

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

ماتریس

آرایی از اعداد که بصورت مستطیلی یا مربعی نوشته می شود ماتریس نام دارد. هر ماتریس شامل سطروستون می باشد. سطر را با i وستون را با j نمایش می دهیم. اگر تعداد سطرها m و تعداد ستونها n باشد در این صورت مرتبه ماتریس $m \times n$ میباشد.

مثال: درایه های ماتریس $A = [i + 2j]$ که مرتبه آن 3×2 باشد را بدست آورید.

$$\text{مثال: ماتریس } A = [a_{ij}] \text{ که در آن } A = \begin{cases} i + j & i > j \\ i - j & i < j \\ 2i & i = j \end{cases} \text{ باشد را تشکیل دهید. (مرتبه ماتریس } 3 \times 3)$$

انواع ماتریس:

۱. ماتریس مربع: اگر تعداد سطرها و تعداد ستونهای ماتریس برابر باشد ماتریس مربعی است.

۲. ماتریس قطری: اگر در ماتریس مربعی درایه های غیر قطر اصلی صفر باشد ماتریس قطری است

۳. ماتریس اسکالر: اگر در ماتریس قطری درایه های قطر اصلی با هم برابر باشد ماتریس اسکالر است

۴. ماتریس واحد: اگر در ماتریس اسکالر درایه های روی قطر اصلی یک باشد واحد است $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ماتریسهای مساوی:

دو ماتریس A و B را مساوی یکدیگر می گوئیم اگر ۱. هم مرتبه باشند ۲. درایه های متناظر مساوی باشند

$$\text{مثال: اگر دو ماتریس } A = \begin{bmatrix} X + 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 3 & y - 2 \\ z + 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ مساوی باشند حاصل}$$

$X + Y + Z$ را بدست آورید

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2X - Y & 5 \\ Z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=A$ در این صورت حاصل $X+Y+Z$ را بیابید

جمع ماتریسها

جمع دو ماتریس در صورتی امکان پذیر است که هم مرتبه باشند. برای جمع کردن دو ماتریس درایه های متناظر را با هم جمع می کنیم.

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه های ماتریس ضرب می کنیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ و $r=2$ و $s=-5$ باشد مطلوبست ماتریس $SB - rA$

قرینه ماتریس

قرینه ماتریس A را با نماد $-A$ نشان می دهیم و از ضرب ماتریس A در عدد (-1) بدست می آید

در این صورت $A+(-A)=0$

خواص مهم جمع ماتریسها و ضرب عدد در ماتریس

$$A+B=B+A$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

$$A+0=0+A=A$$

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

$$r(A \pm B) = rA \pm rB$$

ضرب ماتریسها

ضرب دو ماتریس A و B در صورتی امکان پذیر است (AXB) که تعداد ستونهای ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد.

نکته: اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد در این صورت ماتریس AXB تعریف شده است و حاصل ماتریسی از مرتبه $m \times n$ است.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ باشند مطلوبست ماتریس AXB

مثال: در مثال قبل آیا BXA امکان پذیر است؟ چرا؟

مثال: اگر A ماتریسی 5×3 باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که AXB و BXA قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید.

1) $B = [bij] \quad 3 \times 2$

2) $B = [bij] \quad 5 \times 3$

ویژگیهای ضرب ماتریسها

1) $AXB \neq BXA$

2) $AXI = IXA = A$

3) $AX(B+C) = (AXB) + (AXC)$

4) $AX(BXC) = (AXB)XC$

5) $(A+I)^2 = A^2 + A + I$

6) $(I)^n = I$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بدست آورید که حاصل ضرب AXB ماتریسی قطری باشد.

ماتریسهای تعویض پذیر: اگر ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابجایی داشته باشند تعویض پذیر هستند.

مثال: اگر A و B ماتریسهای 3×3 و تعویض پذیر باشند ثابت کنید:

1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: اگر ضرب ماتریسهای $A = \begin{bmatrix} X & Y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند $x+y$ را بیابید.

نکته

تست: اگر $A = [i + 2j] \times 3 \times 3$ و $B = [i2 - j] \times 3 \times 3$ باشد، درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس $2A+B$ کدام است.

۱۱(۱) ۹(۲) ۱۰(۳) ۱۲(۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه درایه واقع در سطر اول، ستون دوم A^2 کدام است.

۱۰(۱) ۱۵(۲) ۴۲(۳) ۰(۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $A^2 = mA + nI$ باشد، $m+n$ کدام است.

۰(۲) -۵(۱) -۹(۳) ۱۰(۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

تست: اگر ماتریسهای $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند $x+y$ کدام است.

- ۰(۱) -۱(۲) ۱(۳) ۳(۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد حاصل A^{1393} برابر است با:

- ۱(۱) $2^{696}I$ (۲) A (۳) $2^{696}A$ (۴)

تست: اگر A ماتریسی مربعی و $A(A+I) = -I$ باشد، آنگاه حاصل A^{200} کدام است.

- ۱(۱) A (۲) A^2 (۳) 0 (۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، A^{63} کدام است.

- $\begin{bmatrix} 64 & 63 \\ 63 & 62 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 64 & 63 \\ -63 & -62 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 64 & -63 \\ 63 & -62 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 64 & 63 \\ 63 & -62 \end{bmatrix}$ (۱)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

تست: اگر A یک ماتریس باشد به طوری که $A^2 = A + I$ ، ماتریس A^4 کدام است.

$2A + 3I$ (۴) $3A^2 + 4I$ (۳) $A^2 + I$ (۲) $3A + 2I$ (۱)

تست: اگر $A + B = 5I$ باشد، حاصل $A^2 + 5B + AB$ کدام است.

$15I$ (۴) $25I$ (۳) $10I$ (۲) $5I$ (۱)

تست: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 2X \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ عدد غیر صفر X کدام است.

$\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۱)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

دترمینان ماتریس

به هر ماتریس مربعی مانند A می توان یک عدد حقیقی نسبت داد که به این عدد حقیقی دترمینان ماتریس A می گوئیم و با نماد $|A|$ نمایش می دهیم.

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×2 باشد در اینصورت $|A| = ad - bc$

نکته: دترمینان ماتریس می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $|A + B| + 2|AB|$ کدام است.

ماتریس کهاد:

مثال: ماتریس مربعی $A = [i + 2j]_{3 \times 3}$ مفروض است. ماتریسهای کهاد سطر دوم، ستون سوم و سطر اول، ستون دوم را بیابید.

همسازه

مثال: در مثال قبل همسازه سطر دوم، ستون سوم را بدست آورید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

دترمینان ماتریس 3×3 به روش بسط دادن

در این روش با انتخاب یک سطر یا ستون دلخواه، هر درایه را در همسازیه نظیر همان درایه ضرب کرده و حاصل را با یکدیگر جمع می‌کنیم.

مثال: دترمینان ماتریس 3×3 $A = [i - 3j]$ را به روش بسط دادن بدست آورید.

دترمینان ماتریس 3×3 به روش ساروس

در این روش یا سطرهای اول و دوم را زیر سطر سوم تکرار می‌کنیم و یا ستونهای اول و دوم را بعد از ستون سوم تکرار می‌کنیم و سپس به صورت زیر تکرار می‌کنیم.

مثال: به روش ساروس دترمینان ماتریس 3×3 $A = [3i + 2j]$ را بدست آورید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: در دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & a \end{vmatrix}$ اگر به درایه سطر سوم و ستون سوم، ۵ واحد اضافه کنیم حاصل دترمینان چه تغییری می کند.

مثال: در دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ اگر با تغییر درایه سطر سوم، ستون اول حاصل دترمینان تغییر نکند، مقدار a کدام است.

تست: به ازای کدام مقدار k ، معادله $\begin{vmatrix} x & 0 & k \\ 1 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ فقط یک ریشه دارد.

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ۲

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A| \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ کدام است.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

ویژگیهای دترمینان

AminParvah

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

تست: اگر به درایه سطر اول ستون سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ سه واحد اضافه کنیم آن گاه به

مقدار دترمینان A چقدر اضافه می شود؟

- ۳(۱) -۳(۲) ۶(۳) -۶(۴)

تست: اگر $|A| = 2$ و A ماتریسی از مرتبه ۳ باشد حاصل $|-2A|$ کدام است.

- ۴(۱) ۴(۲) ۱۶(۳) -۱۶(۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $|-3A|$ کدام است.

- ۲۴(۱) -۲۴(۲) ۲۱۶(۳) -۲۱۶(۴)

تست: مقادیر X از رابطه $\begin{vmatrix} 0 & X-3 & X-2 \\ X+3 & 0 & -4 \\ X+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

- ۱-۶(۱) -۱-۶(۲) ۱-۶(۳) ۱-۶(۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

وارون ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A را با نماد A^{-1} نمایش می دهیم بطوریکه $AA^{-1}=I$

نکته: ضرب هر ماتریس در وارون آن خاصیت جابجایی دارد.

مثال: نشان دهید دو ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگر هستند.

نکته: اگر A یک ماتریس وارون پذیر باشد در این صورت $|A| \neq 0$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{bmatrix}$ یک ماتریس وارون پذیر باشد حدود a کدام است؟

مثال: به ازای کدام مقدار a ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست؟

ویژگیهای ماتریس وارون:

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ دترمینان $(A^{-1})^2$ کدام است.

مثال: اگر $A^3 = 2I$ باشد وارون ماتریس A^{-1} را بدست آورید.

مثال: اگر $A^3 + A^2 - 2I = 0$ باشد آن گاه وارون ماتریس A را بدست آورید.

مثال: اگر $A^3 = 9I$ باشد وارون ماتریس $A - 2I$ را بدست آورید.

تست: اگر $|A| \neq 0$ و $A^3 = 2A$ آن گاه وارون $I - A$ کدام است؟

A^{-1} (۱) $A + I$ (۲) $-I - A$ (۳) A (۴)

تست: اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند و $A + B = AB$ آن گاه $A^{-1} + B^{-1}$ کدام است؟

AB (۱) $A + B$ (۲) I (۳) O (۴)

مثال) وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس $A^{-1} + A^2$ را بدست آورید.

حل دستگاه دو معادله، دو مجهول به کمک ماتریس وارون:

برای حل دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ به روش ماتریس وارون به صورت زیر عمل می کنیم

مثال: دستگاه معادلات زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \quad (2)$$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید

۱) هر یک از این معادلات، معادله یک خط در صفحه می باشد. شیب هر یک از این دو خط را معلوم کنید. آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲) ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید. آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ چرا؟

مثال: دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و ماتریس $\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با ماتریس وارون بدست آورید.

مثال: به ازای چه مقداری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ جواب منحصر بفرد دارد.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

*بحث در وجود ریشه های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} (m-3)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار m فاقد جواب است؟

مثال: در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب مجهولات به صورت

است $x+y$ کدام است. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$4(4)$ $2(3)$ $-2(2)$ $-4(1)$

مثال: اگر A وارون پذیر و $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه های ماتریس X را بدست آورید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: اگر دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ دارای جواب نباشد مقدار m کدام است؟

مثال: اگر دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} 1 & m \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$ دارای بی شمار جواب باشد مقادیر m و n را بدست آورید.

مثال: اگر جواب x از دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - y = 1 \\ bx + 2y = 3 \end{cases}$ برابر $5, 2$ باشد مقدار $2a+b$ را بدست آورید.

تست: اگر در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 3 \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $x+y$ کدام است؟

- ۸(۱) ۱۲(۲) ۹(۳) ۶(۴)

تست: در دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2x \end{bmatrix}$ حاصل $x+2y$ کدام است؟

- ۸(۱) ۰(۲) -۸(۳) -۴(۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثالها و تستهای تکمیلی

۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد آن گاه معکوس ماتریس A^3 کدام است؟

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (۱)
 $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (۲)
 $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ (۳)
 $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (۴)

۲. اگر $A^{-1} = 3A^2$ و A ماتریسی 3×3 باشد در این صورت $|A|$ کدام است؟

3 (۱)
 $\frac{1}{3}$ (۲)
 -3 (۳)
 $-\frac{1}{3}$ (۴)

۳. اگر به تمام درایه های ستون دوم ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{bmatrix}$ یک واحد اضافه شود به دترمینان ماتریس اولیه کدام عدد اضافه می شود؟

-3 (۱)
 -2 (۲)
 3 (۳)
 6 (۴)

۴. اگر دو ماتریس A و $I-A$ وارون هم باشند ماتریس A^4 کدام است؟

A (۱)
 $-A$ (۲)
 I (۳)
 $-I$ (۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۵. اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} x-y & 3 \\ 1-x & z \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ x+y & z \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $x+y$ کدام است.

- ۱(۱) $-۱(۲)$ $۵(۳)$ $-۵(۴)$

۶. ماتریس A دارای $m-2$ سطر و m ستون است. اگر A ماتریسی سطری باشد، کامیک از ماتریسهای زیر قطری است.

$$(۱) \begin{bmatrix} m-3 & 1-m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(۲) \begin{bmatrix} 1 & m \\ 2m-6 & m \end{bmatrix}$$

$$(۳) \begin{bmatrix} m & 1-m \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(۴) \begin{bmatrix} 0 & m-3 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

۷. ماتریسهای $A = \begin{bmatrix} a & b-2 \\ 2c & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 3b \\ -c+4 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر ماتریس $A+B$ ماتریسی اسکالر باشد، مقدار $a+2b-c$ کدام است.

- ۱۱(۱) $۸(۲)$ $۳(۳)$ $۰(۴)$

۸. اگر $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های $A = f(0) + f(\pi) + f(2\pi)$ کدام است.

- ۰(۱) $۲(۲)$ $-۲(۳)$ $۴(۴)$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه $B.A$ کدام است.

(۱) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & -12 \\ -6 & 3 & -9 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & -12 \\ -6 & 3 & -9 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & -12 \\ -6 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ (۴) قابل محاسبه نیست.

۱۰. در ماتریس $A = [2i + 3j - 1]$ درایه سطر اول و ستون آخر، $\frac{4}{3}$ برابر درایه سطر آخر و ستون اول است. این ماتریس مربعی چند سطر دارد.

(۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های ماتریس A^6 کدام است.

(۱) ۶۴ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۵۶ (۴) ۵۱۲

۱۲. اگر $A = 3B^2 - 2B + I$ ، حاصل $(A+B)^2 - (A-B)^2$ کدام است.

(۱) $2BA$ (۲) $2(A+B)$ (۳) $4AB$ (۴) $4(A+B)$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۱۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2X & 1 \\ -1 & Y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $A.B$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه های $A.B$ کدام است.

- (۱) -۷ (۲) ۰ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۴. اگر $A(A-I)=0$ ، حاصل $(A+I)^4$ کدام است.

- (۱) $A+I$ (۲) $12A+I$ (۳) $16I$ (۴) $15A+I$

۱۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $(A-B)^2=A^2+B^2$ ، کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $AB=0$ (۲) $AB=BA$ (۳) $BA=0$ (۴) $AB=-BA$

۱۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های ماتریس X در دستگاه $AX=B$ ، کدام است.

- (۱) ۶ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۰

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۱۷. اگر دو ماتریس $A+I$ و $2A$ وارون هم باشند، ماتریس A^4 کدام است.

$$\frac{3I}{4}(۱) \quad 2A + \frac{3I}{4}(۲) \quad -2A + \frac{3I}{4}(۳) \quad 2A - \frac{3I}{4}(۴)$$

۱۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ و ماتریس $A - mI$ وارون پذیر نباشد، مقادیر m کدام است.

$$۳ و ۴(۱) \quad ۱ و ۶(۲) \quad ۲ و ۴(۳) \quad ۲ و ۶(۴)$$

۱۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ ، B ماتریسی وارون پذیر باشد و $A+B=8AB$ ، مجموع درایه های ماتریس B^{-1} کدام است.

$$۱۰(۱) \quad ۱۲(۲) \quad ۱۴(۳) \quad ۱۵(۴)$$

۲۰. اگر دستگاه $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = m^2 \end{cases}$ فاقد جواب باشد، مقادیر قابل قبول برای m کدام است.

$$-۱(۱) \quad ۲(۲) \quad ۱ و ۲(۳) \quad -۱ و ۲(۴)$$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۲۱. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $2(A+I)^{-1}$ کدام است.

(۱) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

۲۲. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + (b-1)y = 2 \\ (a+2)x + 2by = 3 \end{cases}$ بی شمار جواب داشته باشد، مقدار $a-b$ کدام است.

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۷ (۴) -۷

۲۳. مجموعه جواب معادله $\begin{vmatrix} 0 & x-4 & x-3 \\ x+2 & 0 & -2 \\ x+1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است.

(۱) ۱ و ۴ (۲) ۲ و ۳ (۳) ۲ و ۵ (۴) ۳ و ۶

۲۴. اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ -1 & |A| \end{bmatrix}$ و $|A| > 1$ ، آنگاه حاصل $|A-I|$ کدام است.

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۲۵. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد دو تایی مرتب (α, β) کدام است.

- (۱) $(2, 1)$ (۲) $(3, 2)$ (۳) $(1, 4)$ (۴) $(3, 4)$

۲۶. اگر $A^2 = 4A - 3I$ و $A^{-1} = MA + NI$ باشد، حاصل $M + N$ کدام است.

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۲۷. اگر $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $|A|A^2$ چقدر است.

- (۱) 4 (۲) 2 (۳) 16 (۴) 8

۲۸. اگر $A^2 = A + 2I$ باشد، وارون ماتریس A کدام است.

- (۱) $A - \frac{I}{2}$ (۲) $\frac{A - I}{2}$ (۳) $\frac{A}{2} - I$ (۴) $I + \frac{A}{3}$

۲۹. اگر A ماتریسی 2×2 و غیر صفر باشد به طوری که $A^2 = A$ و $I + \lambda A$ وارون ماتریس

$-3A$ باشد، آن گاه λ کدام است.

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۳۰. اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -11 & -16 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $a+b+c+d$ کدام است.

۰(۱) $\quad ۲(۲) \quad -۱(۳) \quad -۲(۴)$

۳۱. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ 20x + by = 5 \end{cases}$ بی شمار جواب داشته باشد، کدام دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

$\begin{cases} 15x - 4y = 1 \\ bx + ay = 3 \end{cases}$ (۱)

$\begin{cases} ax - 15y = 1 \\ 4x + by = 5 \end{cases}$ (۲)

$\begin{cases} ax + 15y = 5 \\ bx + ay = 3 \end{cases}$ (۳)

$\begin{cases} ax + by = 2 \\ 3ax + 3by = 5 \end{cases}$ (۴)

۳۲. اگر $A = [i - 2j]_{2 \times 2}$ ، $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i + j^2 & i \geq j \\ j - i & i < j \end{cases}$ ، آنگاه مقدار

$\frac{a_{11}b_{21}}{a_{23}} - b_{12}a_{21}$ کدام است.

$\frac{-4}{3}$ (۴)

$\frac{-3}{4}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

۳۳. اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشد، با چه شرطی ماتریس AB^2 تعریف می شود.

$n=p=q$ (۴)

$m=n=p$ (۳)

$m=n=p$ (۲)

$m=p=q$ (۱)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۳۴. به ازای کدام مقدار k معادله $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 2 & x+2 & 0 \\ k & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ دارای یک ریشه مضاعف است.

۰(۱) ۱(۲) ۲(۳) ۳(۴)

۳۵. اگر A و B دو ماتریس 3×3 باشند، آنگاه حاصل $||B|A| + ||A|B|$ همواره برابر کدام است.

$|B^2| + |A^2|$ (۱) $|AB^3| + |A^3B|$ (۲) $|A^3B^3|$ (۳) $|AB| + |BA|$ (۴)

۳۶. اگر $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $|A|$ کدام است.

-۱(۱) ۱(۲) -۶(۳) ۶(۴)

۳۷. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} (A - \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $|A|$ کدام است.

-۹(۱) ۹(۲) ۳(۳) -۳(۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۳۸. اگر $|A|=1$ و $|I+A|=3$ باشد، آنگاه $|A^{-1}+I|$ کدام است.

- ۱) 3 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۹. به ازای چند مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} (2m+1)x - my = 1 \\ -7mx + (m+6)y = -m \end{cases}$ بی شمار جواب دارد.

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

۴۰. اگر $(A-2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های ستون دوم ماتریس $A(A-2I)^{-1}$ کدام است.

- ۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۵ ۴) ۱۶

۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه A^{10} کدام است.

- ۱) $-I$ ۲) $-A$ ۳) A ۴) A^2

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۴۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ از رابطه ماتریسی $AX = A - 2I$ ماتریس X کدام است.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (۱)

تست: اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 4$ آنگاه دترمینان ماتریس A . $|A|$ کدام است.

۲۵۶ (۴) ۱۲۸ (۳) ۹۶ (۲) ۶۴ (۱)

سوالات امتحان نهایی

۰/۱۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس می‌نامیم. ب) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d, d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد. ب) صفحه‌ای با مولد سطح مخروط دولری، موازی است و از راس آن عبور نمی‌کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است. پ) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم A^3 برابر ۵ می‌باشد. ت) اگر $A^4 = A$ باشد در این صورت داریم: $(A+I)^2 = I+2A$
۱/۲۵	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A - 3I$ را به دست آورید.
۰/۷۵	اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $ A = -2$ حاصل $ A \cdot A $ را بیابید.
۱/۵	اگر ضرب ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد حاصل $\begin{bmatrix} 2 & y \\ x & -x \end{bmatrix} [x \ 2 \ -y]$ را بیابید.
۱	دستگاه $\begin{cases} (m-2)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$ به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.

۱/۷۵	دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $ A + B $ را محاسبه کنید.
۱/۲۵	الف) اگر $A = \begin{bmatrix} A & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $ A $ را بیابید. ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.
۱/۲۵	در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ x]$ مقدار x را بیابید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $ A^3 $ را محاسبه کنید.
۱/۲۵	در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ مقدار x را بیابید.
۱/۲۵	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.
۱	در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.
۱/۵	اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.
۰/۷۵	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $ A \neq 0$ ، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد. ب) در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود. پ) برای بردار غیر صفر \vec{a} در \mathbb{R}^3 داریم: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
۱/۲۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.
۲	اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، الف) حاصل ماتریس $A \times B$ را به دست آورید. ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید.
۰/۷۵	مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.
۱/۵	دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۱/۲۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس BA^T را به دست آورید.
۱/۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7 را به دست آورید.
۱/۲۵	اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^2 - B = \bar{O}$ (\bar{O} ماتریس صفر است)
۱/۲۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

در سنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مقاطع مخروطی

رویه مخروطی: فرض کنید دو خط d و l در نقطه A متقاطع (غیر عمود) باشند سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را سطح مخروطی می نامیم. در این حالت خط l را محور تقارن، نقطه A را راس و خط d را مولد می نامیم

فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی

۱. اگر صفحه p بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس عبور نکند شکل حاصل دایره است.
۲. در حالتی که صفحه p بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل بیضی است.
۳. اگر صفحه p با مولد d موازی باشد و از راس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک سهمی است.
۴. اگر صفحه p به گونه ای باشد که هر دو تکه سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک هذلولی است.

تعریف مکان هندسی:

مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا که دارای ویژگی مشترک باشند و هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

چند مکان هندسی مهم در صفحه (فضا)

۱. مکان هندسی نقاطی در صفحه که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله باشند خط عمود منصف AB است. (مکان هندسی در فضا صفحه عمود منصف AB است)
۲. مکان هندسی نقاطی در صفحه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشند، نیم ساز آن زاویه است.
۳. مکان هندسی نقاطی در صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت K باشند، دایره ای به مرکز O و شعاع K است. (مکان هندسی در فضا کره است)
۴. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k باشند، دو خط موازی d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.

کاربرد مکان هندسی

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

یکی از مهم ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشد، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند.

مثال: دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ باشد

مثال: نقاط A, B, C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ باشد.

مثال: نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ و از d به فاصله ۳ باشد. (بحث کنید)

مثال: صفحه p یک سطح استوانه ای را قطع می کند. در حالت های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید (۴ حالت)

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست: مکان هندسی نقاطی از فضا که از سه راس مثلث ABC به یک فاصله باشند، کدام است.

(۱) دو صفحه موازی (۲) دو خط (۳) ۴ نقطه (۴) یک خط عمود بر ABC

تست: تعداد نقاطی از صفحه که به فاصله ثابت P از نقطه A باشند و از نقاط B و C به یک فاصله باشند، کدام است.

(۱) حداقل یکی (۲) حداکثر یکی (۳) حداکثر دو تا (۴) دقیقا دو

تست: نقطه A در خارج صفحه P است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه P که از A به فاصله L باشد، کدام است.

(۱) یک دایره (۲) یک نقطه (۳) یک نقطه یا یک دایره (۴) نقطه یا دایره یا تهی

تست: خط d به فاصله ۲ از مرکز دایره ای به شعاع ۵ قرار دارد. روی دایره چند نقطه وجود دارد که از d به فاصله ۴ باشد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست: نقطه A و خط d در یک صفحه مفروض اند. در این صفحه چند نقطه وجود دارد به طوری که از A به فاصله معلوم k و از d به فاصله معلوم k' باشند.

(۱) ۴ نقطه (۲) ۲ نقطه (۳) حداکثر ۴ نقطه (۴) حداکثر ۲ نقطه

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست: در مثلث ABC ضلع BC و مساحت مثلث ABC ثابت هستند. مکان هندسی راس A کدام است
(۱) دو خط موازی (۲) سطح یک دایره (۳) دو خط متقاطع (۴) دو خط عمود بر هم

تست: خط d و نقطه A به فاصله 7 از آن موجود است. تعداد نقاطی که به فاصله 10 از A و 3 از d هستند، کدام است.

۴(۱) ۳(۲) ۲(۳) ۱(۴)

تست: نقطه M بین دو صفحه موازی P و P' ، به فاصله 2 از صفحه P و 12 از صفحه P' واقع است. مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله و از نقطه M به فاصله 13 باشند، کدام است.

(۱) دایره ای به شعاع 24 (۲) پاره خطی به طول 10 (۳) دایره ای به شعاع 12 (۴) نقطه

تست: دایره $C(O,R)$ و نقطه ثابت A روی آن مفروضند. مکان هندسی مرکز دایره هایی که از A گذشته و بر دایره C مماس باشند، کدام است؟

(۱) یک دایره (۲) دو خط (۳) یک کمان از دایره (۴) دو نیم خط

درسنامه ،نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

معادله دایره

اگر مرکز دایره $O(\alpha, \beta)$ و شعاع دایره r باشد در این صورت معادله استاندارد دایره برابر است با

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

نکته: دایره به مرکز O و شعاع r را بصورت $C(O, r)$ نمایش می دهیم.

مثال: معادله دایره به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع 2 را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محور های مختصات بدست آورید.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که نقطه $(-1, -2)$ مرکز آن و $M(1, 1)$ یک نقطه آن باشد.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که نقطه $O(1, -1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $3X-4Y+3=0$ مماس باشد.

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که (۰ و ۱) مرکز آن بوده و روی خط به معادله $X+Y=2$ و تری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که خطوط $x-y=3$ و $x+y=1$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که از نقاط (۱ و ۲) و (۰ و ۳) بگذرد و خط $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

معادله ضمنی دایره

اگر معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله ضمنی دایره باشد در این صورت مرکز و شعاع دایره برابر است با:

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

نکته: معادله ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر.....

مثال: مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ را بدست آورید.

مثال: حدود a را طوری بدست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم

مثال: وضعیت نقطه $(3, -2)$ و دایره به معادله $x^2+y^2-x+2y-4=0$ نسبت به یکدیگر مشخص کنید.

نکته: اگر نقطه در بیرون دایره باشد از این نقطه دو مماس با طول مساوی بر دایره رسم می گردد.

تست: طول قطعه مماسی که از نقطه $(2, 1)$ بر دایره $(x-1)^2+y^2=1$ رسم می شود کدام است.

$$\sqrt{3}(4)$$

$$3(3)$$

$$\sqrt{2}(2)$$

$$\sqrt{8}(1)$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست: از نقطه (۱ و ۲) مماسی به طول $2\sqrt{3}$ بر دایره $2x^2+2y^2-4x+2ay+2=0$ رسم کرده ایم. a کدام است.

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

نکته: اگر نقطه روی محیط دایره باشد از این نقطه تنها یک مماس بر دایره رسم می شود
مثال: در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله خط مماس را بدست آورید.

نکته: اگر نقطه در داخل دایره باشد از این نقطه بی شمار وتر می گذرد که.....

مثال: طول وترى که دایره به معادله $x^2+y^2-2x=\frac{19}{5}$ از خط $y=2x$ جدا می کند را بدست آورید.

تست: طول وترى می نیمى که از نقطه (۱- و ۳) در دایره $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ می توان رسم کرد کدام است.

۶(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۳√۲(۱)

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

وضعیت خط و دایره نسبت به هم:

مثال: وضعیت خط $x+y=1$ و دایره $x^2+y^2-2x-2y=2$ نسبت به هم چگونه است.

تست: به ازای کدام مقدار a دایره $x^2+y^2-2x+4y+a=0$ بر خط به معادله $x+3y=0$ مماس است.

$$4(4)$$

$$3(3)$$

$$\frac{5}{2}(2)$$

$$\frac{3}{2}(1)$$

تست: چند نقطه روی خط $x=4$ یافت می شود که از آنها دایره $(x-1)^2+y^2=4$ به زاویه قائمه رویت شود.

$$4(هیچ)$$

$$3(بی شمار)$$

$$2(2)$$

$$1(1)$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

وضعیت دو دایره نسبت به هم

اگر دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروض باشند و فاصله مراکز دو دایره d باشد در اینصورت:

مثال: وضعیت دو دایره $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ و $x^2+y^2=9$ را نسبت به هم بدست آورید.

تست: مقدار k برای آنکه دو دایره $x^2+y^2-2x-2y=k$ و $x^2+y^2-8x-2y+16=0$ بر هم مماس خارج باشند کدام است.

۰(۴

-۱(۳

۱(۲

۲(۱

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره:

تست: طول مماس مشترک دو دایره $x^2+y^2-4x+3=0$ و $x^2+y^2-10x+21=0$ کدام است.

$\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) وتر مشترک دو دایره:

مثال: معادله وتر مشترک و طول وتر مشترک دو دایره $x^2+y^2+2x=0$ و $x^2+y^2+2y=0$ را بدست آورید.

کمترین و بیشترین فاصله یک نقطه تا یک دایره:

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست: کمترین فاصله نقطه $(3, -1)$ از دایره $x^2 + (y+1)^2 = 4x$ کدام است.

۲(۴)

۶(۳)

۳(۲)

۵(۱)

مثال: کمترین و بیشترین فاصله نقطه $M(x, y)$ تا دایره $C(O, R)$ به ترتیب ۴ و ۹ است. طول مماسی که از نقطه M بر دایره C رسم میشود را بدست آورید.

محاسبه کمترین و بیشترین مقدار x, y در معادله دایره

تست: در معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ مقدار ماکزیم y کدام است.

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱۰(۱)

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که ...

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $A(2, 4)$ مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر فاصله آنها از نقطه $B(1, 2)$ باشد

دایره محیطی مثلث:

مثال: نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 1)$ و $C(3, 1)$ رئوس مثلث ABC هستند.

۱. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

۲. معادله مماس بر این دایره را در راس B به دست آورید.

درسنامه ،نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

بیضی:

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت یک مقدار ثابت باشد.

دو نقطه ثابت دو کانون بیضی هستند.

مقدار ثابت را با $2a$ نمایش می دهیم.

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: بیضی با مرکز نقطه $(2, -3)$ را رسم کنید که بیضی در ناحیه دوم بر محورهای مختصات مماس باشد. سپس طول قطر بزرگ، کوچک و فاصله کانونی را بدست آورید.

مثال: در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $\angle FBF'$ چند درجه است.

مثال: نقطه M روی بیضی به قطرهای 6 و 10 واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر 4 است.

۱. نشان دهید مثلث $\angle MFF'$ قائم الزاویه است

۲. طول های MF و MF' را بدست آورید

مثال: ثابت کنید طول وتر کانونی بیضی برابر است با $2b^2/a$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

خروج از مرکز بیضی:

مثال: نسبت قطر های بیضی $\frac{5}{3}$ است. خروج از مرکز را بدست آورید.

مثال: اگر فاصله کانونی یک بیضی را نصف و قطر بزرگ آن را سه برابر نمائیم خروج از مرکز چه تغییری می کند.

تست: اگر نقاط $(۱ و ۴)$ و $(۱ و -۴)$ مختصات دو کانون بیضی و نقطه $(۴ و ۰)$ نقطه ای روی محیط بیضی باشد خروج از مرکز بیضی کدام است.

$$\frac{5}{6}(۴)$$

$$\frac{2}{3}(۳)$$

$$\frac{4}{5}(۲)$$

$$\frac{3}{4}(۱)$$

تست: طول قطر کوچکتر یک بیضی $4\sqrt{2}$ و فاصله کانون تا نزدیکترین راس ۲ واحد است. خروج از مرکز بیضی کدام است.

$$\frac{2}{3}(۴)$$

$$\frac{1}{4}(۳)$$

$$\frac{1}{2}(۲)$$

$$\frac{1}{3}(۱)$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

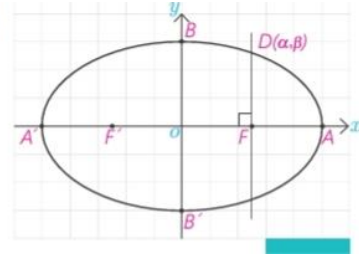
نکته: اگر خط d بر بیضی در نقطه M مماس باشد



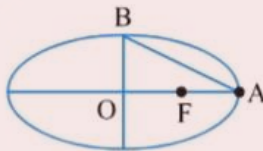
درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

کاردکلاس

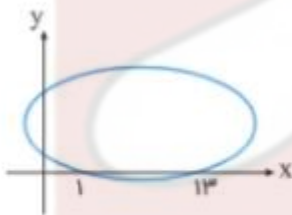
۱- مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر c است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در نقطه D قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید.



در شکل زیر پاره خط‌های $OA = a$ ، $OB = b$ و $OF = c$ به ترتیب نصف قطر بزرگ، نصف قطر کوچک و نصف فاصله کانونی بیضی هستند. اگر $AB = a + c$ ، آنگاه خروج از مرکز بیضی کدام عدد است؟



در شکل زیر، اگر یکی از کانون‌های بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{3} \quad (2) \\ & \frac{2}{3} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \quad (1) \\ & \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (3) \end{aligned}$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

سهمی

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

نقطه ثابت را کانون سهمی و خط ثابت را خط هادی سهمی می گویند.

معادله سهمی :

درسنامه ،نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: معادله سهمی با راس (۲و۱) و کانون (۲و۵) را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.

مثال: مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به راس (۴و۶) و خط هادی $x=9$ را بنویسید.

مثال: معادله سهمی را بنویسید که کانون آن (۱و۲) و خط هادی آن $x=-3$ باشد.

تبدیل معادله سهمی به صورت متعارف:

مثال: معادله $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ را بصورت استاندارد تبدیل کنید و سپس مختصات راس ،کانون و خط هادی را بنویسید.

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات راس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

مثال: سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌های رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

نکته: اگر معادله گسترده سهمی را داشته باشیم می‌توانیم با مشتق‌گیری مختصات راس را بدست آوریم و با فرمول زیر a را بدست آوریم

مثال: مختصات راس و فاصله کانون تا خط هادی سهمی به معادله $x^2-4x+2y-5=0$ را بدست آورید.

نکته: اگر از کانون سهمی خطی عمود بر محور کانونی سهمی رسم کنیم تا سهمی را در دو نقطه A و B قطع کند طول پاره خط AB (وتر کانونی سهمی) برابر است با

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

معادله محور تقارن سهمی:

مثال: معادله محور تقارن سهمی به معادله $5Y^2+2X-4Y+3=0$ را بدست آورید.

وضعیت نقطه و سهمی نسبت به یکدیگر:

مثال: وضعیت نقطه (۲- و ۱) و سهمی به معادله $2Y-3X-4Y^2+1=0$ را بدست آورید.

نکته: اگر نقطه در بیرون سهمی باشد از این نقطه می توان دو مماس بر سهمی رسم نمود. در صورتی که نقطه در بیرون سهمی و روی محور تقارن باشد طول مماسهای رسم شده با هم برابر است.

مثال: اگر از نقطه $A(m-1, n)$ دو مماس با طول مساوی بر سهمی $3y^2-6y-2x=3$ رسم شود مقادیر nm را بدست آورید.

ویژگی بازتابندگی سهمی:

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: یک پرتو نور در راستای خط $y=4$ بر سهمی $y^2=16x$ می تابد. معادله محور باز تابش را بنویسید.



- ۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که :
- الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.
- ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و برخط $3x+4y=0$ مماس باشد.
- پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ و تری به طول ۲ ایجاد کند.
- ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.
- ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

- ۲- حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

- ۳- وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

- ۴- وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :
- الف) $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x=4$
- ب) $x^2+(y-1)^2=1$, $(x-1)^2+y^2=1$
- ج) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$
- د) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

- ۵- نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

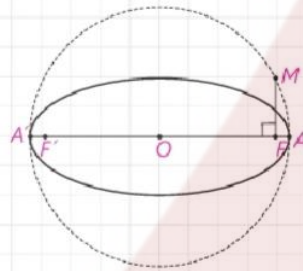
- ۶- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :
- الف) $3x+4y=0$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$
- ب) $x+y=2$, $x^2+y^2=2$
- ج) $x+y=1$, $x^2+y^2-2x-2y=2$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

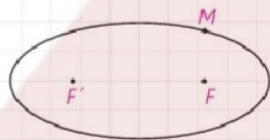


۱- دو نقطه A و B روی یک بیضی F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:
 الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

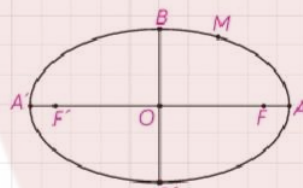
ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$



$OA = 5$ $OB = 3$ $OF = 4$

۴- نقطه M روی بیضی به اقطار 6 و 10 واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر 4 واحد است.

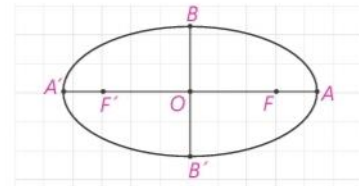
الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

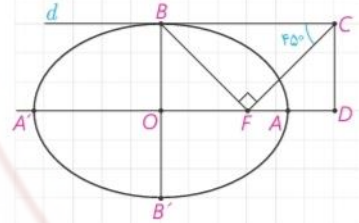
ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟



۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\widehat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



۷- سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را به دست آورید.

۹- معادله سهمی را بنویسید که $S(1, 2)$ رأس و $F(1, -2)$ کانون آن باشد.

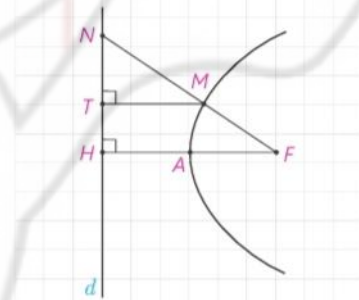
۱۰- سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱- سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

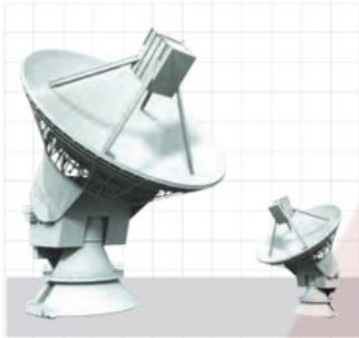
۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از

$$\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

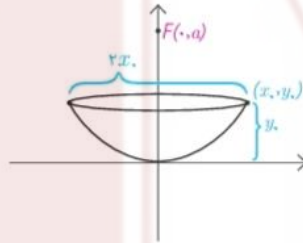
نقطه M ، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:



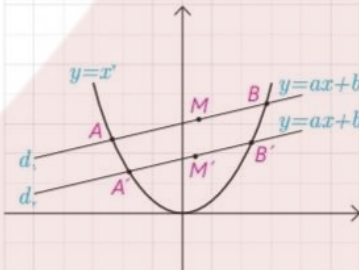
درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه



۱۳- یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۱۴- فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.



۱۵- سهمی $y = x^2$ و دو خط موازی $d_1: y = ax + b$ و $d_2: y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

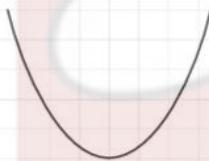
الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^2$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M را به دست آورید.

پ) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست‌هایی از مقاطع مخروطی:

۱. معادله دایره ای که نقطه (۵ و ۴) مرکز آن بوده و بر دایره $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ مماس خارج باشد کدام است.

$$(1) x^2+y^2-8x-10y-32=0$$

$$(2) x^2+y^2-8x-10y+25=0$$

$$(3) x^2+y^2-8x+10y-32=0$$

$$(4) x^2+y^2-8x-10y-25=0$$

۲. بیضی افقی با کانون مبدا مختصات، محور x ها را در دو نقطه ۲- و ۱۸ قطع میکند. اگر این بیضی محور y ها را در دو نقطه M و N قطع کند طول MN کدام است؟

$$5/6(4)$$

$$6/4(3)$$

$$4/8(2)$$

$$7/2(1)$$

۳. اگر وتری که دایره $x^2+y^2-2x+4y+m=0$ روی خط $x+y=3$ جدا می کند برابر ۸ باشد، m کدام است.

$$-19(4)$$

$$-21(3)$$

$$-24(2)$$

$$-18(1)$$

۴. دایره ای که خطوط $2x+y=6$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن و خط $3x-4y+1=0$ بر آن مماس است، از کدام نقطه می گذرد.

$$(4) (-1, 2)$$

$$(3) (0, 1)$$

$$(2) (-5, 0)$$

$$(1) (5, 0)$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

۵. دایره ای به مرکز $O(0,2)$ که بر دایره $x^2+y^2+4x-6y=32$ مماس داخل است، محور طولها را در نقطه ای با کدام طول می تواند قطع کند.

$2-4\sqrt{5}$ (۱) $4\sqrt{5} + 2$ (۲) $2\sqrt{19}$ (۳) $-4\sqrt{19}$ (۴)

۶. شیب خط مماس بر دایره $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ در نقطه $M(b,a)$ روی آن کدام است.

1 (۱) $\frac{b}{a}$ (۲) $\frac{-b}{a}$ (۳) -1 (۴)

۷. نقطه $F(-2,K)$ کانون یک سهمی است که راس آن مبدا مختصات است. اگر محور تقارن این سهمی موازی یکی از محورهای مختصات باشد، معادله خط هادی کدام است.

$x=-2$ (۱) $y=-2$ (۲) $x=2$ (۳) $y=2$ (۴)

۸. اگر خط $3x-4y+2=0$ و دایره $x^2+y^2-6x+2y+m=0$ نقطه برخوردی نداشته باشند، m چند عدد صحیح می تواند اختیار کند.

8 (۱) 10 (۲) 9 (۳) 11 (۴)

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

۹. معادله سهمی ای که راس آن مبدا مختصات و خط $y=3$ خط هادی آن باشد، کدام است.

$$(۱) \quad x^2+12y=0 \quad (۲) \quad x^2-12y=0 \quad (۳) \quad y^2-12x=0 \quad (۴) \quad y^2+12x=0$$

۱۰. مکان هندسی مرکز دایره هایی که از نقطه $(۲ و ۷)$ می گذرد و بر خط $x=۵$ مماس می شوند، کدام است.

$$(۱) \quad x^2+4x+4y+28=0$$

$$(۲) \quad y^2-4x+4y+28=0$$

$$(۳) \quad y^2+4x-4y+26=0$$

$$(۴) \quad y^2-4x-4y+28=0$$

۱۱. سهمی $y^2+2y-4x+5=0$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی دایره ای رسم می کنیم که به خط هادی سهمی مماس شود. نقطه برخورد این دایره با سهمی کدام می تواند باشد.

$$(۱) \quad (۲ و ۳) \quad (۲) \quad (۱ و ۱) \quad (۳) \quad (۲ و ۱) \quad (۴) \quad (۳ و ۲)$$

۱۲. معادله سهمی با کانون $F(۱ و -۲)$ و خط هادی $x=۴$ کدام است.

$$(۱) \quad y^2-2y+12x=11$$

$$(۲) \quad y^2-2y+12x=-25$$

$$(۳) \quad y^2+2y+12x=11$$

$$(۴) \quad y^2+2y+12x=-25$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

۱۳. کانون سهمی $y^2 + 2y + 4x = 3$ روی کدام خط قرار دارد.

(۱) محور x ها (۲) نیمساز ناحیه اول و سوم (۳) محور y ها (۴) نیمساز ناحیه دوم و چهارم

طول قطر غیرکانونی بیضی گذرنده از نقطه $(1, 10)$ ، با کانون‌های $F(2, 5)$ و $F'(2, -3)$ کدام است؟

(۲) $8\sqrt{5}$

(۱) ۱۶

(۴) $4\sqrt{5}$

(۳) ۸

وتری از سهمی به معادله $y^2 = 4(x + y)$ که از کانون بر محور تقارن آن عمود باشد، قطری از یک دایره است. معادله این دایره کدام است؟

(۲) $x^2 + y^2 + 4y = 0$

(۱) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

(۴) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

(۳) $x^2 + y^2 - 2y = 2$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

یک اشعه نورانی را در امتداد خط $x = 3$ و اشعه دیگر را در امتداد خط $x = -1$ ، از داخل سهمی به معادله $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$ ، بر آن می‌تابانیم. مختصات نقطه تلاقی بازتاب این دو پرتو، کدام است؟

(۲) (۱, ۴)

(۱) (۱, ۳)

(۴) (۲, ۳)

(۳) (۲, ۲)

یک بیضی به قطرهای $AA' = 14$ و $BB' = 4\sqrt{6}$ و کانون F نزدیک به نقطه A ، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه F ، دایره به قطر AA' را در نقطه M قطع می‌کند. اندازه پاره خط AM ، کدام است؟

(۲) $2\sqrt{7}$

(۱) ۷

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{6}$

در سهمی به معادله $y^2 + ay + bx - 9 = 0$ ، معادله خط هادی، $x = \frac{13}{4}$ و محور تقارن آن $y = 1$ است. مقدارهای b ، کدام‌اند؟

(۲) ۵, ۷

(۱) ۵, ۸

(۴) ۳, ۷

(۳) ۴, ۸

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

دایره‌ای به مرکز $(3, 1)$ بر روی خط راست $15 = 12y + 5x$ ، وترى به طول $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور x ها، وترى با کدام اندازه جدا می‌کند؟

(۲) ۶

(۱) $2\sqrt{6}$

(۴) ۸

(۳) $2\sqrt{15}$

از میان دایره‌های گذرا از نقطه $A(2, 3)$ و مماس بر خطوط $3x - 4y = 0$ و $y = 0$ ، کوچک‌ترین شعاع دایره کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

(۴) $\frac{13}{9}$

(۳) $\frac{4}{3}$

در یک بیضی به قطرهای ۸ و $2\sqrt{7}$ واحد و کانون‌های F و F' ، دایره‌ای به قطر $F'F$ بیضی را در نقطه M ، قطع می‌کند. فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

(۲) $2/5$

(۱) $4 - 2\sqrt{2}$

(۴) ۳

(۳) $4 - \sqrt{2}$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

اگر نقطه $F(-\frac{1}{25}, -2)$ کانون سهمی $y^2 + ay + bx + 1 = 0$ باشد، کوچک‌ترین مقدار b ، کدام است؟

(۲) -۳

(۱) -۴

(۴) ۲

(۳) -۲

کوچک‌ترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲) $0, -3$

(۱) $1, -3$

(۴) $3, -2$

(۳) $2, -1$

در سهمی به معادله $5y^2 - 10y + 4x - 3 = 0$ ، فاصله کانون تا نقطه تلاقی سهمی با محور x ها، کدام است؟

(۲) $1/25$

(۱) $1/2$

(۴) $1/45$

(۳) $1/3$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

خط گذرا بر کانون سهمی به معادله $3y^2 - 6y + 18x + 10 = 0$ و عمود بر محور آن، سهمی را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. طول وتر AB کدام است؟

(۲) $3\sqrt{2}$

(۱) ۴

(۴) ۶

(۳) ۵

در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{2}{3}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

(۲) 90°

(۱) 60°

(۴) 150°

(۳) 120°

نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲) $2, -4$

(۱) $3, -5$

(۴) $-1 \pm \sqrt{3}$

(۳) $-1 \pm \sqrt{2}$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

(۲) $0/64$

(۱) $0/6$

(۴) $0/8$

(۳) $0/75$

وتر مشترک دایره به معادله $x^2 + y^2 = 17$ ، با دایره C گذرا بر نقطه $(-1, 6)$ ، بر خط به معادله $2x - y = 3$ منطبق است. شعاع دایره C کدام است؟

(۲) $2\sqrt{2}$

(۱) ۳

(۴) ۴

(۳) $2\sqrt{3}$

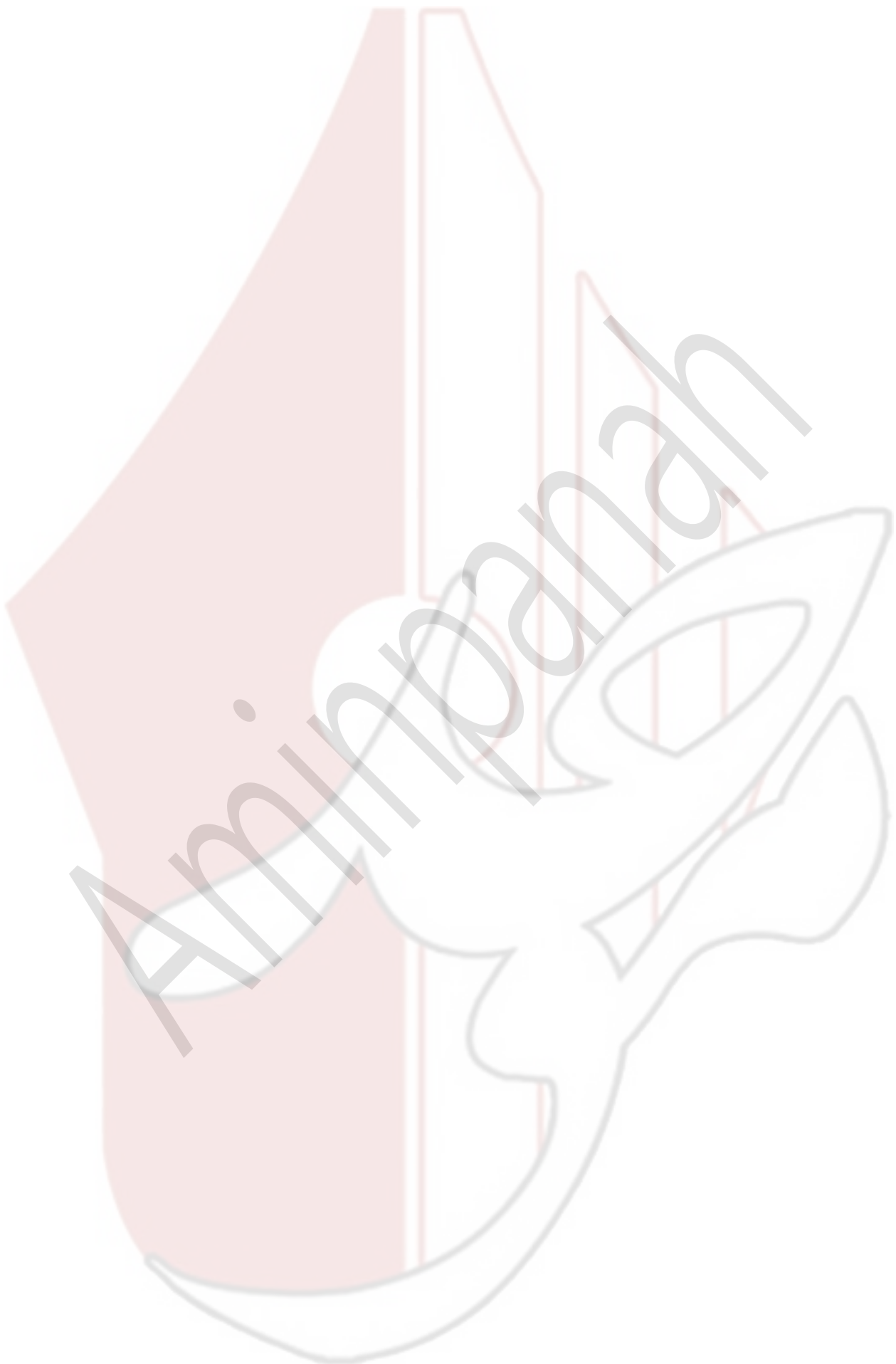
در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

(۲) ۱۶

(۱) ۱۲

(۴) ۲۰

(۳) ۱۸



فصل سوم

بردار در فضا

تهیه و تنظیم: امین پناه

فضای سه بعدی:

در فضای سه بعدی سه محور X و Y و Z وجود دارد که دو به دو بر یکدیگر عمود می باشند.
بوسیله سه محور و مبدا مختصات، صفحات XOY و XOZ و YOZ تشکیل می گردد که این سه صفحه فضا را به ۸ ناحیه تقسیم می کند. چهار ناحیه بالای صفحه XY قرار دارد که در این چهار ناحیه Z مثبت است و چهار ناحیه پایین صفحه XY قرار دارد و در این چهار ناحیه Z منفی است.

فاصله دو نقطه در فضا:

اگر دو نقطه $A(X_1, Y_1, Z_1)$ و $B(X_2, Y_2, Z_2)$ در فضا مفروض باشند فاصله این دو نقطه برابر است با

مثال: فاصله دو نقطه $(2, -4, 2)$ و $(-1, 0, -2)$ را بدست آورید.

مثال: کمترین فاصله دو نقطه $(m-1, 2, 1)$ و $(-1, 0, 1)$ را بدست آورید.

تست: اگر نقاط $A(0, 3, -1)$ و $B(1, -2, m-1)$ و C مختصات راسهای مثلث متساوی الاضلاع باشند کمترین مساحت این مثلث کدام است.

$$\sqrt{5}(4)$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4}(3)$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}(2)$$

$$5\sqrt{3}(1)$$

تست: اگر نقاط $A(3, 2, -1)$ و $B(4, 0, 1)$ در فضا مفروض باشند و نقطه M در فضا متغیر باشد آنگاه کمترین مقدار $|MB| + |MA|$ کدام است.

$$\sqrt{3}/2(4)$$

$$2\sqrt{3}(3)$$

$$\sqrt{3}(2)$$

$$0(1)$$

تست: نقاط $A(3, -1, 2)$ و $B(7, 2, 2)$ در فضا مفروض است. مکان هندسی نقاطی در فضا که از نقطه A به فاصله ۳ و از B به فاصله ۴ باشد کدام است.

(۱) تهی (۲) یک نقطه (۳) ۴ نقطه (۴) دایره

تصویر نقطه $A(X, Y, Z)$ روی محورها و صفحات مختصات:

تست: مکان هندسی نقاطی در صفحه XOY که از نقطه $(4, 3, -2)$ به فاصله ۵ باشد کدام است.

(۱) تهی (۲) یک نقطه (۳) دایره ای به شعاع ۴ (۴) دایره ای به شعاع ۳

تست: اگر نقطه A' تصویر نقطه $(4, -1, m^2 - 1)$ روی صفحه XOZ و نقطه A'' تصویر نقطه A روی محور Z ها باشد $|A'A''|$ کدام است.

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $\sqrt{20}$ (۴) به m بستگی دارد

قرینه نقطه $A(X,Y,Z)$ روی محورهای مختصات:

تست: نقاط $A(۱,۲,۳)$ و $B(۴,۲,-۱)$ مفروضند. فاصله نقطه A' قرینه نقطه A نسبت به محور X ها از نقطه B' تصویر نقطه B روی صفحه XOY کدام است.

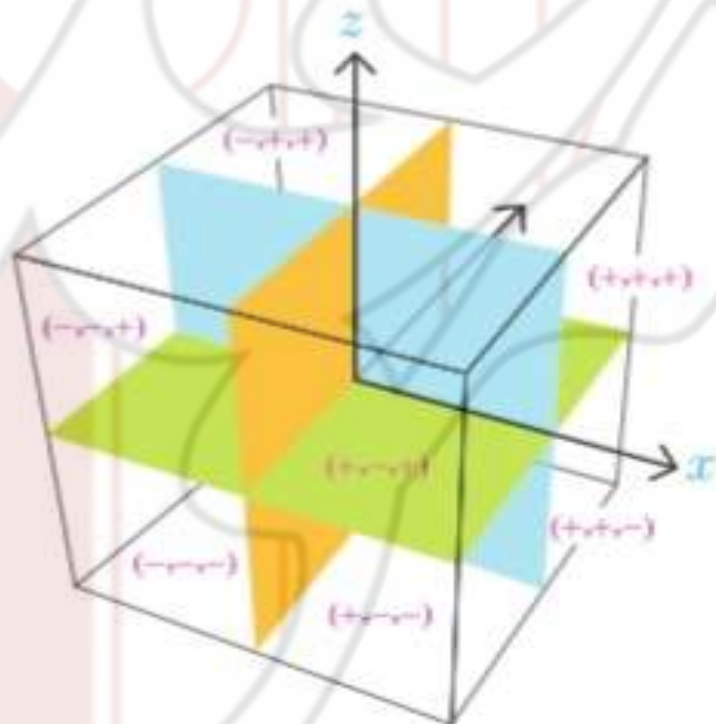
$\sqrt{10}(۴)$

$\sqrt{29}(۳)$

$\sqrt{17}(۲)$

$\sqrt{24}(۱)$

معادلات صفحات و محورهای مختصات:



شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

Aminpari

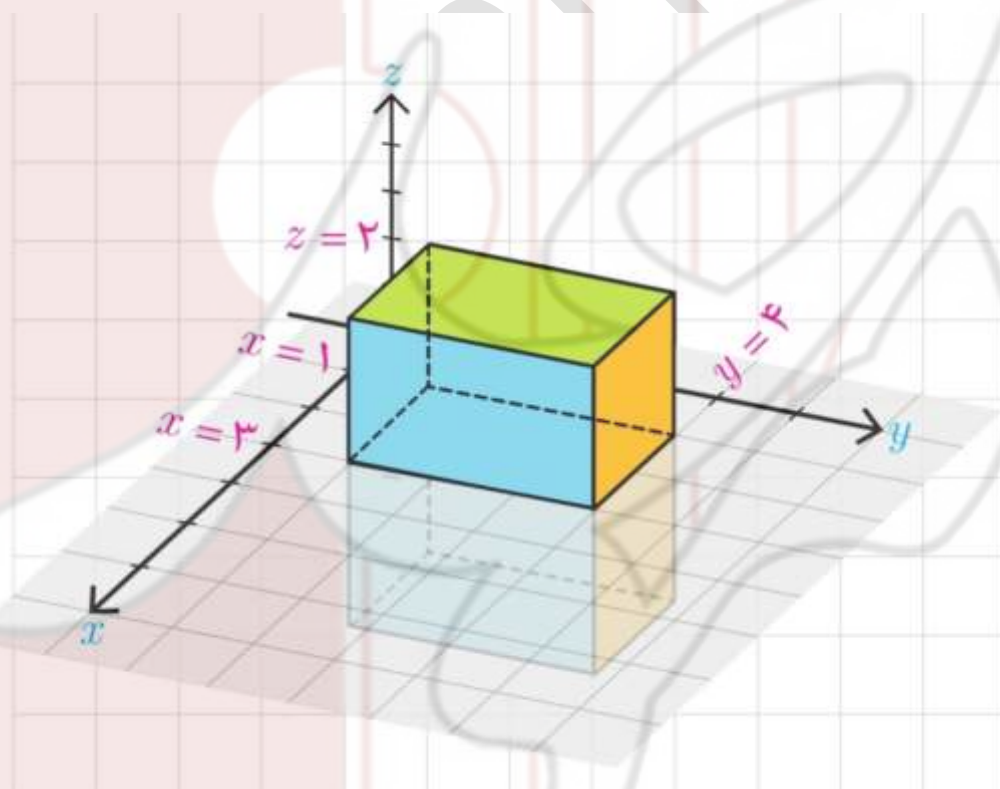
مثال: معادله پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(1,2,-2)$ و $B(1,2,3)$ را به یکدیگر وصل می کند.

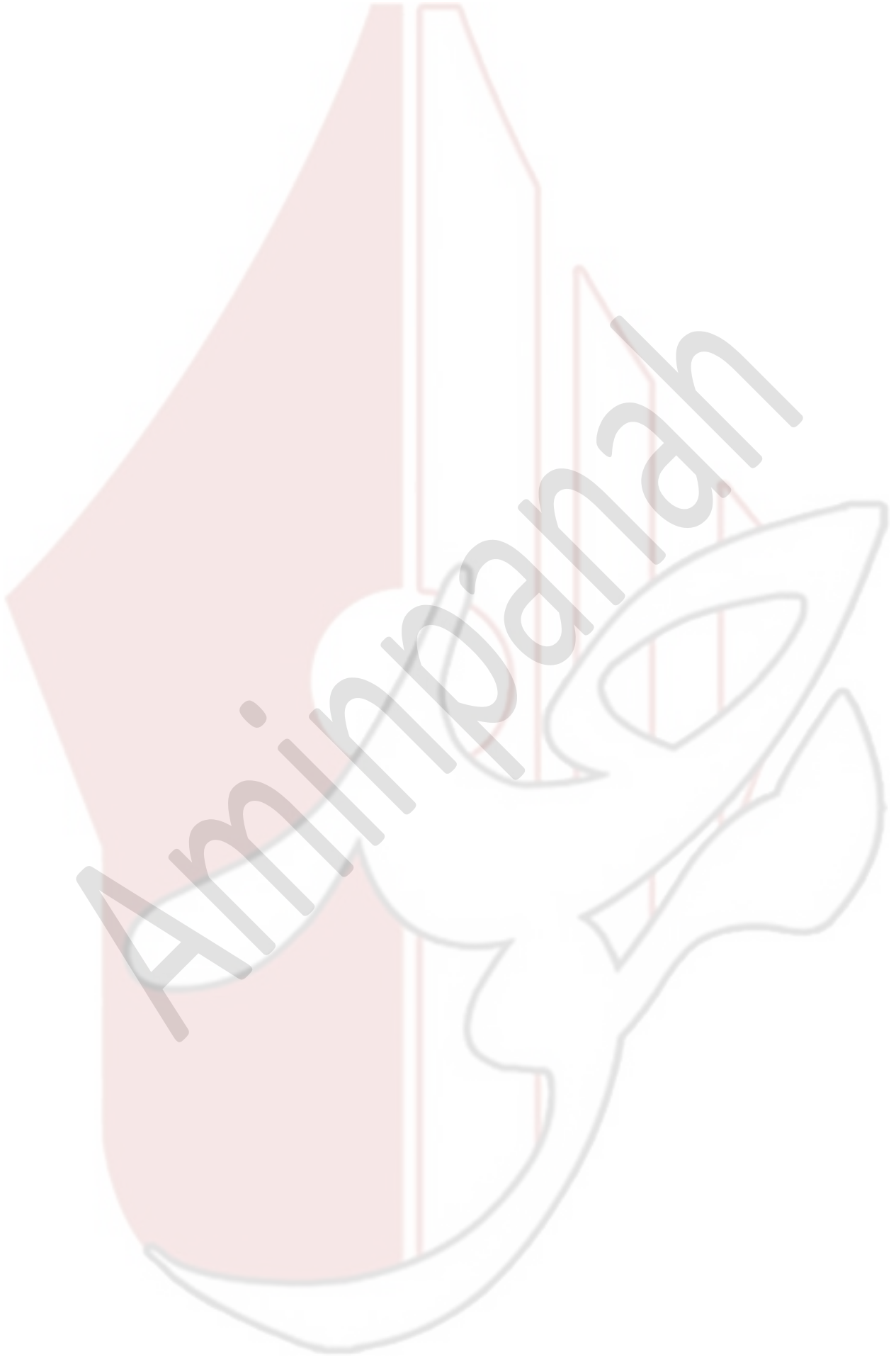
مثال: معادله پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(2,-3,4)$ و $B(2,2,4)$ را به یکدیگر وصل می کند.

مثال: در مکعب مستطیل شکل زیر:

۱. معادله وجه های آبی رنگ، سبز رنگ و نارنجی رنگ را بنویسید.

۲. معادله یال مشترک وجه ها را بنویسید.





Aminpanlah

بردار در فضا و طول بردار:

مثال: نقاط $A(3, 2, -1)$ و $B(4, 1, 3)$ در فضا مفروض است.

۱. مولفه های بردار AB را بدست آورید.

۲. طول بردار BA را بدست آورید.

تست: اندازه تصویر بردار a روی صفحات xoy و xoz و yoz به ترتیب $\sqrt{7}$ و $\sqrt{12}$ و $\sqrt{13}$ می باشد. اندازه بردار a کدام است.

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

تست: حاصل $\vec{BO} + \vec{AB} + \vec{OC}$ کدام است.

\vec{BC} (۴)

\vec{OA} (۳)

\vec{AC} (۲)

$2\vec{AB}$ (۱)

تست: حاصل $3\vec{OA} + 6\vec{BO} + 2\vec{AO} + 5\vec{OB}$ کدام است.

\vec{BA} (۴)

\vec{AB} (۳)

\vec{OB} (۲)

\vec{OA} (۱)

ضرب عدد در بردار:

مثال: اگر \vec{a} (۱ و ۲ و ۳) و \vec{b} (۲ و ۵ و ۳) و $r=2$ باشد حاصل $r\vec{a}-\vec{b}$ را بدست آورید.

ویژگیهای جمع بردارها:

$$a+b=b+a(1)$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c(2)$$

$$a+0=0+a=a(3)$$

$$a+(-a)=(-a)+a=0(4)$$

$$r(a+b)=ra+rb(5)$$

$$(r+s)a=ra+sa(6)$$

$$(rs)a=r(sa)(7)$$

بردار یکه: برای سه محور x, y, z سه بردار به طول واحد وجود دارد که بر این سه محور منطبق می باشند. این سه بردار با نمادهای i و j و k مشخص می گردند که به آنها بردارهای یکه محور های مختصات می گوئیم. مولفه های این سه بردار برابر است با

مثال: بردار \vec{a} (۲ و ۱ و ۳) را بر حسب بردارهای یکه محور های مختصات بنویسید.

دو بردار موازی:

تست: اگر سه نقطه $A(0, -1, a)$ و $B(1, b, 1)$ و $C(4, -2, 2)$ بر یک خط راست واقع باشند حاصل $3a-4b$ کدام است.

$$8(4)$$

$$6(3)$$

$$5(2)$$

$$7(1)$$

ضرب داخلی دو بردار: برای دو بردار a و b ضرب داخلی دو بردار را بصورت $a \cdot b$ نمایش می دهیم که حاصل آن یک عدد است و این عدد می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

* اگر اندازه های دو بردار a و b و زاویه بین دو بردار مشخص باشد در این صورت ضرب داخلی دو بردار برابر است با

ویژگیهای ضرب داخلی دو بردار:

مثال: اگر اندازه های دو بردار a و b به ترتیب ۲ و ۳ و زاویه بین دو بردار ۶۰ باشد مطلوبست
 $(2a-b).(a+3b)$

مثال: برای سه بردار a, b, c اگر $|a|=2$ و $|b|=3$ و $|c|=1$ باشد با این خاصیت که $a+b+c=0$ مقدار $a.b+b.c+c.a$ را بدست آورید.

تست: اگر $a+b+c=0$ و $|a|=5$ و $|b|=6$ و $|c|=7$ حاصل $a.c$ کدام است.
 ۱۸(۱) ۱۹(۲) ۱۸(۳) ۱۹(۴)

تست: اگر $|a|=3$ و $|b|=4$ و $|c|=6$ و $a+b+c=0$ باشد حاصل $a.b+b.c$ کدام است.
 ۱۴(۱) ۱۵(۲) ۱۶(۳) ۱۷(۴)

تست: اگر a و b بردارهایی یکه باشند بطوریکه $|\sqrt{2}a+\sqrt{3}b|=\sqrt{7}$ باشد زاویه بین دو بردار a و b کدام است.

۶۰(۱) ۳۰(۲) ۱۲۰(۳) ۱۵۰(۴)

تست: اگر $|a|=4$ و $|b|=3$ و $|a-b|=\sqrt{13}$ باشد، زاویه بین دو بردار a و b کدام است.

۶۰(۴)

۳۰(۳)

۱۲۰(۲)

۹۰(۱)

مثال: در مکعب با طول یال a ضرب داخلی دو قطر را بدست آورید.

ضرب داخلی دو بردار بر حسب مولفه های دو بردار:

اگر بردارهای $a(a_1, a_2, a_3)$ و $b(b_1, b_2, b_3)$ در فضا مفروض باشند در این صورت ضرب داخلی دو بردار برابر است با:

مثال: ضرب داخلی دو بردار $a(1-2-4)$ و $b(3-1-3)$ را بدست آورید.

تست: اگر بردارهای $(2-1-m)$ و $(0-1-2)$ قطره های یک لوزی باشند، مساحت لوزی کدام است.

$\sqrt{5}/2(1)$ $\sqrt{5}(2)$ $3\sqrt{5}/2(3)$ 4 به m بستگی دارد

تست: اگر دو بردار $a(2-1-3)$ و b موازی باشند و $a.b=28$ آنگاه مجموع مولفه های بردار b کدام است

$12(1)$ $10(2)$ $8(3)$ $6(4)$

تست: در مثلث متساوی الاضلاع ABC به طول ضلع 1 اگر ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد حاصل $AB.AC+AB.AH$ کدام است.

$5/4(1)$ $4/5(2)$ $3/4(3)$ $4/3(4)$

زاویه بین دو بردار: اگر مولفه های دو بردار a و b در فضا معلوم باشد در این صورت زاویه بین دو بردار برابر است با :

مثال: زاویه بین بردارهای $a(۳-۱-۲)$ و $b(۱-۳-۵)$ را بدست آورید.

تست: اگر $A(۱-۲-۵)$ و $B(۳-۱-۷)$ و $C(۴-۱-۵)$ سه راس مثلث ABC باشند، اندازه زاویه A کدام است.

۹۰(۴)

۶۰(۳)

۴۵(۲)

۳۰(۱)

مثال: اگر زاویه بین دو بردار یکه a و b برابر ۶۰ درجه باشد مطلوبست زاویه بین دو بردار $a+b$ و $a-2b$

نکته: اگر زاویه بین دو بردار a و b کمتر از ۹۰ باشد آنگاه $a \cdot b > 0$ و در صورتی که زاویه بین دو بردار بزرگتر از ۹۰ باشد $a \cdot b < 0$

مثال: حدود m را طوری بدست آورید تا زاویه بین دو بردار $(۳-1-m)$ و $(۲-۱-۴)$ منفرجه گردد.

تصویر بردار a روی b :

مثال: تصویر بردار $(3a-2b)$ را روی بردار $(a+b)$ بدست آورید.

مثال: بردارهای $(a-1)$ و $(a+b)$ مفروضند. تصویر بردار $a-b$ را روی بردار $a+2b$ بدست آورید.

تست: a و b دو بردار غیر صفر و نا هم راستا هستند. اگر a' تصویر a بر b و نیز b' تصویر b بر a باشد حاصل $\frac{a.b'+b.a'}{a.b}$ برابر کدام است.

۰(۴

۴(۳

۲(۲

۱(۱

نامساوی کثی-شوارتس:

مثال: اگر $4x-2y+6z=12$ باشد کمترین مقدار عبارت $4x^2+y^2+9z^2$ را بدست آورید.

ضرب خارجی:

برای دو بردار a و b ضرب خارجی دو بردار را بصورت $a \times b$ نمایش می دهیم که حاصل آن یک بردار است و این بردار بر هر دو بردار a و b و در نتیجه بر صفحه بردارهای a و b عمود است.

* اگر جهت چرخش چهار انگشت دست راست از بردار a به سمت بردار b باشد در این صورت انگشت شست بردار $a \times b$ را نمایش می دهد.

* اگر اندازه های دو بردار a و b و زاویه بین دو بردار مشخص باشد در اینصورت ضرب خارجی دو بردار برابر است با :

ویژگی های ضرب خارجی دو بردار:

مثال: اگر $(1 و 2 و 3)$ a و $(1 و 2 و 3)$ b باشند بردار $a \times b$ را تشکیل دهید.

مثال: در متوازی الاضلاع ABCD اگر $\vec{AB}=a$ و $\vec{AD}=b$ اضلاع متوازی الاضلاع باشند حاصل $AC \times BD$ کدام است.

تست: اگر $|V_1 \times V_2|=4$ باشد اندازه بردار $(V_1+V_2) \times (3V_1-V_2)$ کدام است.

۸(۱) ۰(۲) ۱۶(۳) ۴(۴)

تست: اگر $a-2b+3c=0$ و $|a \times c|=2$ آنگاه $|b \times a|$ کدام است.

۳(۱) ۲(۲) ۱,۵(۳) ۰,۵(۴)

تست: سه بردار a, b, c بطول واحد مفروضند. اگر زاویه بین دو بردار b و c برابر 60° باشد و زاویه بین بردار a با صفحه بردار های b و c برابر 60° باشد حاصل $a \cdot (b \times c)$ کدام است.

$\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

تست: اگر $(a-m)$ و $(a+2b)$ مفروض باشند و $(a-2b) \cdot (3a \times b) = 0$ باشد مقدار m کدام است.

۱(۱) $-1(2)$ $2(3)$ $4(4)$ هر مقدار m

تست: زاویه بین دو بردار a و b کمتر از 90° است. اگر $|a|=6$ و $|b|=5$ و $|a \times (a+b)|=18$ حاصل $a \cdot (a+b)$ کدام است.

۱(۱) $54(2)$ $60(3)$ $64(4)$

تست: اگر CD موازی AB باشد و نقطه M از C به D حرکت کند بردار ضرب خارجی $AM \times AB$ چگونه تغییر می کند.

۱) طول آن کم میشود ولی جهت تغییر نمی کند.

۲) طول ثابت است ولی جهت تغییر می کند

۳) طول و جهت ثابت است.

۴) طول و جهت تغییر می کند.

مساحت متوازی الاضلاع:

اگر بوسیله دو بردار a و b متوازی الاضلاع ساخته شود مساحت متوازی الاضلاع برابر است با

مثال: بردارهای $(1, 1)$ و a و $(2, 2)$ و b مفروض است. مساحت متوازی الاضلاع را بیابید که با بردارهای $a-b$ و $3a+4b$ ساخته می شود.

مساحت مثلث:

اگر بوسیله دو بردار a و b مثلثی ساخته شود در این صورت مساحت مثلث برابر است با

مثال: اگر $(1, 2)$ و a و $(2, 0)$ و b باشند مساحت مثلثی را بیابید که بوسیله بردارهای $a-b$ و $4a+5b$ ساخته میشود.

مثال: اگر نقاط $A(2, 2)$ و $B(1, 0)$ و $C(3, 2)$ سه راس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

تست: دو بردار a و b با طولهای ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویه ۳۰ می سازند. مساحت مثلثی که بوسیله دو بردار $a-2b$ و $3a+2b$ ساخته می شود کدام است.

۴۸(۴)

۴۲(۳)

۳۶(۲)

۲۴(۱)

تست: اگر $a-b+c=0$ و $|a|=5$ و $|b|=6$ و $|c|=7$ باشد حاصل $|b \times c|$ کدام است.

۳۷/۶(۴)

۱۲۷/۶(۳)

۶۷/۶(۲)

۲۴۷/۶(۱)

ضرب مختلط سه بردار:

* اگر سه بردار در یک صفحه باشند در این صورت ضرب مختلط سه بردار صفر است.

مثال: آیا بردارهای $(1, 9, 1)$ و $c(1, 3, 1)$ و $b(1, 1, 3)$ و $a(1, 3, 2)$ در یک صفحه اند.

تست: اگر سه بردار $(1, m, 1)$ و $(2, 1, 0)$ و $(1, 1, 3)$ در یک صفحه باشند مقدار m کدام است.

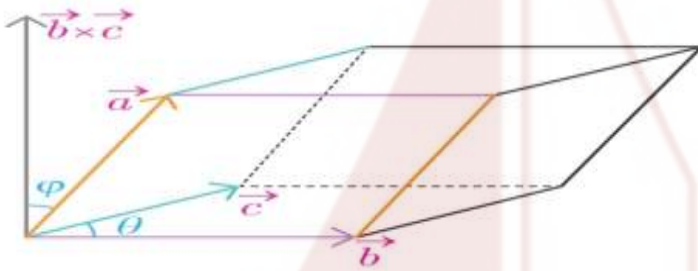
-۱(۴)

۱(۳)

۲(۲)

-۲(۱)

حجم متوازی السطوح: اگر بوسیله سه بردار a و b و c متوازی السطوح ساخته شود در این



صورت حجم آن برابر است با:

مثال: حجم متوازی السطوحی را بدست آورید که توسط بردارهای $(0, 1, 0)$ و $(1, 0, 1)$ و $(1, 1, 0)$ تولید میشود.

رابطه بین ضرب داخلی و خارجی:

مثال: بردارهای a و b مفروض اند به طوری که $|a|=3$ ، و $|b|=26$ ، و $|a \times b|=72$ مقدار $a \cdot b$ را بدست آورید.

تستهای تکمیلی:

۱. نقاط $A=(۲و۳و۴)$ و $B=(۲و۳و۰)$ مفروض اند. نقطه M بر روی پاره خط AB چنان قرار دارد که بردار $MA=-3MB$. مختصات M کدام است.

$$(۱) (۱-و۳و۱) \quad (۲) (۱-و۳و-۲) \quad (۳) (۲و۳و۱) \quad (۴) (۱و۳و-۱)$$

۲. اگر $AB=(۱و۲و۳)$ و $AC=(۳و۲و۱)$ باشند مختصات BC کدام است.

$$(۱) (۲و۰و۲) \quad (۲) (۲و-۲و۰و۴) \quad (۳) (۴و۴و۴) \quad (۴) (۲و۲و-۲)$$

۳. چند نقطه در فضا وجود دارد که از نقطه $(۲و-۱و۵)$ به فاصله ۴ واحد بوده و از $(۴و۲و۱)$ به فاصله ۳ واحد باشد.

$$(۱) \text{بی شمار} \quad (۲) ۲ \quad (۳) ۱ \quad (۴) \text{صفر}$$

۴. کدام بردار بر هر دو بردار $i-2j$ و $j-2k$ عمود است.

$$(۱) (۴و۲و۲) \quad (۲) (۱و-۲و۴) \quad (۳) (۱و۰و۲) \quad (۴) (۴و۲و۱)$$

۵. اگر $k(a+b)=2b$ و $|a|=۳$ و $|b|=۱$ باشد، k کدام عدد می تواند باشد.

$$(۱) -۱ \quad (۲) ۱ \quad (۳) -۲ \quad (۴) ۲$$

۶. اگر $|a|=2$ و $|b|=13$ و $a.b=24$ باشد مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $a+b$ و $a-b$ ساخته می شود کدام است.

- ۵(۱) ۱۰(۲) ۲۰(۳) ۴۰(۴)

۷. اگر بردارهای $(1-k)$ و $(3+2)$ و $(-4+2)$ هم صفحه باشند مقدار k کدام است.

- $\frac{-2}{7}$ (۱) $\frac{4}{7}$ (۲) $\frac{-3}{7}$ (۳) $\frac{2}{7}$ (۴)

۸. فاصله تصویر نقطه $A(1-1)$ روی محور Z ها، از قرینه نقطه A نسبت به صفحه xoy کدام است.

- ۵(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

۹. مساحت مثلثی که با دو بردار $i-j$ و $k+i$ ساخته می شود، کدام است.

- $\sqrt{3}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

۱۰. حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار $(1+3)$ ، $(1-1)$ و $(1+2)$ کدام است.

- ۶(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

۱۱. اگر دو بردار $a=(3m,2m-1,m)$ و $b=(0,1-m)$ بر هم عمود باشند، $|a-b|$ کدام است.

- ۴(۴) $\sqrt{13}$ (۳) ۳(۲) $\sqrt{11}$ (۱)

۱۲. بر روی دو بردار $a=2i+j+k$ و $b=k-j$ یک متوازی الاضلاع ساخته شده است. زاویه بین دو قطر متوازی الاضلاع کدام است.

- ۹۰(۴) ۳۰(۳) ۴۵(۲) ۶۰(۱)

۱۳. سه بردار $(1, -1, 3)$ ، $(2, m, 1)$ و $(1, m-1, 1)$ در یک صفحه قرار دارند. m کدام است.

- ۲(۱) ۰(۲) ۱(۳) -۱(۴)

۱۴. مثلث ABC ، مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ است. حاصل عبارت

$(AC \cdot CB)AB - (AB \cdot BC)AC$ کدام است.

- ۴BC(۴) ۴CB(۳) ۲BC(۲) ۲CB(۱)

۱۵. طول تصویر قائم بردار $V=(3i+j) \times (j-k)$ بر صفحه xy ، چند برابر طول تصویر قائم آن بر صفحه yz است.

- $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۱)

۱۶. اگر $|a \times b| = \sqrt{3}$ و $a.b=1$ باشد، طول تصویر قائم بردار a بر راستای بردار b ، چند برابر $|a|$ است.

$$\frac{1}{3}(۴)$$

$$\frac{2}{3}(۳)$$

$$\frac{1}{2}(۲)$$

$$\frac{1}{4}(۱)$$

۱۷. اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، حداکثر مقدار عبارت $\frac{(4a+b+c)}{4a+b+c}$ کدام است.

$$۶(۴)$$

$$۴(۳)$$

$$۳(۲)$$

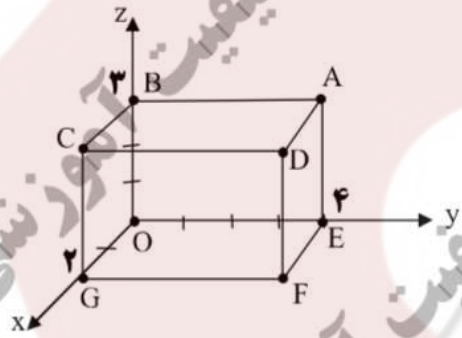
$$۲(۱)$$

سوالات امتحان نهایی:

۲	<p>الف) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ در فضای \mathbb{R}^3 چه شکلی است؟ و چه ارتباطی با نمودار $x = 0$ دارد؟</p> <p>ب) اگر $\vec{a} = (2, -1, 3)$ و $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ باشد اندازه بردار $\vec{a} + 2\vec{b}$ را به دست آورید.</p>
۲	<p>بردارهای $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} را به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار \vec{a} و \vec{b} پیدا کنید.</p>
۲	<p>الف) در فضای سه بعدی نقطه A روی محور xها به طول ۲ و نقطه B در صفحه yoz با عرض ۳- و ارتفاع ۴ مفروض است. فاصله وسط پاره خط AB تا مبدا مختصات را به دست آورید.</p> <p>ب) اگر طول و عرض و ارتفاع اتاقی ۴ متر و ۵ متر و ۳ متر باشد طول قطر اتاق که دو نقطه مقابل را به هم وصل می کند را به دست آورید.</p>
۲	<p>بردارهای $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} را به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار \vec{a} و \vec{b} پیدا کنید.</p>
۱/۵	<p>بردارهای \vec{a} و \vec{b} مفروض اند به طوری که $\vec{a} = 3$ و $\vec{b} = 26$ و $\vec{a} \times \vec{b} = 72$ اگر زاویه بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را به دست آورید.</p>

۱/۵	<p>به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) معادله صفحاتی را بنویسید که از نقطه $A = (2, 3, 4)$ بگذرد و با صفحه xOy موازی باشد.</p> <p>ب) معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟</p> <p>پ) در فضای \mathbb{R}^3، نقطه A به طول ۲ روی محور طولها و نقطه $B = (-4, 6, -3)$ مفروضاند مختصات وسط AB را بیابید.</p>	۱۱
۱	<p>اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (1, 2, 1)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را به دست آورید.</p>	۱۲
۱/۲۵	<p>بردارهای $\vec{a} = (1, -3, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ را در نظر بگیرید.</p> <p>الف) تصویر قائم بردار \vec{a} را بر امتداد بردار \vec{b} به دست آورید.</p> <p>ب) برداری عمود بر دو بردار \vec{a} و \vec{b} بنویسید.</p>	۱۳
۱	<p>ثابت کنید: دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.</p>	۱۴
۱	<p>مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (1, m, -1)$، $\vec{b} = (2, 3, -1)$ و $\vec{c} = (1, -1, 3)$ در یک صفحه باشند.</p>	۱۵
۱/۲۵	<p>اگر طول بردارهای \vec{a} و \vec{b} به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار \vec{a} و \vec{b} را به دست آورید.</p>	۱۶

۱	نقاط $A = (1, 2, 1)$ و $B = (2, 2, 1)$ و $C = (3, 2, -1)$ را در فضا در نظر می‌گیریم. کدام‌ها روی خط $\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟	۱۳
۱/۵	دو بردار $\vec{a} = (1, 2, -1)$ و $\vec{b} = (0, 2, -1)$ را در نظر بگیرید. الف) بردار \vec{a} در کدام ناحیه از فضای \mathbb{R}^3 واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود) ب) طول بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.	۱۴
۱	برای هر دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} ثابت کنید: اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ باشد آنگاه \vec{a} و \vec{b} برهم عمودند.	۱۵
۱	بردارهای $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار \vec{a} را بر امتداد بردار \vec{b} بیابید.	۱۶
۱	مساحت متوازی الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a} = (3, 2, 1)$ و $\vec{b} = (2, 0, 1)$ به وجود می‌آید.	۱۷

۱/۵	 <p>وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل مقابل، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=0, x=2, y=0, y=4, z=0, z=3$ هستند. الف) مختصات نقطه A را مشخص کنید. ب) معادلات مربوط به یال AD و وجه CDFG را بنویسید.</p>	۱۲
۱/۵	بردارهای $\vec{a} = (1, 2, 3)$ و $\vec{b} = (-2, 0, 2)$ مفروض‌اند: الف) تصویر قائم بردار \vec{a} بر امتداد بردار \vec{b} را به دست آورید. ب) طول بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را محاسبه کنید.	۱۳
۱/۵	اگر $A = (-1, 2, 0)$ و $B = (1, 0, -1)$ و $C = (0, -1, 1)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.	۱۴
۱	اگر بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ باشد، ثابت کنید: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$	۱۵

۱/۲۵	نقاط $A(3, 1, 2)$ و $B(3, -2, 2)$ در \mathbb{R}^3 مفروض‌اند. الف) طول پاره خط AB را به دست آورید. ب) معادلات مربوط به پاره خط AB را بنویسید.	۱۳
۱/۲۵	ثابت کنید اگر دو بردار \vec{a} و \vec{b} در یک راستا باشند آنگاه تصویر قائم \vec{a} بر امتداد \vec{b} ، برابر خود \vec{a} می‌شود.	۱۴
۱	اگر \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} بردارهای واحد در \mathbb{R}^3 باشند، حاصل $(\vec{j} \times \vec{k}) \cdot \vec{i}$ را به دست آورید.	۱۵
۲	سه بردار $\vec{a} = (2, 3, 1)$ و $\vec{b} = (-1, 1, 0)$ و $\vec{c} = (2, 1, -2)$ مفروض‌اند. الف) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و \vec{c} را به دست آورید. ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} تولید می‌شود را به دست آورید.	۱۶

۱/۵	به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) معادله صفحه‌های را بنویسید که از نقطه $A = (2, 3, 4)$ بگذرد و با صفحه xoy موازی باشد. ب) معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟ پ) در فضای \mathbb{R}^3 ، نقطه A به طول ۲ روی محور طولها و نقطه $B = (-4, 6, -3)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.	۱۱
۱	اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (1, 2, 1)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - 2\vec{b}$ را به دست آورید.	۱۲
۱/۲۵	بردارهای $\vec{a} = (1, -3, 2)$ و $\vec{b} = (-2, 1, -5)$ را در نظر بگیرید. الف) تصویر قائم بردار \vec{a} را بر امتداد بردار \vec{b} به دست آورید. ب) برداری عمود بر دو بردار \vec{a} و \vec{b} بنویسید.	۱۳
۱	ثابت کنید: دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.	۱۴
۱	مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (1, m, -1)$ ، $\vec{b} = (2, 3, -1)$ و $\vec{c} = (1, -1, 3)$ در یک صفحه باشند.	۱۵
۱/۲۵	اگر طول بردارهای \vec{a} و \vec{b} به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ باشد، مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار \vec{a} و \vec{b} را به دست آورید.	۱۶