شود.

مثال: مقدار a و b را طوری بیابید که نقطه $(-1,-2)$ راس سهمی $x=y^2+ay+b$ باشد.

مثال خیلی سخت: به ازای کدام مقدار a کانون سهمی به معادله $2y^2 + ay - 3x = 0$ روی محور y هاست؟

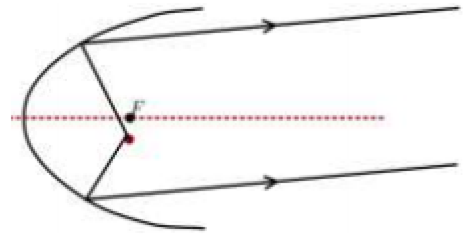
مثال خیلی سخت: به ازای کدام مقدار a کانون سهمی به معادله $y^2 - ay - 3x = \frac{a^2}{2}$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم هاست؟

ویژگی بازتابندگی سهمی و کاربردهای آن

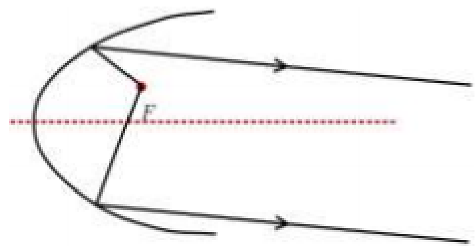
حالت ۱: هر شعاع نوری که از کانون به بدنه سهمی بتابد ، بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت .و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی بتابد ، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

از این خاصیت در چراغ جلوی ماشین ها استفاده می‌شود .و لامپ در کانون قرار می‌گیرد .در این صورت تمام پرتوها به جداره می‌خورند و موازی محور خارج می‌شوند ونور بیشتری تولید می‌شود.

حالت ۲: اگر لامپ در همان راستای کانون اما کمی پایین تر قرار گیرد هم چیزی شبیه خاصیت قبل را دارد و باز هم پرتو های ایجاد شده موازی خارج می‌شوند اما از راستای قبلی بالاتر خارج می‌شوند که اصطلاحا نور بالا می‌گوییم.



حالت ۳: اگر لامپ در همان راستای کانون اما کمی بالاتر قرار گیرد هم چیزی شبیه خاصیت اول را دارد و باز هم پرتو های ایجاد شده موازی خارج می‌شوند اما از راستای قبلی پایین تر خارج می‌شوند که اصطلاحا نور پایین می‌گوییم.



سوالات دیش ماهواره

در یک دیش مخابراتی همواره فرمول مقابل برقرار است:

$$a=\frac{4b^2}{16h}=\frac{(2b)\times(2b)}{16h}$$

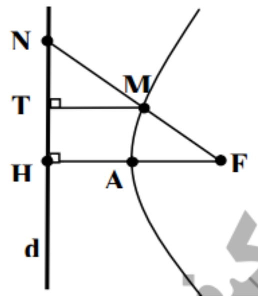
فاصله کانونی: a

قطر دهانه دیش: $2b$

گودی: h

مثال: در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی ۹ واحد مفروض است. فاصله کانونی این دیش را بیابید.

قضیه :



در شکل روبرو سهمی با رأس A وکانون F وخط هادی d رسم شده است،از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده وامتداد داده ایم تا خط d را در N قطع کند وازنقطهٔ M ، MT را بر d عمود کرده ایم.

ثابت کنید : $\dfrac{FN}{FA}=\dfrac{۲NT}{TH}$

پاسخ:

روش اول:

بنا به تعریف سهمی $MF = MT$ مثلث MFT متساوی الساقین است . $M\hat{T}F = T\hat{F}M$ (۱) (۰/۲۵)

از طرفی بنا به خطوط موازی $FH \parallel MT$ ومورب FT نتیجه می شود $M\hat{T}F = T\hat{F}H$ (۲) (۰/۲۵)

از (۱)و(۲)نتیجه می شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\underbrace{\frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH}}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}\ (۰/۲۵)$$

روش دوم: ص۵۸

$MT \parallel FH$ باتوجه به قضیه تالس در مثلث NHF:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{NM}{MF}=\dfrac{NT}{TH} \\ \underbrace{\dfrac{MT}{FH}=\dfrac{NM}{NF}}_{(۰/۲۵)} \xrightarrow{MT=MF(۰/۲۵)} \underbrace{\cancel{\dfrac{NF}{FH}=\dfrac{NM}{MF}}}_{(۰/۲۵)} \end{array}\right\} \xrightarrow{FH=۲FA(۰/۲۵)} \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH}$$

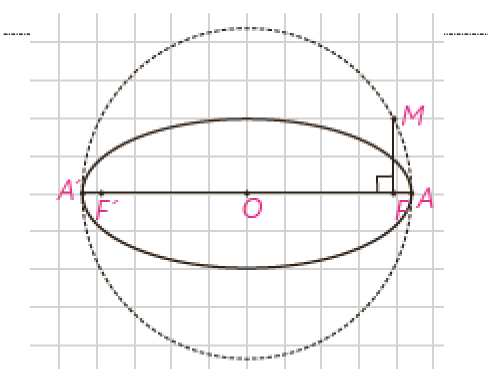
$$\xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}\ (۰/۲۵)$$

تمرین‌های کتاب صفحه ۵۷ و ۵۸ و ۵۹

۱ــ دو نقطهٔ A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید :

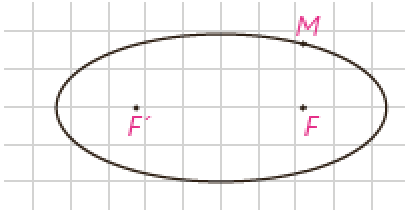
الف) در حالتی‌که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



۲ــ قطر دایره C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.

۳ــ در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$

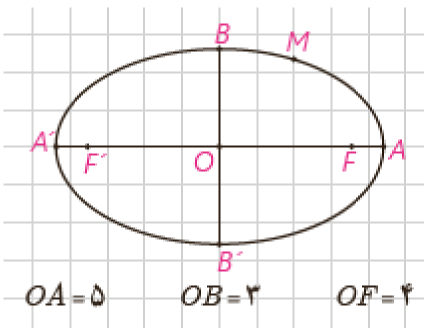


۴ــ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

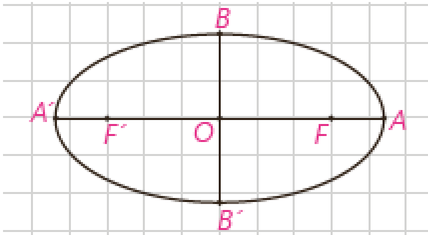
الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

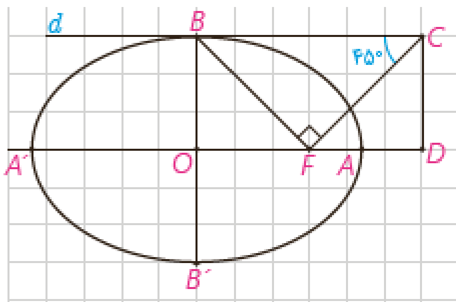
ج) طول‌های MF و MF' را به‌دست آورید.



۵ــ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ FBF' چند درجه است؟



۶ــ در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F=45^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به‌دست آورید.



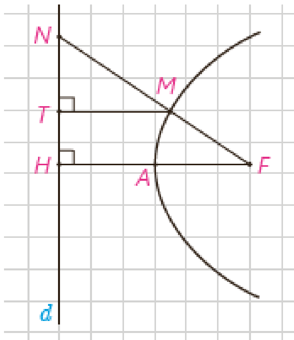
۷ــ سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۸ــ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ را به دست آورید.

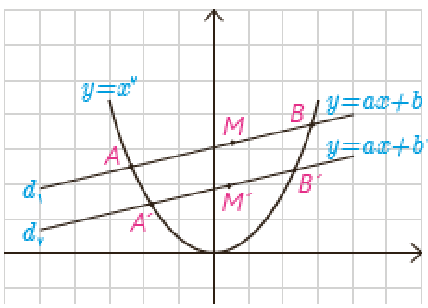
۹ــ معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ رأس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد.

۱۰ــ سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱ــ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.



۱۲ــ در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید : $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$



۱۵ــ سهمی $y=x^2$ و دو خطِ موازی $d_1:\ y=ax+b$ و $d_2:\ y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند، درنظر بگیرید.

الف) معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y=x^2$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطهٔ M را به‌دست آورید.

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطهٔ M' (نقطهٔ وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) به‌دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور yها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

فصل سوم: ((بردارها))

تهیه و تدوین: محمد عبدی

سرفصل‌ها:

الف: فضای دو بعدی و سه بعدی

ب: بردارهای سه بعدی و اعمال روی آن‌ها

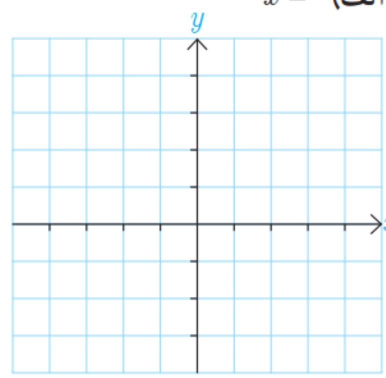
پ: ضرب داخلی و تصویر قائم

ت: ضرب خارجی و حجم متوازی‌السطوح

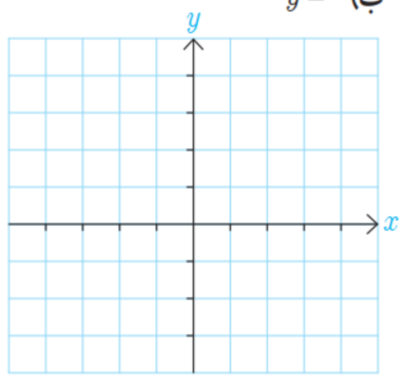
یادآوری فضای $\mathbb{R}^2$

برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

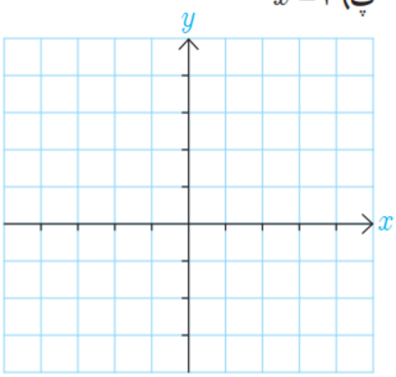
الف) $x = 0$



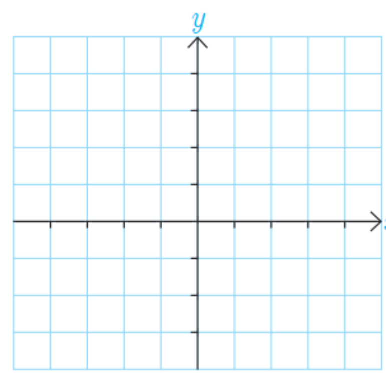
ب) $y = 0$



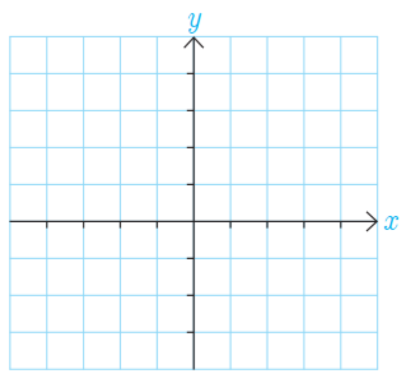
پ) $x = 1$



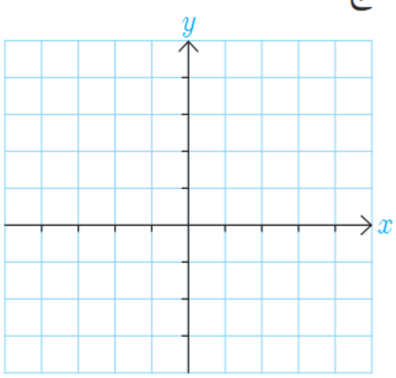
ت) $x = 1$, $-1 \leq y < 3$



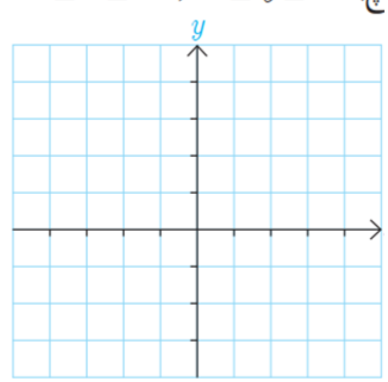
ث) $y = x^2$, $-1 < x \leq 2$



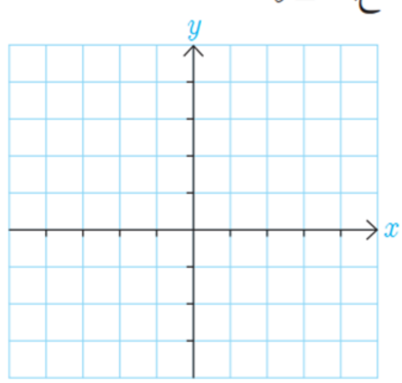
ج) $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$



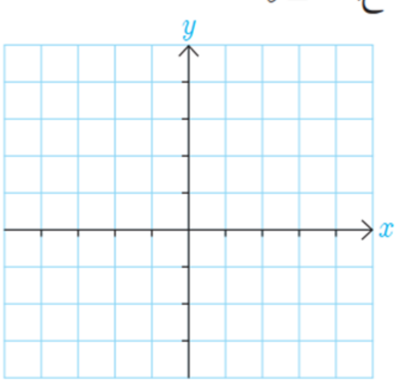
چ) $-1 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq -2$



ح) $x^2 < y \leq 2$

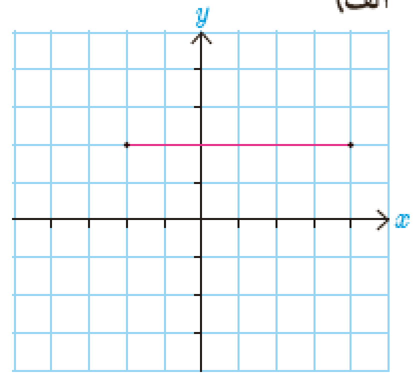


خ) $y \geq x^2$

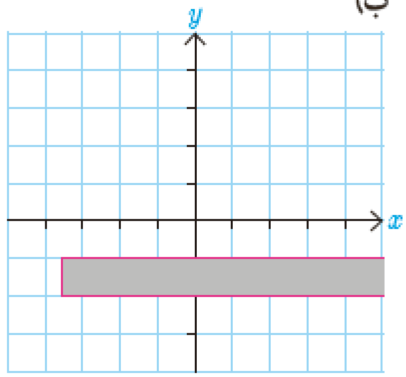


مثال: در هر یک از شکل های زیر ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی های دیگری که از شکل دریافت می کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.

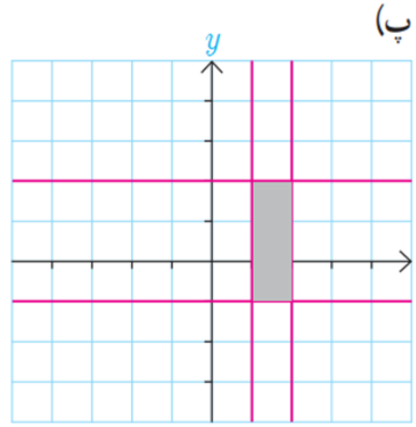
الف)



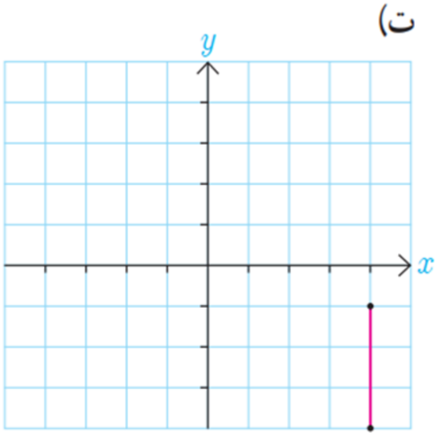
ب)



پ)



ت)



معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

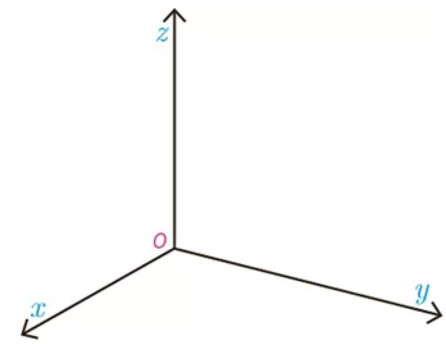
مختصات فضایی سه بعدی $R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$

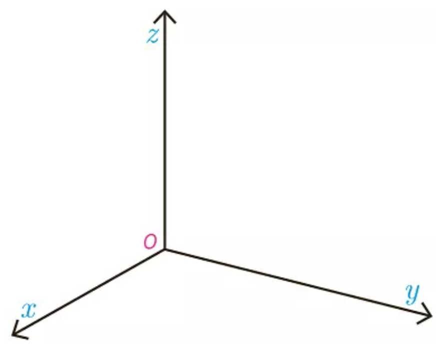
جدول علامت مقابل را باید کامل حفظ باشیم.

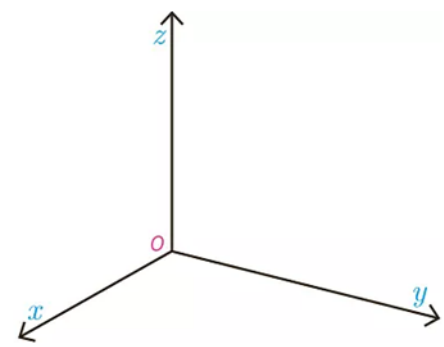
شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

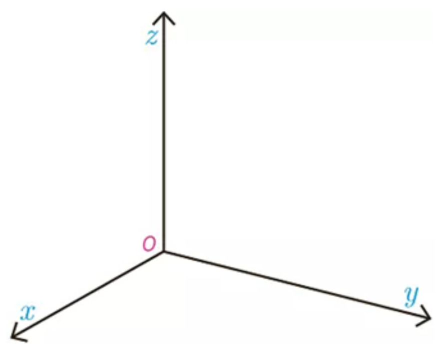
به طوری که ۸ ناحیه در فضا ایجاد می‌کند.

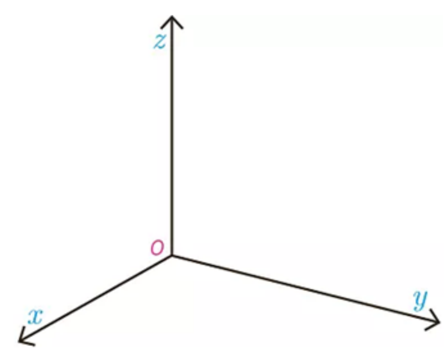
مثال: نقاط زیر را روی دستگاه مختصات نمایش دهید.

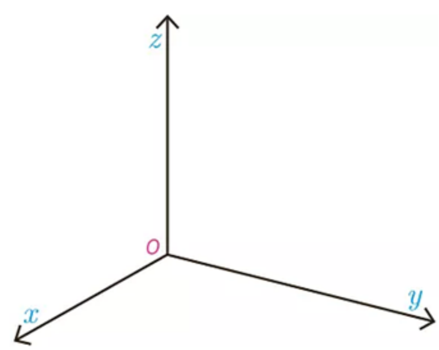












نکات بسیار مهم دستگاه مختصات ۳بعدی:

۱- اگر نقطه ای روی یکی از محورهای مختصات باشد آن مولفه عدد و باقی مولفه‌ها صفر می‌باشند.

$C(0,0,z)$ $\qquad$ $B(0,y,0)$ $\qquad$ $A(x,0,0)$

۲- اگر خطی موازی محور x ها باشد (عمود بر صفحه zy) یعنی x هر عددی می‌تواند باشد و y و z یک عدد ثابت اند و نحوه نمایش به صورت

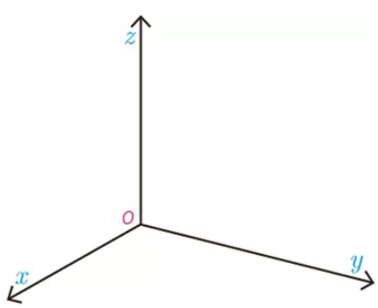
$$\begin{cases} y = \text{عدد} \\ z = \text{عدد} \end{cases}$$

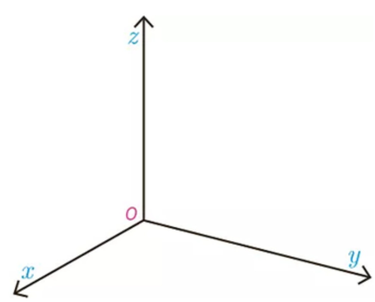
اگر خطی موازی محور y ها باشد (عمود بر صفحه zx) یعنی x هر عددی می‌تواند باشد و y و z یک عدد ثابت اند و نحوه نمایش به صورت

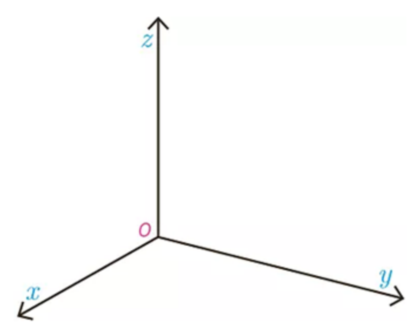
$$\begin{cases} x = \text{عدد} \\ z = \text{عدد} \end{cases}$$

اگر خطی موازی محور z ها باشد (عمود بر صفحه xy) یعنی x هر عددی می‌تواند باشد و y و z یک عدد ثابت اند و نحوه نمایش به صورت

$$\begin{cases} x = \text{عدد} \\ y = \text{عدد} \end{cases}$$







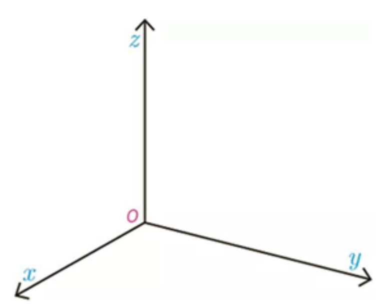
۳- اگر نقطه‌ای روی یک صفحه باشد مولفه‌ای محور عمود بر آن صفحه است.

$C(0,y,z)$ $\qquad$ $B(x,0,z)$ $\qquad$ $A(x,y,0)$

الف) صفحه xOy : $\{(x,y,z) : z = 0\}$ یا $\{(x,y,0) : x,y \in R\}$

ب) صفحه yOz : $\{(x,y,z) : x = 0\}$ یا $\{(0,y,z) : y,z \in R\}$

پ) صفحه xOz : $\{(x,y,z) : y = 0\}$ یا $\{(x,0,z) : x,z \in R\}$



٤- <u>تصویر نقطه</u> $A(x,y,z)$ نسبت به محور یا یک صفحه، آن مولفه مربوط به صفحه یا محور را حفظ می‌کند و باقی مولفه‌ها صفر است.

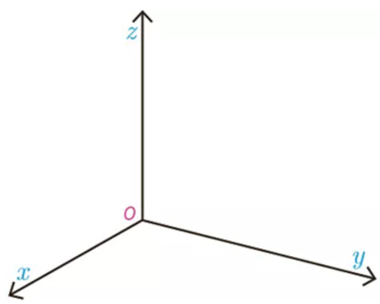
$$A(x,y,z) \xrightarrow{\text{تصویر نسبت به صفحه } xy} A(x,y,0)$$

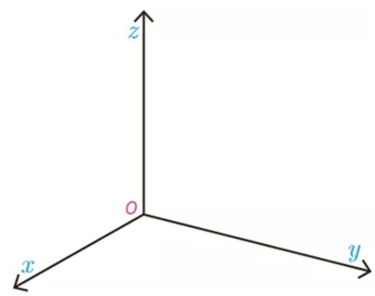
$$A(x,y,z) \xrightarrow{\text{تصویر نسبت به محور } y} A(0,y,0)$$

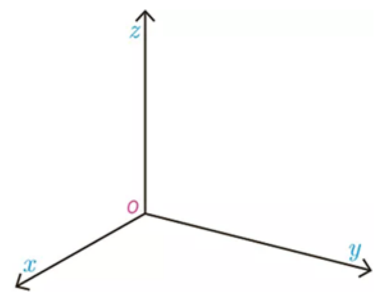
٤- <u>در قرینه نقطه</u> $A(x,y,z)$ نسبت به محور یا یک صفحه، آن مولفه مربوط به صفحه یا محور را حفظ می‌کند و باقی مولفه‌ها قرینه است.

$$A(x,y,z) \xrightarrow{\text{تصویر نسبت به صفحه } xy} A(x,y,-z)$$

$$A(x,y,z) \xrightarrow{\text{تصویر نسبت به محور } x} A(x,-y,-z)$$





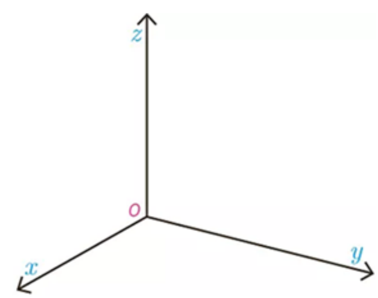


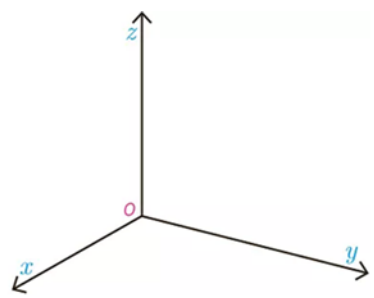
٥- اگر $A(x_1,y_1,z_1)$ و $B(x_2,y_2,z_2)$ مختصات ابتدا و انتهای پاره‌خط AB نیز باشند مختصات وسط پاره‌خط پاره خط AB را با M نیز نشان می‌دهند.

مثال:

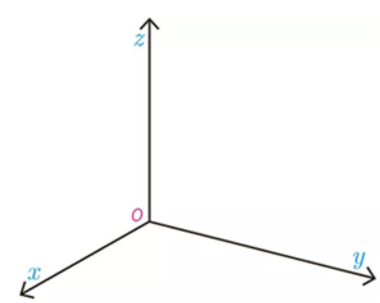
٦- نحوه نمایش نقطه ۳تایی مرتب است یعنی $A(x,y,z)$. یا به صورت $\begin{cases} x = \text{عدد} \\ y = \text{عدد} \\ z = \text{عدد} \end{cases}$ **می‌باشد.**

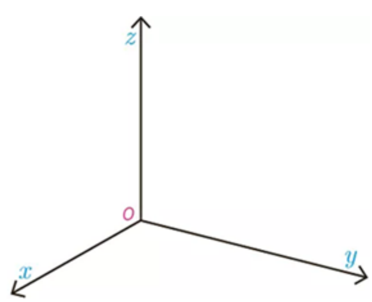
*** نکته بسیار مهم: نحوه نمایش خط به صورت** $\begin{cases} x = \text{عدد} \\ y = \text{عدد} \end{cases}$ **می‌باشد یعنی خطی به موازات محور z ها که ابتدا و انتها مشخص نمی-باشد و هر عددی می‌تواند باشد ولی نحوه نمایش پاره خط به صورت** $\begin{cases} x = \text{عدد} \\ y = \text{عدد} \\ \text{ابتدا} \le z \le \text{انتها} \end{cases}$ **می‌باشد یعنی پاره‌خطی به موازات محور z ها که ابتدا و انتها مشخص می‌باشد و هر عددی می‌تواند باشد.**



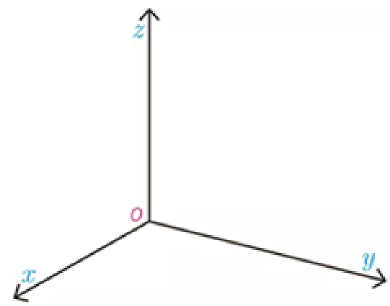


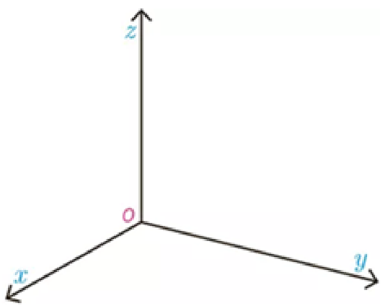
***نحوه نمایش خط به صورت** $\begin{cases} x = \text{عدد} \\ z = \text{عدد} \end{cases}$ **می‌باشد یعنی خطی به موازات محور y ها که ابتدا و انتها مشخص نمی‌باشد و هر عددی می‌تواند باشد نحوه نمایش پاره خط به صورت** $\begin{cases} x = \text{عدد} \\ z = \text{عدد} \\ \text{ابتدا} \le y \le \text{انتها} \end{cases}$ **می‌باشد یعنی پاره‌خطی به موازات محور y ها که ابتدا و انتها مشخص می‌باشد و هر عددی می‌تواند باشد.**





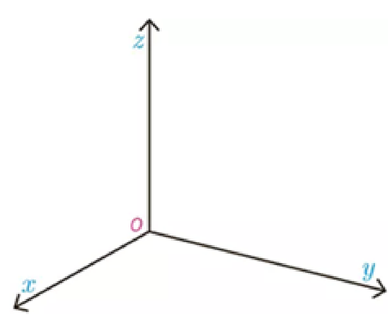
*نحوه نمایش خط به صورت $\begin{cases} y = \text{عدد} \\ z = \text{عدد} \end{cases}$ می‌باشد یعنی خطی به موازات محور x ها که ابتدا و انتها مشخص نمی‌باشد و هر عددی می‌تواند باشد ولی نحوه نمایش پاره خط به صورت $\begin{cases} \text{انتها} \le x \le \text{ابتدا} \\ y = \text{عدد} \\ z = \text{عدد} \end{cases}$ می‌باشد یعنی پاره‌خطی به موازات محور x ها که ابتدا و انتها مشخص می‌باشد و هر عددی می‌تواند باشد.

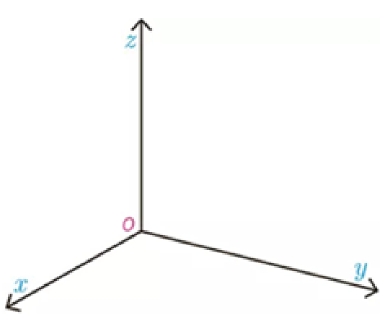




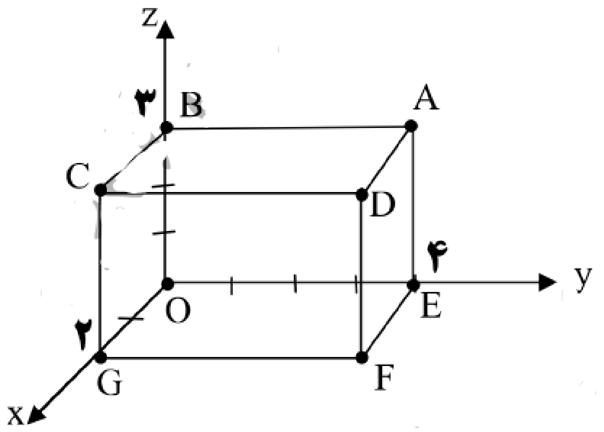
۷- نکته بسیار مهم: نحوه نمایش صفحه به صورت $x = \text{عدد}$ می‌باشد یعنی این صفحه عمود بر صفحه x به موازات محور z و y ها که ابتدا و انتها مشخص نمی‌باشد و هر عددی می‌تواند باشد ولی نحوه نمایش صفحه‌ای به صورت $\begin{cases} x = \text{عدد} \\ \text{انتها} \le y \le \text{ابتدا} \\ \text{انتها} \le z \le \text{ابتدا} \end{cases}$ می‌باشد یعنی ابتدا و انتهای محور y و z مشخص می‌باشد.

به همین ترتیب در باقی صفحات هم این روابط برقرار است.





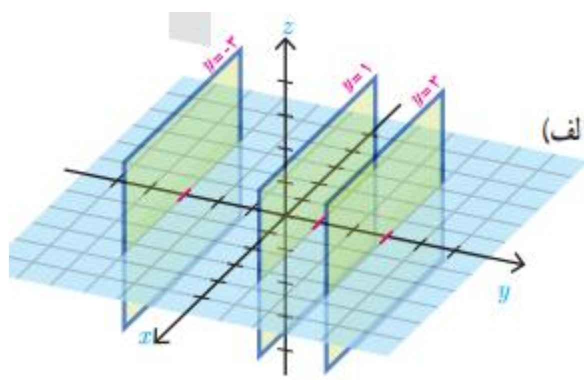
با توجه شکل مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.

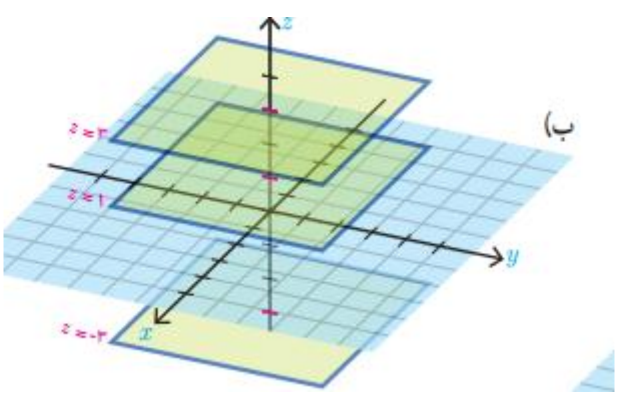


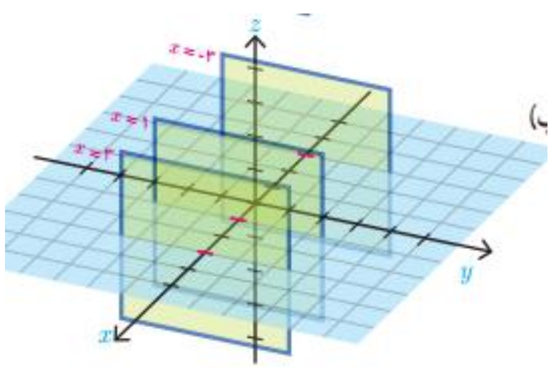
الف: مختصات تمام نقاط را بیابید.

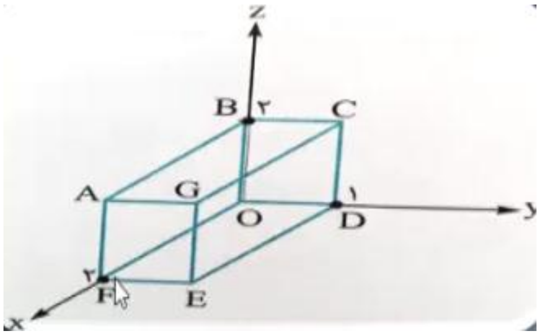
ب: مختصات تمام خطوط را بیابید.

مختصات ۸ وجه را بیابید.

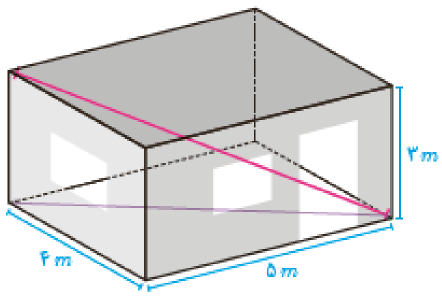








مثال: در این شکل اتاقی به طول 5 متر و عرض 4 متر و ارتفاع 3 متر مشاهده می شود .طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟



مثال: مختصات چند نقطه را که در رابطه $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

بردارها در فضای $\mathbb{R}^3$

نکته ۱: اگر $A(a_1, a_2, a_3)$ نقطه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد اگر از مبدا ختصات به آن وصل کنیم بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ نیز حاصل می‌شود.

نکته ۲: اندازه بردار $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ نیز همواره برابر $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ نیز می‌باشد.

مثال:

نکته ۳: اگر $A(a_1, a_2, a_3)$ و $B(b_1, b_2, b_3)$ دو نقطه در فضا باشند و این دو نقطه را به هم وصل کنیم بردار $\overrightarrow{AB}$ حاصل می‌شود.

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

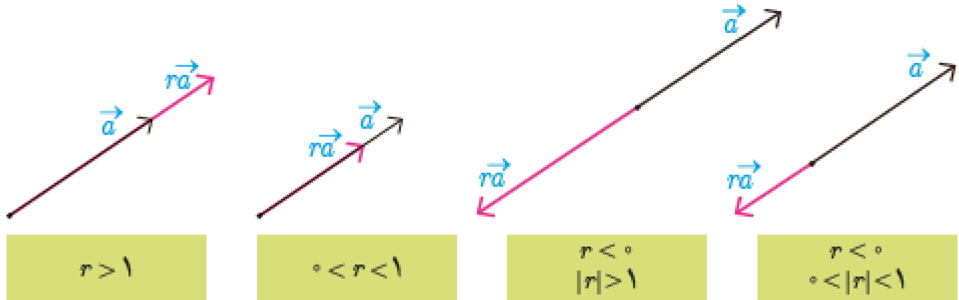
نکته ٤: اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ نیز همواره برابر $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ نیز می‌باشد.

مثال:

ضرب عدد در بردار

اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ برداری در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد و r عددی حقیقی باشد در این صورت :

بردار $r\vec{a}$ نیز برداری موازی یا هم‌راستا با $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ نیز می‌باشد و $\overrightarrow{ra} = (ra_1, ra_2, ra_3)$



نکته: اگر برداری مضرب برداری دیگر باشد در این صورت باهم موتزی‌اند و رابطه مقابل برقرار است.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = r$$

مثال: اگر دو بردار $\vec{v}(2, 1, m + 1)$ و $\vec{w}(-1, 2k, 1)$ موازی باشند مقادیر مجهول را بیابید.

مثال: اگر دو بردار $\vec{v}(2, 1, -2)$ و $\vec{w}(1, 2, -2)$ دو ضلع یک مثلث باشند محیط مثلث را بیابید.

مثال: طول ضلع سوم مثلثی که بر دو بردار $\vec{a}(7, 3, 2)$ و $\vec{b}(5, -1, 6)$ بنا می‌شود چقدر است؟

بردارهای یکه در $\mathbb{R}^3$

برداری که طول آن برابر یک باشد را بردار یکه می‌نامند و بردارهای یکه محورهای x و y و z را به ترتیب i و j و k مینامیم.

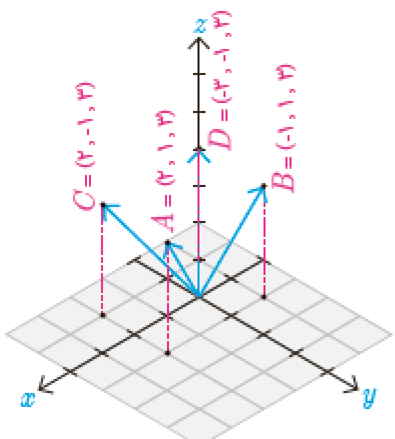
$\vec{i}(1,0,0)$ $\vec{j}(0,1,0)$ $\vec{k}(0,0,1)$

همچنین هر برداری با مختصات $\vec{a}(x,y,z)$ را می‌توان به صورت $\vec{a} = xi + yj + zk$

مثال:

مثال: اگر $\vec{a} = 2i + 3j + k$ و $\vec{b} = i - j + k$ باشند حاصل $\frac{|\vec{a}-2\vec{b}|}{|\vec{a}+2\vec{b}|}$ را بیابید.

تمرین‌های کتاب صفحه ۷۶

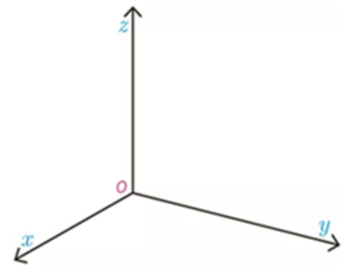


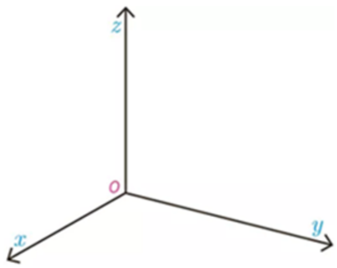
۱ــ چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.

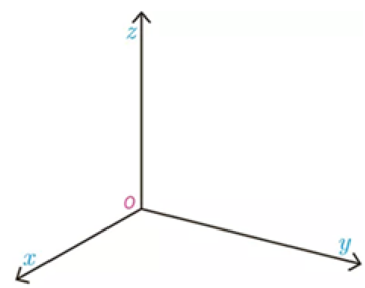
الف) معادلات مشخص‌کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

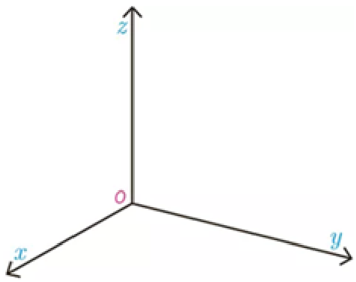
ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم‌مساحت و موازی هستند را بنویسید.

۲ــ نقاط با مختصات $P=(۱,۰,۱)$، $Q=(۰,-۱,-۲)$، $R=(۳,۰,-۱)$ و $S=(-۲,-۲,-۲)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.









۳ــ در سؤال قبل طول پاره‌خط‌های PQ، RQ و PS را بیابید.

۵ــ در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a}=(-\frac{۱}{۳},۰,۲)$ ، $\vec{b}=(\sqrt{۲},۱,۱)$ ، $r=۳$ ، $r\vec{a}-\vec{b}=?$

ب) $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=(۳,۱,-۱)$ ، $r=-۱$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

ج) $\vec{a}=\sqrt{۲}\ \vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=۳\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{a}+\vec{b}=?$

د) $\vec{a}=۵\vec{k}+\vec{j}$ ، $\vec{b}=-\vec{k}+\vec{i}$ ، $r=\frac{۱}{۵}$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

۶ــ طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید.

ضرب داخلی در فضای $\mathbb{R}^3$

اگر $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در فضا باشند ضرب داخی دو بردار به صورت‌های زیر است.

حالت۱: اگر فقط بردار به ما داده_باشد و زاویه نداشته باشد. $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

همواره حواسمان باشد ضرب داخی دو بردار به ما عدد می‌دهد.

حالت ۲: اگر θ زاویه بین دو بردار باشد برای محاسبه ضرب داخی دو بردار از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|}$$ یا $$\vec{a}.\vec{b} = |a||b|\cos\theta$$

حالت ۳: ترکیب حالت ۱ و ۲ به می‌دهد: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |a||b|\cos\theta$

حالت ٤: گاهی اوقات در سوالات از $|a-b|$استفاده میشود باید از فرمول مقابل استفاده کنیم.

$$|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\theta$$

چند نکته مهم:

الف: اگر دو بردار بر هم عمود باشند یعنی $\theta = 90°$ باشد از آنجایی که $\cos 90° = 0$ است پس $a.b = 0$ است.

ب: اگر دو بردار باهم موازی باشند یعنی $\theta = 0°$ باشد از آنجایی که $\cos 0° = 1$ است پس $a.b = |a||b|$ است وبیشینه است.

پ: اگر یکی از دو بردار a یا b صفر باشند حتما $a.b = 0$ است و لی برعکس نمی‌توان نتیجه گرفت.

مثال: حاصلضرب دو بردار $\vec{a}(2,1,3)$ و $\vec{b}(5,3,n)$ برابر ۷ است. مقدار n را بیابید.

مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ زاویه ۳۰ درجه باهم بسازند و $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ و $\vec{b}(2,-2,4)$ باشد حاصلضرب داخلی دو بردار را بیابید.

مثال: اگر $\vec{a} = 2i - j + 2k$ و $\vec{b} = i - j$ باشند زاویه بین دو بردار را بیابید.

مثال: اگر اندازه دو بردار $\vec{a} = 2i + (a+1)j + 4k$ و $\vec{b} = ai + 4j + 3k$ برابر باشند کسینوس زاویه بین دو بردار را بیابید.

مثال: اگر $\vec{a} = 2i + 3j + k$ و $\vec{b} = i - j + k$ باشند کسینوس زاویه بین دو بردارهای زیر را بیابید.

الف: $2b$ و $a-b$

ب: بردار $3i$ و بردار $2a-3k$

یادآوری نسبت‌های مثلثاتی حسابان ۱:

الف: اگر α و β دو زاویه مکمل هم باشند. $\sin\alpha = \sin\beta$

ب: اگر α و β دو زاویه مکمل هم باشند. $\cos\alpha = \cos\beta$

مثال:

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}(1,m,0)$ و $\vec{b}(0,-1,-1)$ برابر ۱۲۰ درجه است. مقدار m را بیابید.

خواص مهم ضرب داخلی دو بردار:

الف: ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابه‌جایی دارد. یعنی $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

ب: $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$

پ: ضرب داخلی نسبت به جمع خاصیت پخش‌پذیری دارد. $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

ت: برای هر دوبردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم: $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ عمود است اگر وتنها اگر $\vec{a}.\vec{b} = 0$

اثبات:

ث: $\vec{a}.\vec{o} = \vec{o}.\vec{a} = 0$

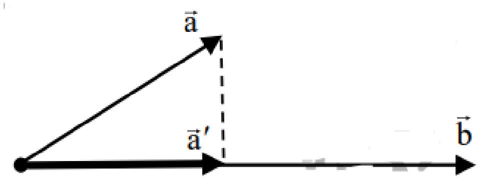
ج: نامساوی کشی شوارتز: $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

چ: می‌دانیم بردارهای یکه i و j و k نیز بر هم عمود می‌باشند پس همواره داریم:

$$i,j = i,k = j,k = k,i = 0$$

$$\vec{i},\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1 \qquad \text{و} \qquad \vec{j},\vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1 \qquad \text{و} \qquad \vec{k},\vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$$

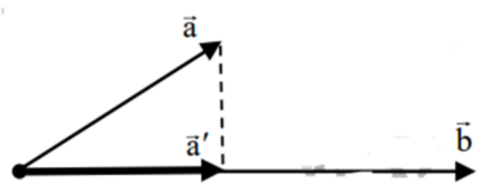
تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$



تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ را با a' نمایش می‌دهند یعنی بردار $\vec{a}'$ با $\vec{b}$ هم راستا می‌شود.

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \times \vec{b}$$

قضیه تصویر قائم: نشان دهید تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ برابر $\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \times \vec{b}$ است.



مثال: تصویر قائم $\vec{a}(4,1,-2)$ را بر $\vec{a}(2,-3,1)$ بیابید.

مثال: اگر $\vec{a}(1,0,-1)$ و $\vec{b}(2,1,1)$ باشند تصویر قائم:

الف: $\vec{a}$ بر $\vec{b}+\vec{i}$

ب: $\vec{b}$ بر $2\vec{a}-3\vec{k}$

مثال: دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با معلومات $|\vec{a}|=5$ و $|\vec{b}|=7$ و $\vec{a}-\vec{b}=2i+j-3k$ مفروضند. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر روی $\vec{a}$ چند برابر بردار $\vec{a}$ است؟

ضرب خارجی ۲ بردار

فرض کنید $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند. ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش داده‌می‌شوند برداری است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

نکته: ضرب خارجی دو بردار همواره به ما بردار می‌دهد .

اگر زاویه بین دو بردار هم بخواهیم از طریق ضرب خارجی به دست آوریم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\theta \qquad \text{یا} \qquad sin\theta=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

مثال: اگر $\vec{a}(-2,-1,3)$ و $\vec{b}(2,1,4)$ دو بردار باشند ضرب خارجی دو بردار را بیابید.

ب: سینوس زاویه بین دو بردار را بیابید.

مثال: اگر $\vec{a}(1,-2,3)$ و $\vec{b}(2,1,0)$ دو بردار باشند مطلوب است محاسبه $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

نکته: از قبل می دانیم مساحت متوازی الاضلاعی که دوضلع مجاور آن a و b و زاویه بین این دو بردار θ باشد، برابر $absin\theta$ است پس میتوان یا همان اندازه ضرب خارجی را مساحت متوازی الاضلاع فوق دانست.

$$S_{\text{متوازی الاضلاع}} = |a\times b| = |a||b|sin\theta$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}|a\times b| = \frac{1}{2}|a||b|sin\theta$$

ضرب خارجی بردارهای یکه:

$\vec{i}\times\vec{j} =$ $\qquad$ $\vec{j}\times\vec{i} =$

$\vec{i}\times\vec{k} =$ $\qquad$ $\vec{k}\times\vec{i} =$

$\vec{j}\times\vec{k} =$ $\qquad$ $\vec{k}\times\vec{j} =$

چند نکته مهم:

الف: اگر دو بردار بر هم عمود باشند یعنی $\theta = 90°$ باشد از آنجایی که $sin90° = 1$ است پس $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ است و بیشینه است.

ب: اگر دو بردار باهم موازی باشند یعنی $\theta = 0°$ باشد از آنجایی که $sin0° = 0$ است پس $\vec{a}\times\vec{b} = 0$ است

پ: اگر یکی از دو بردار a یا b صفر باشند حتما $a\times b = 0$ است و لی برعکس نمی‌توان نتیجه گرفت.

طبق نکات بالا چون هر بردار یکه با خودش موازی است پس $\theta = 0$ است در نتیجه $sin\theta = 0$ است پس می‌توان طبق فرمول نتیجه گرفت :

$$\vec{k} \times \vec{k} = 0 \qquad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \qquad \vec{i} \times \vec{i} = 0$$

مثال: اگر $\vec{a} = 2i + j$ و $\vec{b}(2, 0, -3)$ و $\vec{c} = 4k - j$ سه بردار مفروض باشند مطلوب است:

الف: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$ را بیابید.

ب: اندازه تصویر هر بردار را روی محور xها محاسبه کنید.

نکته:

پ: ضرب خارجی و داخلی بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ در $\vec{c}$ را بیابید.

چند سوال نهایی:

۱- تصویر بردار i بر بردار j را بیابید.

۲- نشان دهید اگر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ بر هم عمود باشند تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می‌شود.

۳- نشان دهید اگر دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ است.

٤- اگر $\vec{a}(2,-1,3)$ و بردار b به طول $\sqrt{56}$ موازی و غیر هم جهت با بردار a باشد، مجموع مولفه های بردار b کدام است؟

۵- مساحت متوازی الاضلاعی با رئوس متوالی $P(1,3,-2)$ و $Q(2,1,4)$ و $R(-3,1,4)$ را بیابید.

۶- مساحت مثلثی با رئوس $A(-1,2,0)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(0,-1,1)$ را بیابید.

مثال: بردار $\vec{a}(4,-4,2)$ مفروض است.و بردار $\vec{b}$ غیرهم‌جهت با $\vec{a}$ و به طول ۱۲ را طوری بیابید که $a \times b = 0$ باشد.

خواص ضرب خارجی

الف: اگر $\vec{b}$ و $\vec{a}$ دو بردار باشند همواره داریم: $b.(a \times b) = 0$ $a.(a \times b) = 0$

اثبات:

ب: ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

پ: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

ت: اگر r عددی حقیقی باشد آنگاه $r\vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r\vec{b}$

ث: برای سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ همواره داریم:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

ت: برای هر دوبردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داریم: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باهم موازی هستند اگر وتنها اگر $\vec{a}\times\vec{b}=0$

اثبات:

نکته بسیار مهم: شرط اینکه سه بردار $\vec{c}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}$ در یک صفحه باشند این است که:

$c.(a\times b)=0$ یا $b.(a\times c)=0$ یا $a.(b\times c)=0$

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}(1,m,-11)$ و $\vec{b}(2,3,-1)$ و $\vec{c}(1,-1,3)$ در یک صفحه باشند.

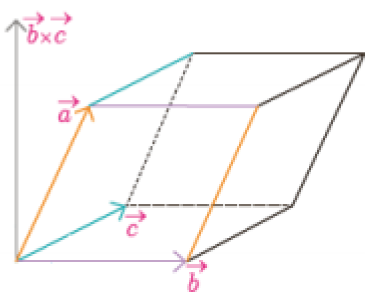
نکته بسیار بسیارمهم: اگر در سوالی گفت برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ بیابید یعنی باید این دو بردار ضرب خارجی کنیم.

مثال: برداری بیابید که بر دو بردار $\vec{a}(1,2,-3)$ و $b(4,0,2)$ عمود باشد.

مثال: سینوس بین بردارهای $\vec{v} = -3i - 2j + 4k$ و $\vec{u} = 2i + j - k$ را بیابید.

حجم متوازی‌السطوح:

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار غیرواقع در یک صفحه باشند، آنگاه میتوان به کمک آنها یک متوازی السطوح ساخت که حجم آن از رابطه $V = |a, (b \times c)|$ نیز به دست می‌آید.



نکته۱: $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی هستند که بر سه یال متوازی‌السطوح منطبق می‌باشند.

نکته۲: حواسمان باشد باید حجم متوازی‌السطوح باید به ما عدد بدهد و مثبت باید باشد.

یادآوری: شرط اینکه ۳ بردار در یک صفحه باشند این است که $a, (b \times c)$ برابر صفر باشد.

نکته ۳مهم: همانطور که می‌دانیم :

$$V_{\text{متوازی‌السطوح}} = S_{\text{قاعده}} \times h \xrightarrow{S_{\text{قاعده}}=b\times c} h = \frac{V_{\text{متوازی‌السطوح}}}{S_{\text{قاعده}}} \xrightarrow{S_{\text{قاعده}}=b\times c} h = \frac{|a, (b \times c)|}{|(b \times c)|}$$

مثال: سه بردار $\vec{a} = i - j + 2k$ و $\vec{b} = i + k$ و $\vec{c} = 2i + j - k$ مفروضند. حجم متوازی‌السطوحی که توسط این سه بردار ساخته می‌شود را بیابید.

مثال: سه بردار $\vec{a}(2,0,-3)$ و $\vec{b}(2,0,-3)$ و $\vec{c}(2,0,-3)$ در صفحه مفروضند.

الف: برداری عمود بر $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ بیابید.

ب: حجم متوازی‌السطوحی که با این سه بردار ساخته می‌شود را بیابید.

پ: ارتفاع این متوازی‌السطوح را بیابید.

مثال: بردارهای $\vec{a}=i+j$ و $\vec{b}(0,1,1)$ و $\vec{c}=i+k$ بر سه یال متوازی‌السطوح منطبق می‌باشند. اگر قائده متوازی‌السطوح توسط بردارهای b و c ساخته شده‌باشد ارتفاع وارد بر این وجه را بیابید.

رابطه بین ضرب خارجی و داخلی:

می‌دانیم در ضرب داخلی از $cos\theta$ استفاده میکنیم و در ضرب خارجی از $\sin\theta$ استفاده می کنیم. پس برای تبدیل می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد.

$$Sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \Bigg\{$$

اتحاد لاگرانژ: در تست‌ها می‌توان از اتحاد مقابل هم استفاده کرد ولی در امتحان نهایی میتوان اثبات کرد.

$$\left|\vec{a}.\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2$$

اثبات:

مثال: بردارهای a و b مفروضند. اگر $|\vec{a}| = 2$ و $\left|\vec{b}\right| = 15$ و $\vec{a}.\vec{b} = -24$ باشد مقدار $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ را بیابید.

مثال: بردارهای a و b مفروضند. اگر $|\vec{a}| = 3$ و $\left|\vec{b}\right| = 26$ و $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 72$ باشد مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را بیابید.

تمرین‌های کتاب صفحه ۸٤

۱ــ برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به‌دست آورید.

الف) $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ ، $\vec{b}=i$ ب) $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ ، $\vec{b}=(۳,۲,۱)$

ج) $\vec{a}=(۱,۱,۰)$ ، $\vec{b}=(-۱,۲,۴)$

۲ــ فرض کنید $\vec{\ }$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول‌های ۱و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$. مقدار $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=۰$ را محاسبه کنید.

۳ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$.

۴ــ اگر $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$, $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم a بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

۵ــ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (۱,-۳,۲)$, $\vec{b} = (-۲,۱,-۵)$ پیدا کنید.

۶ــ سه بردار $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷ــ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\vec{a}| = ۳$، $|\vec{b}| = ۲۶$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=۷۲$.
مقدار $a.b$ را محاسبه کنید.

۸ــ مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A = (۳,۵,۷)$, $b = (۵,۵,۰)$, $A = (-۴,۰,۴)$
داده شده است را بیابید.