ریاضیات کنکور

جلد 2

مهندس پناهی فر

حد

پیوستگی

مجانب

حد و پیوستگی

در این فصل به تحلیل مفهوم حد می‌پردازیم که در قلب حساب دیفرانسیل و انتگرال جای دارد و اساس مفاهیم مشتق و انتگرال است. برای درک صحیح مفاهیم حد باید ابزارهایی را در اختیار داشته باشیم از قبیل قدر مطلق نامساوی‌های قدر مطلقی، جزء صحیح، اتحادها که در فصل پیش نیازها بررسی شدند قبل از مطالعه این فصل یکبار دیگر این مفاهیم را مرور کنید.

حد تابع:

با سه مثال، مفهوم حد تابع روشن می‌کنیم.

❖ **مثال: با فرض $f(x) = 2x^2 + 1$، وقتی x هر چه نزدیکتر و نزدیکتر به ۳ انتخاب شود برای $f(x)$ چه اتفاقی می‌افتد؟**

حل: برای انتخاب از xهایی نزدیک ۳، جدولی از مقادیر $f(x)$ فراهم می‌کنیم.

x	۳/۱	۳/۰۱	۳/۰۰۱	۲/۹۹۹	۲/۹۹	۲/۹
f(x)	۲۰/۲۲	۱۹/۱۲	۱۹/۰۱۲	۱۸/۹۸۸	۱۸/۸۸	۱۷/۸۲

وقتی x نزدیک ۳ است، $2x^2 + 1$ نزدیک ۱۹ است. می‌گوییم حد $2x^2 + 1$ وقتی x به سمت ۳ میل می‌کند برابر ۱۹ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 3} (2x^2 + 1) = 19$$

مثال ۱ دست و پاگیر نبود، مثال بعدی کمی پیچیده‌تر است.

❖ **مثال: فرض کنید $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$، توجه کنید که این تابع برای $x = 1$ تعریف نشده است زیرا وقتی $x = 1$، صورت و مخرج هر دو صفر هستند اما بی‌درنگ این سوال مطرح می‌شود که رفتار $f(x)$، وقتی x نزدیک (۱) است ولی خود (۱) نیست چگونه است؟**

حل: ابتدا یک جدول مختصری از مقادیر $f(x)$ تشکیل می‌دهیم. برای این منظور دو مقدار بزرگ‌تر از (۱) و دو مقدار کوچک‌تر از (۱) انتخاب می‌کنیم.

$$f(1/01) = \frac{(1/01)^3 - 1}{(1/01)^2 - 1} = 1/507$$

x	۱/۱	۱/۰۱	۱	۰/۹۹	۰/۹
f(x)	۱/۵۷	۱/۵۱	?	۱/۴۹	۱/۳

وقتی x نزدیک (۱) است دو تاثیر متفاوت روی کسر $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ می‌گذارد. از یک طرف صورت $x^3 - 1$ به سمت صفر میل می‌کند از طرف دیگر مخرج $(x^2 - 1)$ نیز به سمت صفر میل می‌کند و تقسیم بر یک عدد کوچک، کسر را بزرگ می‌سازد. کدام یک از این دو تأثیر، موازنه را به نفع خود برهم می‌زند؟

اتحادهای جبری:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

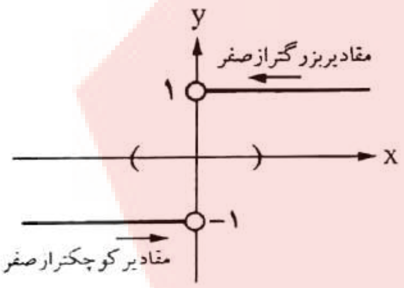
ما را قادر می‌سازد تا به این سوال پاسخ دهیم.

با تقسیم دو عبارت و ساده کردن، رفتار $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ برای x نزدیک ۱، اما نه برابر ۱، مشابه رفتار $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ است. حال وقتی x به سمت (۱) میل می‌کند، $x^2 + x + 1$ به ۳ و $x + 1$ به سمت ۲ میل می‌کند بنابراین حد حاصل عبارتست از

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$$

این عدد را با اعداد جدول مقایسه کنید. می‌بینیم که تقریب نزدیکی برای $f(1/01)$ و $f(0/99)$ است.

❖ **مثال:** تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{|x|}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ببینیم وقتی x به سمت صفر نزدیک می‌شود برای f(x) چه اتفاقی می‌افتد؟



حل: نمودار تابع در شکل روبرو رسم شده است. به وضوح دیده می‌شود که وقتی x از سمت راست صفر به صفر نزدیک می‌شود، f(x) به (۱) میل می‌کند و همچنین وقتی x از سمت چپ صفر به صفر نزدیک می‌شود f(x) به (۱-) میل می‌کند. هر دو مقدار حدی وجود دارند ولی با هم برابر نیستند.

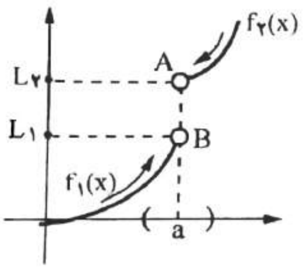
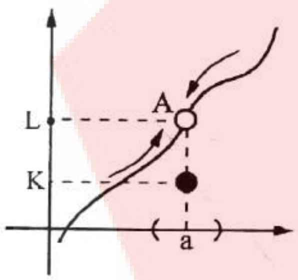
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

از سه مثال بالا به نتایج مهم زیر می‌رسیم.

> ۱) *وجود حد یک تابع f در یک نقطه‌ی a ، ارتباطی با مقدار آن در آن نقطه یعنی f(a) ندارد.*
> ۲) *ممکن است f در $x = a$ تعریف نشده باشد ولی حد f در $x = a$ وجود داشته باشد.*
> ۳) *در مفهوم حد، رفتار f(x) در همسایگی $x = a$ (اعداد بسیار نزدیک به a) مورد نظر است.*

حد چپ و راست:

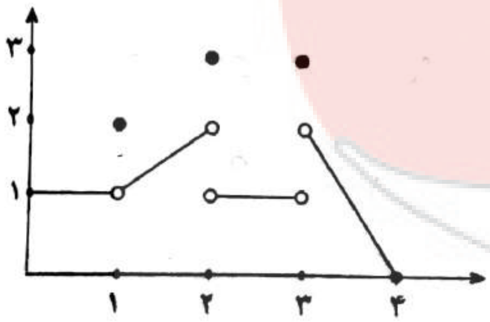
برای درک حد چپ و راست تابع در یک نقطه به جدول زیر توجه کنید.

توضیح	شکل تابع
$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , x < a \\ f_2(x) & , x > a \end{cases}$ برای تعیین حد راست تابع در $x = a$ از سمت راست a، روی منحنی تابع به سمت نقطه توخالی حرکت می‌کنیم تا به نقطه (A) برسیم سپس از نقطه A بر محور yها عمود می‌کنیم لذا: $\lim\limits_{x \to a^+} f_2(x) = L_2$ (a^+ = یعنی مقادیر کمی بیشتر از a) برای تعیین حد چپ تابع در $x = a$ از سمت چپ a، روی منحنی تابع به سمت نقطه توخالی حرکت می‌کنیم تا به نقطه (B) برسیم سپس از نقطه B بر محور yها عمود می‌کنیم لذا: $\lim\limits_{x \to a^-} f_1(x) = L_1$ (a^- = یعنی مقادیر کمی کمتر از a)	 حد چپ و راست تابع در $x = a$ هر دو موجود ولی نابرابرند. بنابراین تابع در $x = a$ حد ندارد. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
برای بررسی حد راست تابع در $x = a$، از سمت راست a، روی منحنی تابع حرکت می‌کنیم تا به نقطه A برسیم حد تابع L می‌شود. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ برای بررسی حد چپ تابع در $x = a$، از سمت چپ a، روی منحنی تابع حرکت می‌کنیم تا به نقطه A برسیم حد تابع L می‌شود. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ دقت کنید که مقدار تابع در $x = a$ برابر K است (نقطه توپر x). $f(a) = K$	 حد چپ و راست تابع در $x = a$ هر دو موجود و برابرند لذا تابع در $x = a$ حد دارد. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

***تذکر ۱** * تابع f در $x = a$ حد دارد، اگر* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

***تذکر ۲** * حد تابع در یک نقطه به مقدار آن ارتباطی ندارد.*

❖ **مثال:** مطابق شکل روبرو برای تابع f مطلوبست محاسبه مقادیر زیر:



۱) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

۲) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

۳) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

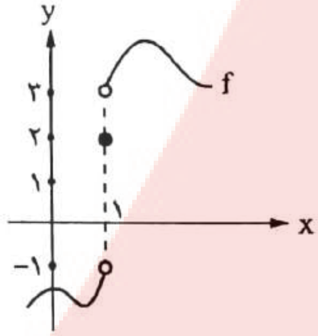
۴) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

۵) $f(1)$

۶) $f(2)$

حل:

❖ **مثال:** نمودار تابع f شکل مقابل است. $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ کدام است؟



۱) ۱-

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

حل: گزینه «۴»

❖ **مثال:** در توابع زیر حد تابع را در نقطه داده شده بیابید:

$$۱)\ f(x) = \begin{cases} x + ۱ & ،x \neq ۱ \\ ۳ & ،x = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = ?$$

حل:

$$۲)\ f(x) = \begin{cases} ۲ & ،x \notin z \\ -۲ & ،x \in z \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x) = ?$$

حل:

$$۳)\ f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & ،x > ۱ \\ ۰ & ،x = ۱ \\ ۲x - ۵ & ،x < ۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) = ?$$

حل:

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$

> ***نکته ۱*** * *حد تابع در یک نقطه به مقدار آن در آن نقطه ارتباطی ندارد.*

❖ **مثال:** هرگاه دو تابع f و g در تمام نقاط بجز $x = 1$ برابر باشند و $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ و $f(1) = 3$ و $g(1) = -1$، آن‌گاه $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۱-   ۴) ۰

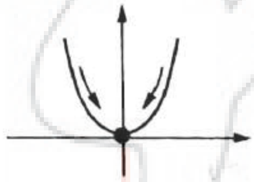
حل: گزینه «۱»

❖ **مثال:** دو حد زیر را در $x = 0$ بررسی کرده در مورد آن‌ها بحث کنید؟

۱) $\lim\limits_{x \to 0} x^2$ ۲) $\lim\limits_{x \to 0} [x^2]$

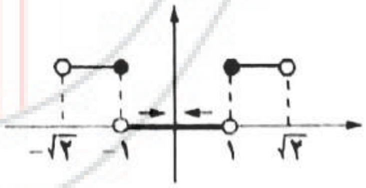
حل: ۱) با توجه به نمودار منحنی تابع $y = x^2$ دیده می‌شود که به ازاء مقادیر کمی بیشتر یا کمی کمتر از صفر حد تابع صفر می‌شود، اما این صفر، صفر حدی است.

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ (صفر حدی است)

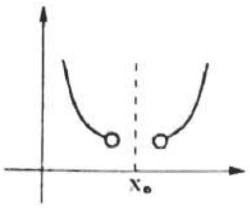


۲) با توجه به نمودار تابع، دیده می‌شود که به ازاء مقادیر کمی بیشتر و کمی کمتر از صفر حد تابع صفر است ولی این صفر، صفر مطلق است.

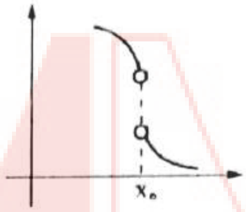
$\lim\limits_{x \to 0} [x^2] = 0$ (صفر مطلق است)



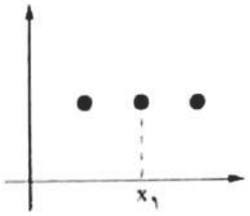
نکته مهم: در محاسبه حد توابع باید توجه کرد که اگر x نتواند به سمت x_0 میل کند گوییم حد تابع در $x = x_0$ ( ) به شکل‌های زیر توجه کنید.



(حد در x_0)



(حد چپ و راست موجودند ولی نابرابر)



(حد در x_1)

❖ **مثال:** حدود زیر را در صورت وجود بیابید:

۱) $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{x - 1}$

حل:

۲) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x - \sqrt{x}}$

حل:

نکته مهم: درمحاسبه حد توابع اگر مخرج کسر صفر مطلق‌شود حد تابع در آن نقطه وجود ندارد. به طور غیررسمی در حالتهای زیر حد تابع وجود ندارد ($x \to x_0$ در همسایگی دامنه تعریف نیست).

۱) $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر مطلق}} =$ حد وجود ندارد

۲) $\dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} =$ حد وجود ندارد

۳) $\dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}} =$ حد وجود ندارد

❖ **مثال:** حاصل حدود زیر را در صورت وجود بیابید:

۱) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{[x]}{[x^2]}$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2 - x}{[x]}$

۳) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{[x]}$

> **نکته** * به حالتهای زیر در مورد صفر حدی و صفر مطلق توجه کنید.
>
> ۱) $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$
>
> ۲) $\dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}} = \dfrac{0}{0}$ (حالت ابهام که باید رفع ابهام شود)

❖ **مثال:** حاصل حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{[x] - 1}{x^2 - 1}$

۲) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

❖ **مثال:** مقدار $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{[5x^2]}{x + 5}$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 5

حل: گزینه «۲»

❖ **مثال:** حد عبارت $\dfrac{[x] + 1}{x^2 - 1}$ وقتی $x \to (-1)^+$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) 0 ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) -1

حل: گزینه «۲»

توابعی که برای آن‌ها حد چپ و راست محاسبه می‌کنیم:

۱- توابع براکتی:

❖ **مثال:** حد تابع $f(x) = [x]$ را در $x = 1$ و $x = \dfrac{3}{2}$ بررسی کنید؟

الف) در $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} [x] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [1 + \varepsilon] = 1$$

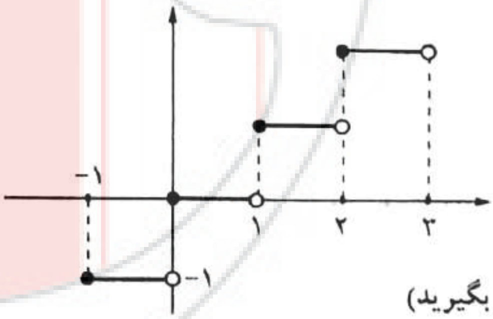
$$\lim_{x \to 1^-} [x] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [1 - \varepsilon] = 0$$

توجه - *برای محاسبه حد تابعهای براکتی می‌توان از اعداد نزدیک به نقطه نیز استفاده کرد، مثلاً در محاسبه $\lim\limits_{x \to 1^+} [x]$ می‌توانیم به جای $x \to 1^+$ از عدد ۱/۰۱ استفاده کنیم و جزء صحیح آن را بیابیم که عدد ۱ است و یا برای محاسبه $x \to 1^-$ از عدد ۰/۹۹ استفاده می‌کنیم که حد تابع را صفر می‌دهد. دیدیم که چون حد چپ و راست در $x = 1$ با هم برابر نبودند پس تابع در $x = 1$ حد ندارد.*

ب) در $x = \dfrac{3}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} [x] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\tfrac{3}{2} + \varepsilon] = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} [x] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\tfrac{3}{2} - \varepsilon] = 1$$



(به عنوان مثال عدد ۱/۴ را در نظر بگیرید)

پس تابع $f(x) = [x]$، در نقطه $x = \dfrac{3}{2}$ حد دارد.

> **نتیجه کلی:** تابع $f(x) = [x]$، در نقطه صحیح حد ندارد و در نقاط غیرصحیح حد دارد.

❖ **مثال:** حاصل $\text{Lim}\ (۴x + [۲x])$ ، وقتی $x \to \frac{۱}{۲}^{-}$ ، کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

حل: گزینه (۲)

توجه می‌کنیم که

$x \longrightarrow x_{\circ}^{+}$: یعنی $x = x_{\circ} + \varepsilon$

$x \longrightarrow x_{\circ}^{-}$: یعنی $x = x_{\circ} - \varepsilon$

❖ **مثال:** حد $(۱ - x + [x] - [۲x])$ در نقطه $x \to ۱^{-}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱   ۴) ۲

حل: گزینه (۲)

❖ **مثال:** حدود زیر را بیابید:

۱) $\lim\limits_{x \to \circ^{-}} ([۲x] - ۲[x])$

۲) $\lim\limits_{x \to ۴^{+}} [\frac{x}{۲}] + [\sqrt{x}]$

۳) $\lim\limits_{x \to \circ^{+}} ([-x])$

۴) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} [\sin x]$

حل:

۱)

۲)

۳)

۴)

۲ـ توابع قدر مطلقی

❖ **مثال:** حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{|x|}{x}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{x - |x|}{[x + ۱] - x}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{۳ - [x]}{x - ۳} \sqrt{x^۲ - ۶x + ۹}$

حل:

۳ـ توابع چند ضابطه‌ای:

❖ **مثال:** حد توابع داده شده را در نقطه مورد نظر بیابید.

۱) $f(x) = \begin{cases} ۲ & ، x \in z \\ -۲ & ، x \in R - z \end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to ۴} f(x) = ?$

حل:

۲) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{۲} & ، x > \sqrt{۳} \\ -\sqrt{۲} & ، x < \sqrt{۳} \end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to (\sqrt{۳})^+} f(x) = ?$

حل:

۳) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & ، 2x > \frac{1}{3} \\ 5x & ، 3x < \frac{1}{4} \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = ?$

حل:

❖ **مثال:** فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 2 & ، x \geq 1 \\ 1 & ، x < 1 \end{cases}$، حد $f(x)$ وقتی $x \to 1^-$ برابر است با؟

۱) $f(0)$ ۲) $f(1)$ ۳) $f(2)$ ۴) $f(3)$

حل: گزینه «۱»

قضایای حد:

قضیه‌های زیر را بدون اثبات می‌پذیریم. اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ آن‌گاه:

۱) $\lim_{x \to a} C f(x) = C \lim_{x \to a} f(x) = CL_1$

۲) $\lim_{x \to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

۳) $\lim_{x \to a} \big(f(x) . g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) = L_1 . L_2$

۴) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ ، $L_2 \neq 0$

۵) $\lim_{x \to a} f^n(x) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n = L_1^{\,n}$

۶) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{L_1} & n = \text{فرد} \\ \sqrt[n]{L_1} & n = \text{زوج} \quad , \quad L_1 \geqslant 0 \end{cases}$

۷) اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |L_1|$

۸) اگر $f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} g(x)$

۹) هرگاه $P(x)$ یک چند جمله‌ای باشد $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$

❖ **مثال:** هرگاه $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -3$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x \to 1} f(2 + \frac{1}{x})$ را بیابید.

حل:

❖ **مثال:** اگر $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ و $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$ آن‌گاه $(f + g)(x)$ در $x = 0$ ....

۱) حد دارد ولی مقدار ندارد

۲) حد و مقدار ندارد

۳) حد ندارد ولی مقدار دارد

۴) حد و مقدار دارد

حل: گزینه «۱»

قضیه * اگر حد تابع f در $x = a$، صفر باشد و تابع g در همسایگی محذوف $x = a$ کراندار باشد یعنی $|g(x)| \leqslant M$، $(M \in R^+)$ آن‌گاه

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0$$

❖ **مثال:** حاصل هر یک از حدهای زیر را بیابید:

۱) $\lim\limits_{x \to 0} x^4 \sin \frac{1}{x}$

حل:

۲) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \cdot \cos \frac{1}{x}$

حل:

❖ **مثال:** اگر $\lim_{x \to 0} f(x) = -2$ باشد آن‌گاه $\lim_{x \to 0} \left(f(x) + 2\right) \cos \frac{\pi}{x^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۱−

حل: گزینه «۲»

❖ **مثال:** اگر f تابعی کراندار باشد و در هیچ نقطه حد نداشته باشد آن‌گاه $(x^2 - 1)f(x)$ دقیقاً در چند نقطه حد دارد:

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) ۲

حل: گزینه «۴»

بررسی حد در تابع fog:

فرض کنیم $\lim_{x\to a} g(x) = b$ و $\lim_{x\to b} f(x) = L$ آیا می‌توان همواره نتیجه گرفت که:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = L$$

ابتدا به مثال‌های زیر توجه می‌کنیم سپس نتیجه می‌گیریم:

❖ **مثال:** فرض می‌کنیم $g(x) = 1$ ، $f(x) = \begin{cases} x - 3 & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$ ، در مورد حد تابع fog $\lim_{x\to 2}$ نظر دهید؟

حل: $\lim_{x\to 2} g(x) = 1$ و $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$ پس باید نتیجه بگیریم که:

$$\lim_{x\to 2} f(g(x)) = -2$$

اما مشاهده می‌کنیم که به ازاء هر $x \in R$ ،

$$f(g(x)) = 0 \quad (\text{چرا؟})$$

در نتیجه $\lim_{x\to 2} f(g(x)) = 0$ است.

❖ **مثال:** اگر $g(x) = [x]$ و $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ در مورد حد تابع fog در $x = \frac{1}{3}$ نظر دهید؟

حل:

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}} g(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 5$$

لذا باید نتیجه بگیریم که $\lim_{x \to \frac{1}{3}} fog = 5$ در حالیکه

$$f(g(x)) = \begin{cases} 2g(x) + 5 & , g(x) \neq 0 \\ 0 & , g(x) = 0 \end{cases}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} 2[x] + 5 & , [x] \neq 0 \quad \text{یعنی} \quad x \geq 1 \ \text{یا}\ x < 0 \\ 0 & , [x] = 0 \quad \text{یعنی} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

پس $\lim_{x \to \frac{1}{3}} fog = 0$

لذا مشاهده می‌کنیم که قضیه حدی ترکیب توابع، به صورتی که در قبل بیان شد نمی‌تواند صحیح باشد. عوامل اصلی در صحیح نبودن قضیه به صورت بالا آن است که g در یک همسایگی a ثابت باشد. یعنی وقتی $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ در یک همسایگی محذوف a داریم $g(x) = b$ و دیگر آن که در تابع f، $f(b) \neq b$ بنابراین صورت صحیح قضیه را به صورت زیر خواهیم داشت:

> ***قضیه :** فرض کنیم* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ *و* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = L$ *در این صورت،* $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = L$ *اگر و فقط اگر حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:*
>
> ۱) $f(b) = L$
>
> ۲) یک همسایگی محذوف a وجود دارد به طوری که به ازاء هر x از این همسایگی $g(x) \neq b$.

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۵ & , x \neq ۱ \\ ۲ & , x = ۱ \end{cases}$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۱} f(f(x))$ کدام است؟

حل:

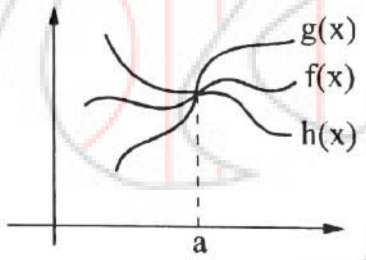
قضیه ساندویچ (اصل فشار)

اگر در یک همسایگی محذوف a، $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ و داشته باشیم:

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

آن‌گاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



❖ **مثال:** با استفاده از اصل فشار ثابت کنید $\lim\limits_{x \to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$.

حل: طبق تعریف تابع جزء صحیح :

$$\frac{۱}{x} - ۱ < \left[\frac{۱}{x}\right] \leqslant \frac{۱}{x}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم $x \to ۰^+$. اگر طرفین نامساوی فوق را در $x > ۰$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$۱ - x < x\left[\frac{۱}{x}\right] \leqslant ۱$$

ولی داریم $\lim\limits_{x \to ۰^+} (۱ - x) = \lim\limits_{x \to ۰^+} ۱ = ۱$ پس طبق اصل فشار:

$$\lim_{x \to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$$

حال فرض کنیم $x \to ۰^-$. طرفین نامساوی را در $x < ۰$ ضرب می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$۱ \leqslant x\left[\frac{۱}{x}\right] < ۱ - x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to ۰^-} x\left[\frac{۱}{x}\right] = ۱$$

رفع ابهام از حالت $\frac{۰}{۰}$: $(\lim\limits_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۰}{۰})$

برای رفع ابهام از حالت $\frac{۰}{۰}$، از روشهای زیر استفاده می‌کنیم:

۱) حذف عامل صفر شونده $(x - x_۰)$

۲) استفاده از هم ارزی‌های مثلثاتی و جبری

۳) استفاده از قاعده هوپیتال*

۱ـ حذف عامل صفر شونده:

در رفع ابهام از حالت $\frac{۰}{۰}$، اگر عامل صفر شونده که $(x - x_۰)$ است را از صورت و مخرج حذف کنیم عبارت از حالت ابهام خارج می‌شود. به اتحادهای زیر توجه کنید:

۱) $a^۲ - b^۲ = (a - b)(a + b)$

۲) $a^۳ \pm b^۳ = (a \pm b)(a^۲ + b^۲ \mp ab)$

❖ **مثال:** حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱}$

حل:

۲) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^۳ - a^۳}{x^۲ - a^۲}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱ - x^n}{۱ - x^m}$

حل:

$۱ - x^n = (۱ - x)(۱ + x + x^۲ + ... + x^{n-۱})$

$۱ - x^m = (۱ - x)(۱ + x + x^۲ + ... + x^{m-۱})$

نکته * به خاطر بسپاریم:

اگر به ازاء $x \to x_۰$ آن‌گاه $u \to ۱ \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_۰} \frac{۱ - u^n}{۱ - u^m} = \frac{n}{m}$

۴) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{۱ - \sqrt[۵]{x + ۲}}{۱ - \sqrt[۳]{\;\;}}$

حل:

$$5)\ \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^3+2(x-2)}{3(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)((x-2)^2+2)}{3(x-2)} = \frac{2}{3}$$

$$6)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+2x+x^2}-2}{2x}$$

حل:

۲ـ هم ارزی‌های توابع:

تعریف: دو تابع f و g را وقتی $x \to x_0$ آن‌گاه $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ هم ارز گویند هرگاه $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

در اینصورت می‌نویسیم:

$$f(x) \cong g(x)$$

علامت $\cong$ ، علامت هم ارزی است.

الف) هم‌ارزی‌های مثلثاتی:

۱) هم ارزی تابع sin :

$$1)\ \sin_{x\to 0} x \cong x$$

$$2)\ \sin_{x\to 0} (ax) \cong ax$$

$$3)\ \sin_{x\to 0} x^n \cong x^n$$

$$4)\ \sin^n_{x\to 0} x \cong x^n$$

و به طور کلی:

اگر $x \to x_0$ آن‌گاه $u \to 0 \longleftrightarrow \sin u \cong u$

به عنوان مثال:

$$\sin_{x\to 1} (\sqrt{x}-1) \cong \sqrt{x}-1$$

$$\sin_{x\to 2} (x^2-4) \cong x^2-4$$

۲ـ همارزی تابع tg:

$$۱)\ \underset{x\to ۰}{tg}\ x \cong x$$

$$۲)\ \underset{x\to ۰}{tg}\ (ax) \cong (ax)$$

$$۳)\ \underset{x\to ۰}{tg}\ x^n \cong x^n$$

$$۴)\ \underset{x\to ۰}{tg^n}\ x \cong x^n$$

و به طور کلی:

$$\boxed{\text{اگر } x \to x_۰ \text{ آنگاه } u \to ۰ \longleftrightarrow tgu \cong u}$$

❖ مثال:

$$۱)\ \underset{x\to ۰}{tg}\ x^۳ \cong x^۳$$

$$۲)\ \underset{x\to ۸}{tg}\ (\sqrt[۳]{x} - ۲) \cong \sqrt[۳]{x} - ۲$$

۳ـ همارزی $۱ - \cos u$:

میدانیم $۱ - \cos x = ۲\sin^۲ \frac{x}{۲}$ لذا وقتی $x \to ۰$، آنگاه:

$$۱ - \cos x \cong ۲(\sin \frac{x}{۲})^۲ = ۲(\frac{x}{۲})^۲ = \frac{x^۲}{۲}$$

لذا به طور کلی رابطه زیر را میتوانیم استفاده کنیم:

$$\boxed{\text{اگر به ازاء } x \to x_۰ \text{، آنگاه } u \to ۰ \longleftrightarrow ۱ - \cos u \cong \frac{u^۲}{۲}}$$

❖ مثال:

$$\underset{x\to ۰}{۱ - \cos(۲x)} \cong \frac{(۲x)^۲}{۲} = ۲x^۲$$

$$\underset{x\to \infty}{۱ - \cos(\frac{۱}{x})} \cong \frac{(\frac{۱}{x})^۲}{۲} = \frac{۱}{۲x^۲}$$

۴ـ همارزی $۱ - \cos^m u$:

$$\boxed{\text{وقتی } x \to x_۰ \text{، آنگاه } u \to ۰ \longleftrightarrow ۱ - \cos^m u \cong m(\frac{u^۲}{۲})}$$

❖ **مثال:**

$$\lim_{x\to 0} (\cos 2x - \cos 3x) \cong \lim_{x\to 0} -2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{-x}{2} \cong -2\left(\frac{5x}{2}\right)\left(\frac{-x}{2}\right)$$

۷- در محاسبه حد توابع مثلثاتی توجه به دو رابطه‌ی مثلثاتی زیر در حل مسائل کمک می‌نماید:

$$1)\ (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

$$2)\ \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$$

تذکر مهم * اگر بلافاصله پس از استفاده از یک هم ارزی عبارتها ساده شوند (**جمع جبری صفر شود**) استفاده از آن هم ارزی غلط است.

❖ **مثال:**

$$\lim_{x\to 0} (x^2 - \sin^2 x) \neq \lim_{x\to 0} (x^2 - x^2) = 0$$

۸- استفاده از هم ارزی‌های زیر در تستها کمک می‌نماید.

$$1)\ x - \sin x \cong \frac{x^3}{6}$$

$$2)\ \operatorname{tg}x - x \cong \frac{x^3}{3}$$

$$3)\ \operatorname{tg}x - \sin x \cong \frac{x^3}{2}$$

در همه‌ی هم ارزی‌های بالا $x \to 0$ میل می‌کند.

❖ **مثال:** حدود زیر را بیابید:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{tg}3x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^2}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{x}$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x \,.\, \sin 2x \,\dots\, \sin nx}{x^n} \qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2}$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{1-\sqrt{\cos x}} \qquad 7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

$$8)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} \qquad 9)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sin x)}{x}$$

$$10)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\operatorname{tg}x - 1} \qquad 11)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

ب ـ هم ارزی توابع جبری

۱) هر کثیرالجمله از x که فاقد عدد ثابت می‌باشد، وقتی $x \to 0$ میل می‌کند، هم ارز است با آن جمله از خود که کوچک‌ترین درجه را دارد.

❖ **مثال:**

$$2x^2 - x \cong -x$$
$$\sqrt[3]{x} + x^2 - x \cong \sqrt[3]{x}$$
$$x \to 0$$

۲) هم ارزی مهم:

وقتی به ازاء $x = x_0$ ، $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[m]{1 \pm f(x)} \cong 1 \pm \frac{1}{m} f(x)$

❖ **مثال:**

$$\underset{x \to 0}{\sqrt[5]{1 + x}} \cong 1 + \frac{1}{5} x$$
$$\underset{x \to 0}{\sqrt[3]{1 + x^2}} \cong 1 + \frac{1}{3} x^2$$

❖ **مثال:** حاصل حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^5 + 5x} \xrightarrow{\text{طبق (1)}}$

۲) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + x}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} \xrightarrow{\text{طبق (1)}}$

۳) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}{x^2} \xrightarrow{\text{طبق (2)}}$

۴) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x} \xrightarrow{\text{طبق (2)}}$

❖ **مثال:** اگر $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^4 + bx^2 + cx}{2x^2 - x} = 2$ آن‌گاه c کدام است؟

۱) -2 ‏ ۲) 3 ‏ ۳) -3 ‏ ۴) -4

حل:

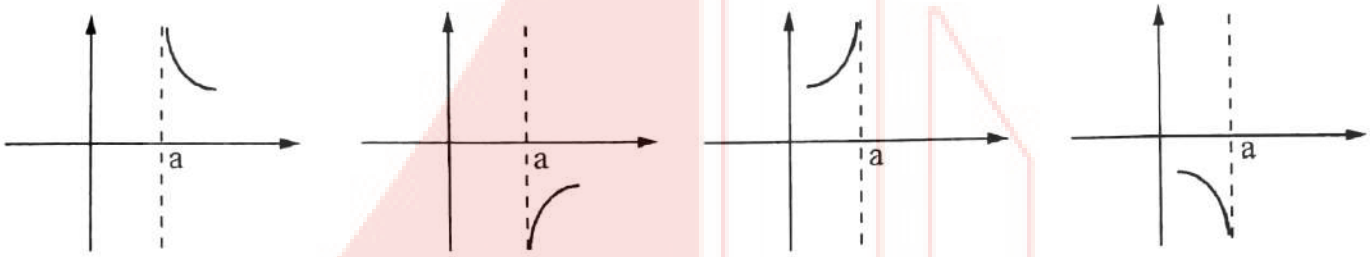
فرض کنید وقتی $x \longrightarrow x_0$ ، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی بزرگ و بزرگ‌تر شود و به هیچ عدد متناهی ثابتی میل نکند، در این شرایط حدِ بی‌نهایت تابع مطرح می‌شود در این حالت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

حال وقتی $x \to x_0$ ، $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی در جهت منفی، بیشتر و بیشتر شود و به هیچ عدد متناهی ثابتی نگراید. می‌گوییم :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

چهار شکل زیر حدِ بی‌نهایت را مطرح می‌کند :



$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

تذکر : در محاسبه حدها موارد زیر کمک می‌نمایند.

۱) $$\lim_{x \to ۰^+} \frac{۱}{x^n} = \begin{cases} +\infty & , \quad n = ۲k \\ +\infty & , \quad n = ۲k + ۱ \end{cases}$$

۲) $$\lim_{x \to ۰^-} \frac{۱}{x^n} = \begin{cases} +\infty & , \quad n = ۲k \\ -\infty & , \quad n = ۲k + ۱ \end{cases}$$

❖ **مثال:** حدهای زیر را بیابید؟

۱) $\lim_{x \to ۳^+} \frac{۱}{۳ - x}$

۲) $\lim_{x \to ۲^-} \frac{x}{(۲ - x)^۲}$

۳) $\lim_{x \to ۳^-} \frac{[x] - ۳}{x - ۳}$

۴) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱ + \operatorname{Cos}x}{۱ - \operatorname{Sin}x}$

۵) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \operatorname{tg}x$

۶) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} \operatorname{tg}x$

۷) $\lim_{x \to ۳^+} \frac{\sqrt{x^۲ - ۹}}{x - ۳}$

حل:

چند قضیه :

قضیه ۱ : اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ (M عدد ثابتی است) آن‌گاه:

الف- اگر $M > 0$

۱) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

ب- اگر $M < 0$

۲) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty$

قضیه ۲ : اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ (M عدد ثابتی است) آن‌گاه:

الف- اگر $M > 0$

۱) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty$

ب- اگر $M < 0$

۲) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = +\infty$

❖ **مثال:** ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to 0} f(x+a) = +\infty$.

حل: با فرض $x + a = t$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x + a = t \\ x \longrightarrow 0 \Rightarrow t \longrightarrow a \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t \to a} f(t) = +\infty$$

❖ **مثال:** مطلوبست محاسبه حدود زیر :

۱) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{1}{x}\right]$

حل :

۲) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(-2)^{[x]}}{x - 2}$

حل :

❖ **مثال:** حد $\frac{-x}{x - 1}$ وقتی $x \longrightarrow 1^-$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) $+\infty$ ۴) 1

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** حد $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{[x]}{x}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) 2 ۴) $+\infty$

حل: گزینه (۴)

مثال: هرگاه منحنی $y = \frac{+1}{x^2 + ax + b}$ در همسایگی (۱) مطابق شکل روبرو باشد $a + b$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3

۳) 1 ۴) -1

حل: گزینه (۴)

حد در بی‌نهایت

وقتی x به طور دل‌خواه از هر عدد مثبت بزرگی، بزرگ‌تر گردد گوئیم x میل می‌کند به سمت $+\infty$ ، در این حالت اگر f(x) به عدد ثابت b نزدیک شود گوئیم:

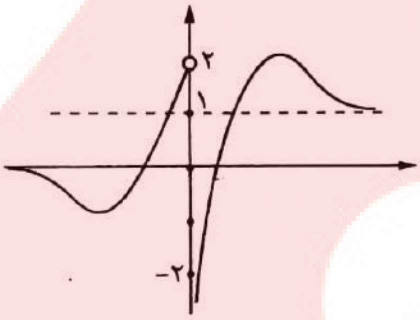
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$

که شکل آن در بالا ترسیم شده است. ضمناً وقتی x به طور دل‌خواه از هر عدد منفی، کوچک‌تر شود گوئیم $x \to -\infty$ در این حالت اگر f(x) به عدد ثابت b نزدیک شود گوئیم:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

شکل آن در بالا رسم شده است.

❖ **مثال:** در شکل روبرو مقادیر خواسته شده را بیابید؟



۱) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

۲) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

۳) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

۴) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

۵) $f(0)$

حل: با توجه به تعاریف حد در بی‌نهایت و حدِ بی‌نهایت تابع خواهیم داشت :

۱) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

۲) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

۳) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

۴) $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ ·

۵) $f(0) =$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{1}{x+1}$ آن‌گاه $\lim_{x\to+\infty} (fof)_{(x)}$ کدام است؟

۱) هر کثیرالجمله از x وقتی $x \to \infty$ ، هم ارز است با جمله‌ای که توان x در آن بزرگ‌تر است:

❖ **مثال:**

$$۱)\ \underset{x \to \infty}{x^{۵} - ۳x^{۲} - ۳ \cong x^{۵}}$$

$$۲)\ \underset{x \to \infty}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \cong \sqrt{x}}$$

۲) وقتی $x \to \infty$ آن‌گاه:

$$۱)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^{۲} + a} \cong |x|$$

$$۲)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^{۲} + bx + c} \cong |x + \frac{b}{۲}|$$

به اتحاد $x^{۲} + bx + c = (x + \frac{b}{۲})^{۲} + c - \frac{b^{۲}}{۴}$ دقت کنید.

$$۳)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^{۲} + bx + c} \cong \sqrt{a}\,|x + \frac{b}{۲a}|$$

❖ **مثال:**

$$\underset{x \to -\infty}{\sqrt{۲x^{۲} - ۳x + ۱}} \cong \underset{x \to -\infty}{\sqrt{۲}\,|x - \frac{۳}{۲(۲)}|} \cong \underset{x \to -\infty}{\sqrt{۲}\,|x - \frac{۳}{۴}|} \cong -\sqrt{۲}\,(x - \frac{۳}{۴})$$

به طور کلی:

$$\underset{x \to \infty}{\sqrt[p]{ax^{p} + bx^{p-۱} + ...}} = \begin{cases} \sqrt[p]{a}\,|x + \frac{b}{ap}| & \text{زوج } = p \text{ ،} \\ \sqrt[p]{a}\,(x + \frac{b}{ap}) & \text{فرد } = p \text{ ،} \end{cases}$$

❖ **مثال:**

$$\underset{x \to -\infty}{\sqrt[۴]{x^{۴} - ۳x^{۳} - ۲}} \cong \underset{x \to -\infty}{\sqrt[۴]{۱}\,|x + \frac{-۳}{۱ \times ۴}|} \cong \underset{x \to -\infty}{|x - \frac{۳}{۴}|} = -x + \frac{۳}{۴}$$

$$\underset{x \to -\infty}{\sqrt[۶]{۲x^{۶} - ۴x^{۴} - ۳x}} \cong \underset{x \to -\infty}{\sqrt[۶]{۲}\,|x + \frac{۰}{۱۲}|} \cong \underset{x \to -\infty}{\sqrt[۶]{۲}\,|x|} \cong -\sqrt[۶]{۲}\,x$$

۳)

الف) اگر $0 < a < 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

ب) اگر $a > 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

حل: گزینه (۱)

۲ـ رفع ابهام از حالت $\frac{\infty}{\infty}$:

برای رفع ابهام در این حالت از هم‌ارزی‌های جبری استفاده می‌کنیم.

❖ **مثال:** حدهای زیر را محاسبه کنید؟

۱) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3}{x^2 + 2}$ ۲) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^2 - 5x}$

۳) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{x^2 + 1}$ ۴) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{3x^2 + x + 1}}$

حل: ۱)

راه اول: راه تشریحی:

راه دوم: با استفاده از هم‌ارزی‌ها، بزرگ‌ترین درجه‌ها را نسبت به هم می‌گیریم.

۳) راه اول:

راه دوم: با استفاده از هم‌ارزی‌ها:

۳)

۴)

❖ **مثال:** حدهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x - \cos x}{2x}$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{[x]}$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{2x+1}\right)\left(\dfrac{1-2x^2}{x+1}\right)$

۵) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{1}{x}\right]$

۱)

✦ ***نکته** : وقتی داخل براکت بی‌نهایت شود می‌توانیم براکت را برداریم.*

۲)

توجه : نکته گفته شده در بالا وقتی جمع جبری صفر شود صحیح نیست.

۳)

۴)

۵)

❖ **مثال:** مطلوبست محاسبه حدود زیر :

۱) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5x}{x+1}$

۲) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x^2 - x)^5}{x^5 (x-1)}$

۳) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x^۲ + ۱} \sin x$

۴) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{۲x + ۱}}$

۵) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{۲^n \times ۲ + ۳^{n+۲}}{۲^n + ۳^{n-۱}}$

۶) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n! + (n-۱)!}{n! + (n+۱)!}$

۷) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{۲x + ۱}{x - ۱}\right]$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{5\sqrt{x^2+2}}$

۳ـ رفع ابهام از حالت $\infty \times 0$:

برای رفع ابهام از حالت $\infty \times 0$ عامل بی‌نهایت را به مخرج انتقال داده و مسئله را در حالت $\frac{0}{0}$ حل می‌کنیم.

❖ **مثال:** حدود زیر را بیابید.

1) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}2x\, \operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}-x)$

۴ـ رفع ابهام از حالت $\infty - \infty$:

برای رفع ابهام در این حالت، سعی می‌کنیم مسئله را به حالت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کنیم در این حالت:

الف- اگر $x \to a$ با مخرج مشترک‌گیری مسئله را حل می‌کنیم.

ب- اگر $x \to \infty$ با استفاده از هم‌ارزی رادیکالی و ... مسئله را حل می‌کنیم.

❖ **مثال:** حدهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{x \to ۰} \left(\frac{۱}{x(x+۱)} - \frac{۱}{x}\right)$

۲) $\lim\limits_{x \to ۰} \left(\frac{۱}{x^{۲}} - \frac{۱}{x^{۴}}\right)$

۳) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^{۲} + ۲x} - \sqrt{x^{۲} - ۲x}\right)$

۴) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$

❖ **مثال:** a و b را چنان بیابید که:

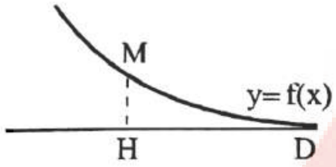
$$\lim_{x \to +\infty} \left(ax + ۱ - \sqrt{x^{۲} + bx + ۳}\right) = ۲$$

«مجانبها»

۱ـ شاخه بی‌نهایت منحنی :

گوییم منحنی تابع $y = f(x)$ دارای شاخه بی‌نهایت است هرگاه نقطه یا نقاطی روی منحنی باشد که حداقل یکی از مختصه‌های آن، (طول یا عرض) به سمت ∞ میل کند. به عنوان مثال تابع $y = \frac{1}{x^{2}}$ دارای شاخه بی‌نهایت است زیرا وقتی $x \longrightarrow \pm\infty$ ، $y \longrightarrow 0$.

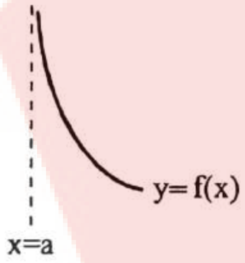
۲ـ تعریف خط مجانب :



هرگاه منحنی تابع $y = f(x)$ دارای شاخه بی‌نهایت باشد خط D را مجانب آن شاخه گوییم هرگاه نقطه متغیر M روی آن شاخه بی‌نهایت دور شود فاصله آن از خط D صفر شود.

۳ـ مجانب قائم :

مجانب قائم تابع همان حدِ بی‌نهایتِ تابع است یعنی هرگاه یکی از حالت‌های زیر اتفاق افتد خط $x = a$ مجانب قائم است.



۱) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to a^{+}} f(x) = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to a^{-}} f(x) = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to a^{+}} f(x) = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x \to a^{-}} f(x) = +\infty$

*نکته ۱ * مجانب قائم معمولاً در توابع کسری می‌تواند اتفاق بیفتد و برای بررسی وجود مجانب قائم و یافتن آن مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. البته تابع‌های غیر کسری مثل $y = \ln x$ نیز می‌تواند مجانب قائم داشته باشند.*

*نکته ۲ * واضح است که $x = a$ (خط مجانب قائم) جزء دامنه تعریف تابع نیست اما $x = a^{+}$ یا $x = a^{-}$ یعنی حداقل یکی از آن‌ها باید متعلق به دامنه باشد تا $x = a$ مجانب قائم تابع باشد.*

*نکته ۳ * اگر ریشه مخرج، صورت کسر را صفر کند آن ریشه به عنوان خط مجانب تابع نیست مگر در حالتهای خاص، به عبارت دیگر اگر حد تابع در $x \longrightarrow a^{+}$ یا $x \longrightarrow a^{-}$ برابر بی‌نهایت شود آن‌گاه $x = a$ مجانب قائم است.*

❖ **مثال:** مجانبهای قائم منحنی‌های زیر را در صورت وجود بیابید :

۱) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - 8}$

۲) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$

۳) $y = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 4}$

۴) $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

❖ **مثال:** نمودار تابع $y = \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ در اطراف مجانب قائم خود به کدام صورت است؟

حل: گزینه (۳)

۴ـ مجانب افقی :

گوییم هرگاه $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ آن‌گاه خط $y = b$ مجانب افقی تابع است.

نکته ۱ * توابعی که دامنه محدود دارند مجانب افقی ندارند.

نکته ۲ * در تعیین مجانب افقی تابع ، می‌توانیم از هم ارزی‌های بی‌نهایت بزرگ استفاده کنیم یا در کل، حد تابع را وقتی $x \longrightarrow \infty$ محاسبه کنیم.

❖ **مثال:** مجانب افقی توابع زیر را بیابید :

۱) $y = \dfrac{1 - x^3}{2 + 3x^3}$

۲) $y = x - \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

$$۳)\ y = \frac{x}{\sqrt{۴ - x^{۲}}}$$

❖ **مثال**: نمودار تابع $y = a + \frac{x - ۲}{x^{۲} - ۳x + ۳}$ چند مجانب دارد؟

۱)   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

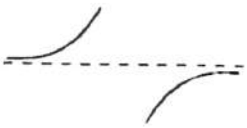
حل: گزینه (۱)

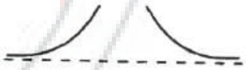
❖ **مثال**: معادله خط مجانب نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{۱}{x} + \frac{۴ - ۲x}{\sqrt{x^{۲} - ۲x}}$ وقتی $x < ۰$ کدام است؟

۱) $y = -۲$ ۲) $y = -۱$ ۳) $y = ۱$ ۴) $y = ۲$

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال**: نمایش منحنی تابع $y = \frac{x^{۲} - ۱}{x^{۲} + ۱}$ در اطراف مجانب افقی خود به کدام صورت است؟

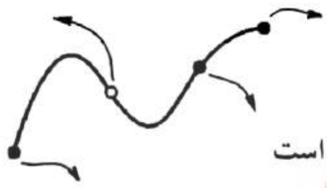
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پیوستگی:



به شکل روبرو توجه کنید.

با توجه به موارد مطرح شده در شکل، پیوستگی رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

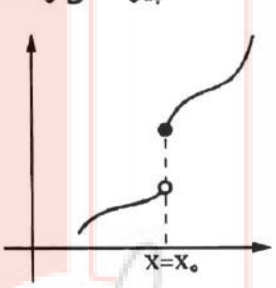
۱ـ تابع f در نقطه $x_0 \in D_f$ را پیوسته گوئیم هرگاه:

۱) تابع f در $x = x_0$ حد داشته باشد یعنی: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

۲) این حد با مقدار تابع در نقطه مورد نظر برابر باشد یعنی: $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

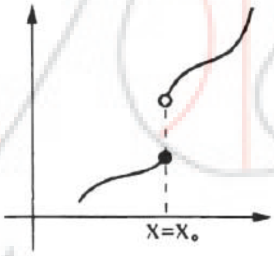
تذکر ۱: هرگاه شرط زیر برقرار باشد تابع در $x = x_0$ نقط پیوستگی راست دارد (مطابق شکل)

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$



تذکر ۲: هرگاه شرط زیر برقرار باشد تابع در $x = x_0$ نقط پیوستگی چپ دارد مطابق شکل

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$



تذکر ۳: برای‌بررسی‌پیوستگی یک‌تابع دریک‌نقطه باید حدچپ‌وراست و مقدار تابع را در نقطه مورد نظر یافته، سپس نتیجه‌گیری کنیم.

❖ **مثال:** پیوستگی تابع $f(x) = [۲x]$ را در $x = \frac{۱}{۲}$ بررسی کنید.

حل: $f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱$ $\qquad \lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^-} [۲x] = ۰ \quad , \quad \lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^+} [۲x] = ۱$

تابع در $x = \frac{۱}{۲}$ پیوسته و با توجه به این‌که حد راست تابع با مقدار آن برابر است پس تابع پیوستگی راست دارد.

❖ **مثال:** اگر تابع
$$f(x) = \begin{cases} [x-۱] + ۲x & , \quad x < ۳ \\ ۲ + b & , \quad x = ۳ \\ \sqrt{x^۲ - ۲x + ۱} + a & , \quad x > ۳ \end{cases}$$
در $x = ۳$ پیوسته باشد a و b را بیابید.

❖ **مثال:** تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{|x + 3|} & , \quad x \neq -3 \\ [x^2 - 11/5] & , \quad x = -3 \end{cases}$ داده شده .این تابع در نقطه $x = -3$ چه نوع پیوستگی دارد؟

❖ **مثال:** به ازاء کدام مقدار A تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} & , \quad x \neq 0 \\ A & , \quad x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) $\frac{-1}{3}$ ‏ ۴) ۱-

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال:** در نقطه به طول $x = \frac{1}{2}$، تابع $f(x) = [x + \frac{3}{2}] + [x - \frac{1}{2}]$ .....

۱) پیوستگی چپ دارد. ‏ ۲) پیوستگی راست دارد. ‏ ۳) پیوسته است. ‏ ۴) فقط معین است.

✦ **تذکر ۱ :** *اگر دو تابع f , g در $x = x_0$ پیوسته باشند آن‌گاه $f + g$ و $f - g$ در $x = x_0$ پیوسته است.*

✦ **تذکر ۲ :** *اگر f در $x = x_0$ پیوسته باشد آن‌گاه $|f|$ در $x = x_0$ پیوسته است.*

✦ **تذکر ۳ :** *توابع $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ به ازای ریشه‌های مخرج پیوسته نمی‌باشند.*

✦ **تذکر ۴ :** *تابع $y = \sqrt[2n]{f}$ زمانی در $x = x_0$ پیوسته است که $f \geq 0$ باشد.*

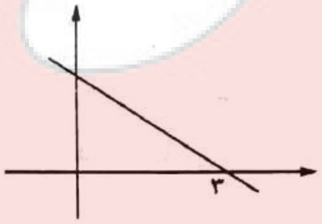
❖ **مثال:** تابع $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

بررسی پیوستگی تابع fog در یک نقطه:

قضیه * اگر تابع g در $x = a$ پیوسته و تابع f در $b = g(a)$ پیوسته باشد آن‌گاه fog در $x = a$ پیوسته است.

❖ **مثال:** اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in z \\ -1 & , x \notin z \end{cases}$ آن‌گاه پیوستگی fof را در $x = 1$ بررسی کنید؟

❖ **مثال:** نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + b}{a - x} & , x \neq a \\ 1 & , x = a \end{cases}$ شکل زیر است. $a + b$ کدام است؟



۱) ۳-

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۸

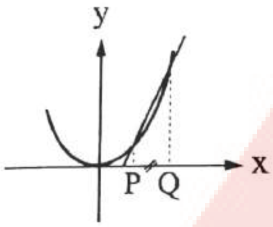
حل: گزینه (۴)

مشتق

مشتق

این فصل، یکی از مهم‌ترین مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال یعنی مشتق را معرفی می‌کند برای این منظور، تعبیرهای فیزیکی و هندسی بکار گرفته می‌شوند. سؤال اساسی که در این بخش مطرح می‌کنیم و ایده اصلی را بر آن اساس در نظر می‌گیریم به صورت زیر است.

❖ **مثال:** شیب خط مماس بر منحنی $y = x^۲$ در نقطه $(۴ , ۲)$ کدام است؟

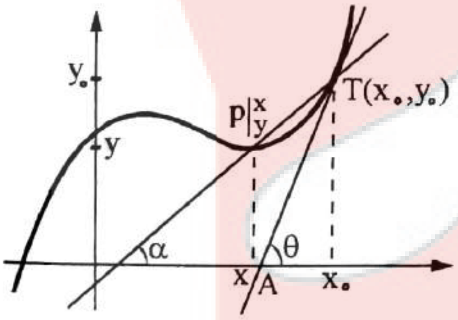


حل: برای تعیین یک خط، دو نقطه متمایز لازم داریم. اما تنها نقطه‌ای که از خط مماس در $(۴ , ۲)$ در دسترس ماست خود نقطه $(۴ , ۲)$ است. برای رفع این مشکل یک نقطه Q روی منحنی $y = x^۲$، نزدیک نقطه $P(۲ , ۴)$ انتخاب می‌کنیم و شیب خط گذرنده از دو نقطه P و Q را محاسبه می‌کنیم، برای مثال $Q(۲/۱ , (۲/۱^۲))$، بنابراین شیب خط

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{(۲/۱)^۲ - ۲^۲}{۲/۱ - ۲} = \frac{۰/۴۱}{۰/۱} = ۴/۱$$

بنابراین، این عدد ۴/۱ یک تخمین از شیب خط مماس است. حال اگر بخواهیم یک تخمین بهتر بدست آوریم همین عمل را با انتخاب $Q(۲/۰۱ , (۲/۰۱)^۲)$ تکرار می‌کنیم و به نظر می‌آید هر چه Q به P نزدیکتر شود <u>شیب، واقعی‌تر</u> بنظر می‌رسد. وقتی عددی مانند Δx یا h (مثبت یا منفی) بسیار کوچک را در نظر بگیریم شیب، $\frac{(۲ + h)^۲ - ۲^۲}{h}$ است. برای تعیین آن با توان رسانی و اینکه $h \to ۰$ میل نماید حد این عبارت، ۴ خواهد شد.

تعبیر هندسی مشتق:



منحنی تابع $y = f(x)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم خط مماس بر منحنی تابع را در نقطه $T(x_۰ , y_۰)$ رسم کنیم. می‌دانیم برای رسم هر خط، به دو نقطه نیاز داریم. نقطه P را روی منحنی تابع، در نزدیکی T در نظر می‌گیریم و قاطع PT را رسم می‌کنیم. اگر P به T میل کند، آنگاه همان خط مماس حاصل خواهد شد. به شکل روبرو توجه کنید. با توجه به تعریف ضریب زاویه داریم:

$$m_{PT} = \frac{y - y_۰}{x - x_۰} = tg\alpha$$

اگر خط AT را خط مماس در نظر بگیریم وقتی P به T میل می‌کند، زاویه‌ی α به θ میل می‌کند پس ضریب زاویه‌ی PT به ضریب زاویه‌ی خط مماس میل می‌کند. با توجه به اینکه وقتی $P \to T$، باید $x \to x_۰$ پس

$$m_{AT} = tg\theta = \lim_{\alpha \to \theta} tg\alpha = \lim_{x \to x_۰} \frac{y - y_۰}{x - x_۰} = \lim_{x \to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰}$$

❖ **مثال:** تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. حاصل $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ را یافته و سپس حد آنرا وقتی $h \to ۰$ بیابید.

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک بازه، حول یک نقطه $x_\circ$ تعریف شده باشد اگر

$$f'(x_\circ) = \lim_{h \to \circ} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \qquad (1)$$

موجود باشد، آن را مشتق تابع f در $x_\circ$ نامیده و آنرا با $f'(x_\circ)$ نشان می‌دهیم. در این صورت، f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر نامیده می‌شود. ضمناً با تبدیل $h = x - x_\circ$، به فرمولی هم‌ارز با آن می‌رسیم:

$$f'(x_\circ) = \lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} \qquad (2)$$

نکته ۱ * اگر حد راست و چپ رابطه (۱) یا (۲) را محاسبه کنیم، مشتق راست و چپ تابع محاسبه خواهد شد یعنی:

$$f'(x^+_\circ) = \lim_{h \to \circ^+} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \qquad \text{(مشتق راست)}$$

$$f'(x^-_\circ) = \lim_{h \to \circ^-} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h} \qquad \text{(مشتق چپ)}$$

نکته ۲ * پیوستگی تابع در $x=x_\circ$، شرط لازم برای مشتق‌پذیری تابع است و نه کافی، به عبارت دیگر، اگر تابع f در $x = x_\circ$ پیوسته باشد، ممکن است در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد.

نکته ۳ * اگر $f'(x^-_\circ) = f'(x^+_\circ)$ باشد، تابع در $x = x_\circ$ مشتق‌پذیر است. یعنی مشتق تابع در $x_\circ$ موجود است (توجه کنید که تابع در $x_\circ$ پیوسته است).

نکته ۴ * اگر $f'(x_\circ)$ برابر ∞ گردد، گوئیم تابع در $x = x_\circ$ مشتق‌پذیر نیست.

❖ **مثال:** هرگاه $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + 3\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = x^2$ باشد $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه (۳)

> **نکته ۵** * به طور کلی، فرمول زیر را در تست‌ها می‌توانیم استفاده کنیم: (f در a مشتق‌پذیر است)
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + kh) - f(a + nh)}{h} = (k - n)\, f'(a)$$

❖ **مثال:** اگر $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x - h)}{h} = 2\sqrt{x}$، آن‌گاه $f'(4)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۴ ۴) ۲

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال:** مشتق $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

❖ **مثال:** آیا تابع $f(x) = |x - 1|$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر است؟

❖ **مثال:** با استفاده از تعریف مشتق، مشتق $f(x) = \sqrt{x}$ را در $x = 1$ بیابید؟

❖ **مثال:** دو نقطه به طول‌های ۱ و $h+1$ بر روی نمودار تابع با ضابطه $y=3x^{17}$ انتخاب کنید. ضریب زاویه خط گذرنده بر دو نقطه، وقتی $h \to 0$ کدام است؟

۱) ۳ ‏ ‏ ‏ ۲) ۱۴ ‏ ‏ ‏ ۳) ۱۷ ‏ ‏ ‏ ۴) ۵۱

حل: گزینه (۴)

***نکته ۶ *** *اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این نقطه پیوسته است لذا از مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه $x=a$ بلافاصله نتیجه می‌گیریم که:*

(۱) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$: حد چپ = حد راست

(۲) $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f'(x)$: مشتق چپ = مشتق راست

❖ **مثال:** اگر تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^2 & , x<1 \\ bx^3+2x & , x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر باشد، $a+b$ چقدراست؟

۱) ۶- ‏ ‏ ‏ ۲) ۴- ‏ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ‏ ۴) ۶

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال:** اگر $f'(-2)=2$، مقدار $\lim\limits_{t \to -2} \dfrac{f(t)-f(-2)}{2(t+2)}$ کدام است؟

۱) ۲- ‏ ‏ ‏ ۲) ۱- ‏ ‏ ‏ ۳) ۱ ‏ ‏ ‏ ۴) ۲

حل: گزینه (۳)

۳ـ مشتق‌های یکطرفه:

مشتق راست و چپ یک تابع در نقطه x_0 را چنین تعریف کردیم:

$$۱)\quad f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$۲)\quad f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

منظور از $\begin{cases} h \to 0^+ \\ x_0 + h = x_0^+ \end{cases}$ یعنی مقادیر کمی بیشتر از x_0 و منظور از $\begin{cases} h \to 0^- \\ x_0 + h = x_0^- \end{cases}$، مقادیر کمی کمتر از x_0 است. هرگاه دو حد فوق، ***موجود، متناهی و برابر*** باشند، آنگاه تابع در $x = x_0$ مشتق‌پذیر است.

❖ **مثال:** هرگاه $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \geqslant 1 \\ x^2 & , \quad x < 1 \end{cases}$، آن‌گاه $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

❖ **مثال:** در تابع $f(x) = |x|$ حاصل $f'(0^+)$ و $f'(0^-)$ را محاسبه کنید؟

حل: با توجه به تعریف مشتق تابع، برای محاسبه مشتق در یک نقطه از تعریف دوم استفاده می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون $f'(0^+) \neq f'(0^-)$، لذا تابع در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

مشتق‌پذیری تابع‌های ناپیوسته

هرگاه تابع f در $x = a$ پیوسته و معین باشد، آنگاه f را در $x = a$ مشتق‌پذیر گوییم، هرگاه حد عبارت $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وجود داشته و متناهی باشد.

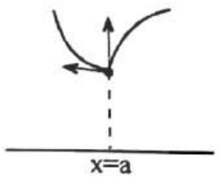
از تعریف فوق به سرعت نتیجه می‌گیریم که :

> **اگر یک تابع در یک نقطه مشتق پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته است ولی عکس آن همواره صادق نیست.**

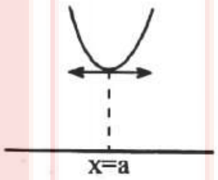
تذکر * با توجه به مطلب بالا، اگر یک تابع در یک نقطه پیوسته نباشد، در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست.

تذکر * مماس عمودی یعنی مشتق ∞ تعریف نمی‌شود.

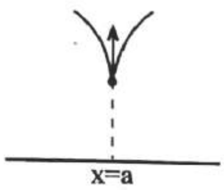
به شکلهای زیر دقت کنید :



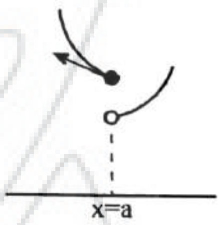
مشتق چپ و راست در $x = a$ نابرابرند و تابع در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.



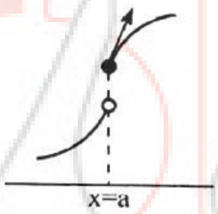
تابع در $x = a$ مشتق‌پذیر است.



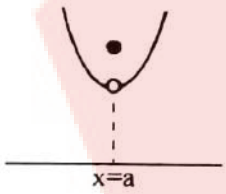
$f'(a) = \infty$ مشتق در $x = a$ وجود ندارد.



تابع در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است اما مشتق چپ دارد.



تابع در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است اما مشتق راست دارد



تابع در $x = a$ ناپیوسته و هیچگونه مماسی ندارد پس در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است.

❖ **مثال:** تابع f در مجموعه اعداد حقیقی بوسیله‌ی $f(x) = \begin{cases} (x-۱)^{۲} & ، \quad x \geqslant ۱ \\ ۲ & ، \quad x < ۱ \end{cases}$ تعریف شده این تابع در $x = ۱$:

۱) نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ

۲) فقط مشتق چپ دارد

۳) فقط مشتق راست دارد

۴) مشتق‌پذیر است

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 1 & , x \geq 1 \\ x^2 + 1 & , x < 1 \end{cases}$، آن‌گاه مطلوبست محاسبه حدود زیر:

۱) $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$

۲) $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$

۳) $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(1 - h) - f(1)}{h}$

حل: ۱) حد خواسته شده، تعریف مشتق تابع در $x = 1$ از سمت راست است زیرا وقتی $h \to 0^+$ آن‌گاه $1 + h \to 1^+$ پس:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = f'_+(1)$$

پس کافیست از ضابطه‌ی بالایی مشتق گرفته و مقدار قرار دهیم.

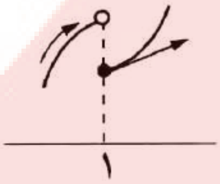
دقت کنید که تابع در $x = 1$ از راست پیوسته است.

$$f'(x) = 6x^2 \Big|_{x = 1} = 6$$

۲) حد خواسته شده تعریف مشتق تابع در $x = 1$ از سمت چپ است زیرا وقتی $h \to 0^-$ آن‌گاه $1 + h \to 1^-$ پس:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = f'_-(1)$$

اما تابع در $x = 1$ از سمت چپ پیوسته نیست. به شکل فرضی زیر دقت کنید چون تابع در $x = 1$ از چپ پیوسته نیست لذا رسم مماس در $x = 1$ از چپ امکانپذیر نیست پس مشتق چپ وجود ندارد.



۳) برای این‌که تعیین کنیم که مشتق چپ یا راست است با توجه به این‌که $h \to 0^-$ آن‌گاه $1 - h \to 1^+$ پس مشتق از راست است اما هنوز تعریف مشتق نیست برای این‌که به تعریف مشتق تبدیل شود به صورت زیر عمل می‌کنیم (توجه کنید که در تعریف مشتق هر ضریبی که برای h در $f(x + h)$ داریم باید در پایین باشد).

$$-\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1 - h) - f(1)}{-h} = -f'_+(1) = -6$$

تذکر مهم * از بحث‌های بالا به نتیجه مهم زیر می‌رسیم:

برای بررسی مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه به الگوریتم زیر توجه می‌کنیم.

پس به خاطر می‌سپاریم که در تعیین مشتق‌پذیری یک تابع، ابتدا حد تابع را در آن نقطه بررسی کرده و سپس سراغ پیوستگی تابع در آن نقطه می‌رویم از هر سمتی که تابع پیوسته باشد سراغ مشتق تابع از آن سمت می‌رویم. توجه کنید که تابع ممکن است از یک سمت پیوسته باشد اما از آن سمت مشتق‌پذیر نباشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

❖ **مثال:** مشتق‌پذیری توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

$$1)\ f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ x^2+1 & , x < 0 \end{cases}$$

حل: تابع در $x = 0$ ناپیوسته است لذا در این نقطه مشتق‌پذیر نیست، ولی در بحث وجود مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه دقت می‌کنیم که تابع در $x = 0$ از راست پیوسته است پس سراغ وجود مشتق از این سمت می‌رویم.

$$f'_+(0) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Bigg|_{x=0^+} = +\infty$$

چون مشتق تابع در $x = 0$ از راست ∞ شده، با این‌که تابع در $x = 0$ از راست پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌ناپذیر است. پس نه مشتق راست وجود دارد نه چپ.

$$2)\ f(x)=\begin{cases} x^3 & , x \geq 2 \\ -x^2+12 & , x < 2 \end{cases}$$

حل: تابع در $x = 2$ پیوسته است پس سراغ مشتق چپ و راست تابع در این نقطه می‌رویم اگر مشتق چپ و راست برابر باشند، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است.

$$f'_+(2) = 3x^2\Big|_{x=2} = 12 \qquad f'_-(2) = -2x\Big|_{x=2} = -4$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$، پس تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

حل:

$$3)\ f(x) = [\sin x] \quad \text{در} \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} [\sin x] = 0 \quad , \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

چون حد چپ و راست تابع در $x = \frac{\pi}{2}$ با مقدار تابع برابر نیست، پس رسم مماس از هیچ قسمتی امکان‌پذیر نیست لذا تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است و مماسی از چپ یا راست بر تابع رسم نمی‌شود.

مشتق‌ناپذیری در توابع پیوسته

۱ـ هرگاه مشتق راست و چپ تابع در یک نقطه مفروض $x = a$ یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ گردد تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نخواهد بود در این حالت مماس رسم شده بر منحنی در این نقطه موازی محور y هاست شکل منحنی در نزدیکی این نقطه به یکی از دو صورت زیر است:

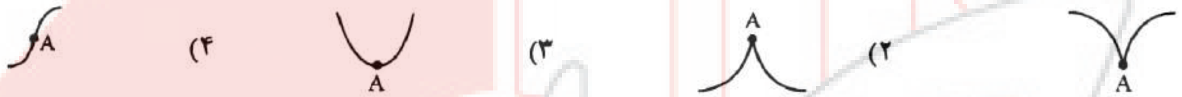
$$\begin{cases} f'_+(a) = +\infty \\ f'_-(a) = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(a) = -\infty \\ f'_-(a) = +\infty \end{cases}$$

به این نقطه، نقطه بازگشت گویند.

❖ **مثال:** برای تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ در $x = 0$ مشتق‌پذیری را بررسی کنید.

❖ **مثال:** رفتار منحنی $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}$ در نزدیکی نقطه A به طول $x = 1$ به کدام صورت زیر است؟



۱)　　۲)　　۳)　　۴)

حل: گزینه (۱)

توجه : *آیا می‌توانید راه سریعتری برای تشخیص شکل بیابید؟ فکر کنید.*

۲ـ اگر حد مشتق چپ و راست تابع در نقطه مفروض $x = a$ هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ گردد، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نخواهد بود و مماس رسم شده بر منحنی در این نقطه بر منحنی موازی محور y هاست. شکل منحنی به یکی از دو صورت زیر است:

$f'(a) = +\infty$　　$f'(a) = -\infty$

به این نقطه، نقطه عطف منحنی تابع گوییم.

البته نقطه عطف منحنی، حالتهای دیگری نیز دارد که در کاربردهای مشتق به آن اشاره خواهد شد.

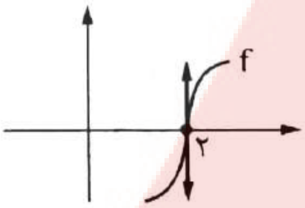
❖ **مثال:** در تابع $y = \sqrt[3]{x - 2}$ ، مشتق‌پذیری تابع را در $x = 2$ بررسی کنید.

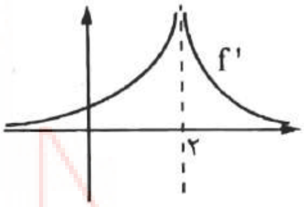
حل:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x - 2} - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}$$

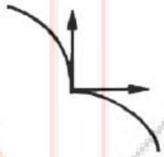
$$\Rightarrow f'_-(2) = f'_+(2) = +\infty$$

تابع در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست. منحنی تابع f و f' در زیر رسم شده است.





۳- اگر مشتق چپ و راست با هم در یک نقطه برابر نباشند و حداقل یکی از آن‌ها ∞ نگردد، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نبوده و این نقطه، نقطه زاویه‌دار یا گوشه‌دار منحنی تابع نامیده می‌شود. شکل آن به صورتهای زیر می‌تواند باشد:



❖ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x|$ را در $x = 0$ بررسی کنید و منحنی تابع و تابع مشتق را رسم کنید.

❖ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - x|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

توجه - در تست‌های کنکور در بعضی از مواقع تانژانت زاویه‌ی بین دو نیم مماس رسم شده در نقطه مورد نظر را می‌خواهند که به وسیله‌ی رابطه‌ی $tg\omega = \pm \frac{m - m'}{1 + mm'}$ قابل محاسبه است که m و m' همان مشتق‌های چپ و راست در نقطه مورد نظر است در سؤال بالا :

❖ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع $y = |x^3 + 2x^2|$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

> ***نکته **** *در تابع $y = |f(x)|$، اگر $x = x_0$ ریشه ساده داخل قدر مطلق باشد آن‌گاه تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست اگر $x = x_0$ ریشه مضاعف داخل قدر مطلق باشد، تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است.*

❖ **مثال:** تابعهای زیر در چند نقطه مشتق‌پذیر نیستند؟

1) $y = |x - 1| + |x|$

2) $y = |x^3 - x^2|$

❖ **مثال:** تانژانت زاویه‌ی بین دو مماس رسم شده بر تابع $y = \frac{1 + |x|}{1 - |x|}$ در نقطه (۱ و ۰) کدام است؟

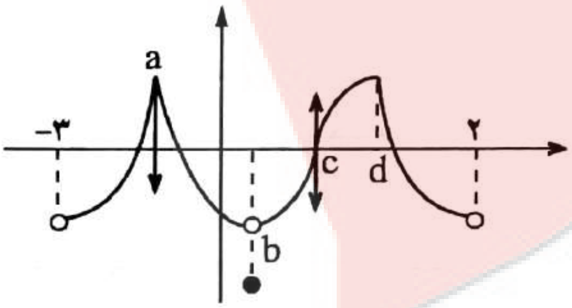
۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** مشتق‌پذیری $f(x) = (x-a)[x]$ را در $x = a$ بررسی کنید. $(a \in Z)$

❖ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x + \operatorname{tg} x & , \quad x \geqslant 0 \\ 2x - \sin x & , \quad x < 0 \end{cases}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

❖ **مثال:** تابع روبرو در بازه‌ی $(-3 \text{ و } 2)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر <u>نیست</u>؟



۱) ۱

۲) ۰

۳) ۳

۴) ۴

حل: گزینه (۴)

> ***۳- اگر $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وجود نداشته باشد، تابع در این نقطه مشتق پذیر نخواهد بود.***

❖ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ را در $x = 0$ بررسی کنید. $(f(0) = 0)$

قضایا و فرمول‌های مشتق

با استفاده از تعریف مشتق می‌توانیم فرمول‌های زیر را که در محاسبات کمک بسیاری می‌نمایند بیابیم.

	تابع	فرمول مشتق	مثال
۱	$y = c$	$y' = ۰$	
۲	$y = x^n$	$y' = nx^{n-۱}$	$y = x^۳ \Rightarrow y' = ۳x^۲$
۳	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$	
۴	$y = \frac{k}{x^n}$	$y' = \frac{-kn}{x^{n+۱}}$	$y = \frac{۲}{x^۳} \Rightarrow y' = \frac{-۶}{x^۴}$
۵	$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = x^۳ - ۵x^۲ + x \longrightarrow y' = ۳x^۲ - ۱۰x + ۱$
۶	$y = u.v$	$y' = u'v + v'u$	$y = x^۲(x^۳ + ۱) \Rightarrow y' = ۲x(x^۳ + ۱) + x^۲ . ۳x^۲$
۷	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^۲}$	$y = \frac{x^۲ + ۱}{x} \Rightarrow y' = \frac{(۲x)x - ۱(x^۲ + ۱)}{x^۲}$
۸	$y = \frac{۱}{u}$	$y' = \frac{-u'}{u^۲}$	$y = \frac{۱}{x^۳ - ۳x^۲} \Rightarrow y' = \frac{-(۳x^۲ - ۶x)}{(x^۳ - ۳x^۲)^۲}$
۹	$y = u^n$	$y' = nu'.u^{n-۱}$	$y = (x^۲ + x)^۳ \Rightarrow y' = ۳(۲x + ۱)(x^۲ + x)^۲$
۱۰	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x^۲ - x} \Rightarrow y' = \frac{۲x - ۱}{۲\sqrt{x^۲ - x}}$
۱۱	$y = \|u\|$	$y' = \frac{uu'}{\|u\|}$	$y = \|x^۲ - x\| \Rightarrow y' = \frac{(۲x - ۱)(x^۲ - x)}{\|x^۲ - x\|}$
۱۲	$y = \sqrt[n]{u^m}$	$y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y = \sqrt[۴]{(x^۲ + ۱)^۳} \Rightarrow y' = \frac{۳(۲x)}{۴\sqrt[۴]{x^۲ + ۱}}$
۱۳	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	
۱۴	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	
۱۵	$y = tg\, x$	$y' = ۱ + tg^۲ x$	
۱۶	$y = cotg\, x$	$y' = -(۱ + cotg^۲ x)$	
۱۷	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$	$y = \sin\sqrt{x} \longrightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}$
۱۸	$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$	$y = \cos\frac{۱}{x} \longrightarrow y' = \frac{+۱}{x^۲} \sin\frac{۱}{x}$
۱۹	$y = tg\, u$	$y' = u'(۱ + tg^۲ u)$	$y = tg(x^۲ - ۱) \longrightarrow y' = ۲x(۱ + tg^۲(x^۲ - ۱))$
۲۰	$y = cotg\, u$	$y' = -u'(۱ + cotg^۲ u)$	$y = cotg(۲x - ۱) \longrightarrow y' = -۲(۱ + cotg^۲(۲x - ۱))$

❖ **مثال:** اگر $f'(a) = 2$ و $f(a) = \frac{1}{2}$، مقدار مشتق $\frac{1}{f(x)} + f^2(x)$ در نقطه $x = a$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -6 ۳) 4 ۴) 6

حل: گزینه (۲)

❖ **مثال:** اگر $f(0) = 0$ و $f(x) = \text{Sin}\big(4x - f(x)\big)$ آن‌گاه $f'(0)$، کدام است؟

۱) -2 ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال:** مقدار مشتق عبارت $\text{Sin}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{Cos}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + \text{Cos}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{Sin}\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه (۲)

❖ **مثال:** مقدار مشتق عبارت $(x^{15} + 2x^{10} + x^5 + 2x + 1)^{101}$ در $x = 0$ چقدر است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰۱ ۴) ۲۰۲

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال:** مقدار مشتق $\text{cotg}x^2$ در نقطه $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{\pi}$ ۲) $\sqrt{\pi}$ ۳) $-\sqrt{\pi}$ ۴) $-2\sqrt{\pi}$

حل: گزینه (۴)

چند نکته در مشتق‌گیری

نکته ۱ *: در توابعی که به صورت ضرب چندعامل درهم می‌باشند، اگر مشتق را در نقطه‌ای بخواهند که یکی از عاملها در آن نقطه صفر می‌شود، کافیست فقط از عامل صفر شونده مشتق گرفته و در بقیه عبارتها ضرب کنیم و سپس طول نقطه را قرار دهیم.

❖ **مثال:** اگر $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+6)$ باشد، مقدار $f'(-5)$ کدام است؟

۱) -720 ۲) -120 ۳) 120 ۴) 720

حل: گزینه (۲)

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{(x+1)\,h(x)}{(2x+1)\,h(2x+1)}$ ، $f'(-1)$ چقدر است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه (۲)

❖ **مثال:** مقدار عددی مشتق تابع $y = \frac{(x+2)(x^3+8)}{x^2+1}$، به ازاء $x = -2$ کدام است؟

۱) 3 ۲) 12 ۳) $\frac{12}{5}$ ۴) 0

حل: گزینه (۴)

نکته ۲ * در تعیین مشتق توابع قدر مطلقی در یک نقطه، بهتر است ابتدا قدر مطلق را تعیین علامت کرده و سپس از تابع بدون قدر مطلق مشتق بگیریم.

❖ **مثال:** در تابع $f(x) = |۵ - x\sqrt{x}|$ مقدار $f'(۱) + f'(۴)$ کدام است؟

۱) ۰   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

حل: گزینه (۳)

نکته ۳ * در بعضی از عبارت‌ها با ساده کردن عبارت و سپس مشتق‌گیری می‌توان مشتق را راحت‌تر حساب کرد.

❖ **مثال:** مشتق توابع زیر را بیابید:

۱) $f(x) = (x + ۱)^۲ (x^۲ + ۲x + ۱)^۳$

۲) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{۱ + \sqrt{x}}$

❖ **مثال:** اندازه مشتق $\frac{x - \sqrt{x}}{۱ - \sqrt{x}}$ به ازای $x = \frac{۱}{۴}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

حل: گزینه (۱)

نکته ۴ * در تعیین مشتق توابع مثلثاتی، کمان بایستی برحسب Rad بیان شود. دقت می‌کنیم که برای تبدیل درجه به رادیان باید کمان را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب کنیم.

❖ **مثال:** مشتق $y = tgx^\circ$ را بیابید.

حل: از عبارت مشتق می‌گیریم و حاصل را در $\frac{\pi}{180}$ ضرب می‌کنیم.

$$y' = \frac{\pi}{180}(1 + tg^2x^\circ)$$

نکته ۵ * هرگاه دو تابع f و g را بدهند و رابطه بین f' و g' را بخواهند، به طور معمول، دو تابع را با هم جمع کرده یا از هم کسر می‌کنیم که عبارت ساده شود. سپس از دو طرف مشتق می‌گیریم.

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2 + x + 1}$ و $g(x) = \frac{x + \cos^2 x}{x^2 + x + 1}$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f' = g'$ ۲) $f' = -g'$ ۳) $f' + g' = 1$ ۴) $f' - g' = 1$

حل: گزینه (۲)

نکته ۶ * در بعضی از موارد، خواسته مسئله، روش حل مسئله را ارائه می‌دهد. به موارد زیر توجه کنید:

$$(u\nu)' = u'\nu + \nu'u$$

$$\left(\frac{u}{\nu}\right)' = \frac{u'\nu - \nu'u}{\nu^2}$$

❖ **مثال:** اگر $z = (\sqrt{x} + \sqrt{x - a})^m$ و $y = (\sqrt{x} - \sqrt{x - a})^m$ باشد، حاصل $y'z + z'y$ کدام است؟

۱) a^m ۲) a ۳) 0 ۴) هیچکدام

حل: گزینه (۳)

حل: گزینه (۱)

> **نکته ۷ *** اگر y تابعی از u باشد و u نیز تابعی از x باشد، برای یافتن مشتق y نسبت به u ، همه جا در y به جای u برحسب x جایگزین می‌نمائیم و سپس از عبارت برحسب x مشتق می‌گیریم.

❖ **مثال:** اگر $y = \sin(\pi u)$ و $u = \sqrt{x}$، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = ۴$ کدام است؟

۱) ۰   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال:** اگر $y = \sin^{۳}u$ و $u = \frac{\pi}{x}$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ وقتی $x = ۳$ کدام است؟

۱) $\frac{-\pi}{۸}$ ۲) $\frac{-\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

حل: گزینه (۱)

۵ـ مشتق تابع $y = f(u)$:

اگر u تابعی از x باشد، برای یافتن مشتق توابعی مانند $f(x^۲)$ یا $f(\sin x)$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{y = f(u) \longrightarrow y' = u'f'(u)}$$

❖ **مثال:** مشتق توابع زیر را بیابید:

۱) $y = f(\sqrt{x}) \longrightarrow$

۲) $y = f(x^۳ - ۳x) \longrightarrow$

❖ **مثال:** هرگاه داشته باشیم $f'(x) = x^۳$، آن‌گاه مشتق $y = f(x^۲)$ را بیابید.

❖ **مثال:** هرگاه $\lim\limits_{x \to -۲} \frac{f(x) - f(-۲)}{x + ۲}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، آن‌گاه مشتق $f(\frac{۱}{x})$ در $x = \frac{-۱}{۲}$ کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۴-   ۳) ۲-   ۴) ۲

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** اگر $f(1 + 7x) = g(5x^2 + 2x + 1)$ و $f'(1) = 4$ باشد، $g'(1)$ کدام است؟

۶ـ مشتق تابع مرکب:

مشتق تابع $(fog)_{(x)}$ را به صورت زیر داریم:

$$\boxed{(fog)'_{(x)} = g'(x) \times f'(g(x))}$$

منظور از $f'(g(x))$ یعنی ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و سپس همه جا به جای x قرار می‌دهیم $g(x)$

❖ **مثال:** هرگاه $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{x}$، آن‌گاه مشتق تابع fog را بیابید:

❖ **مثال:** فرض کنید $f'(0) = 2$ و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 3$ باشد $(fog)'_{(0)}$ کدام است؟

❖ **مثال:** اگر $h(x) = f(g(x))$ و $g(x) = x^2 - 4x + 5$ و $f'(2) = \frac{-1}{2}$ باشند، مقدار $h'(3)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه (۲)

معادله خط مماس بر یک منحنی

از تعریف مشتق تابع در یک نقطه خواهیم داشت که:

مشتق منحنی به ازای طول نقطه تماس، ضریب زاویه‌ی خط مماس است.

پس برای یافتن معادله خط مماس بر منحنی در یک نقطه مفروض $x = x_0$ باید از منحنی مشتق گرفته و طول نقطه را در آن قرار دهیم. ضریب زاویه خط مماس بدست می‌آید و سپس از رابطه $y - y_0 = m(x - x_0)$ معادله خط مماس را می‌یابیم. ضمناً ضریب زاویه خط قائم نیز از رابطه $m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{m_{\text{مماس}}}$ بدست می‌آید:

❖ **مثال:** در تابع $f(x) = (3x^2 + 3x + 1)^8$ ضریب زاویه‌ی خط مماس در نقطه به طول $(-\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 2^{-8} ۳) 0 ۴) 1

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** معادله خط مماس بر منحنی $y = 2\sin x + 3\cos x$ در نقطه $A(0 , 3)$ کدام است؟

۱) $y = 2x - 3$ ۲) $y = 2x + 3$ ۳) $y = 2x$ ۴) $y = -2x$

حل: گزینه (۲)

❖ **مثال:** ضریب زاویه خط قائم بر منحنی تابع $y = \sin^2 x + x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ چقدراست؟

۱) -1 ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

حل: گزینه (۲)

چند حالت خاص در معادله خط مماس:

حالت ۱ * اگر ضریب زاویه خط مماس در نقطه $A(x_0,y_0)$ ، صفر باشد معادله خط مماس $y = y_0$ است.

❖ **مثال:** نمایش هندسی تابع $y = (x\sqrt{x} - 1)^2$ در نقطه به طول صفر بر کدام خط زیر مماس است؟

۱) $y = x$ ۲) $y = 0$ ۳) $x = 1$ ۴) $y = 1$

حل: گزینه (۴)

حالت ۲ * اگر ضریب زاویه خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه ∞ شود معادله خط مماس بر منحنی در این نقطه $x = x_0$ است.

❖ **مثال:** ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $y = \sqrt[3]{x - 1}$ در $x = 1$ کدام است؟

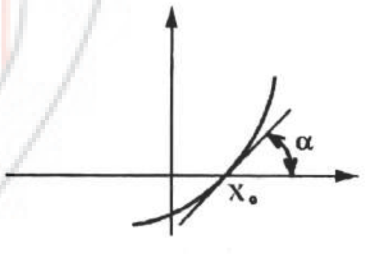
حالت ۳ * برای یافتن زاویه یک منحنی با محور x ها. منحنی را با $y = 0$ قطع داده و طول نقطه تلاقی با محور x هارا یافته و سپس ضریب زاویه را می‌یابیم. با توجه به این‌که $m = tg\alpha$ از آنجا α را محاسبه می‌کنیم.

❖ **مثال:** منحنی $y = 1 + tgx$، محور x ها را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

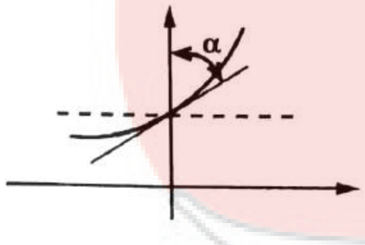
۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) Arctg۲ ۴) ۰

حل: گزینه (۳)

حالت ۴ * یافتن زاویه یک منحنی با محور yها: می‌دانیم طول هر نقطه روی محور y ها، صفر است لذا کافیست ضریب زاویه خط مماس بر منحنی را در $x = 0$ بیابیم، چون زاویه با محور y ها خواسته شده پس باید این زاویه را از ۹۰ کسر کنیم (به شکل توجه کنید).



حالت (۳)



حالت (۴)

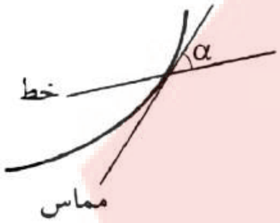
❖ **مثال:** منحنی تابع $y = \frac{x - \sqrt{3}}{x^2 + \sqrt{3}}$ ، محور y را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

نکته مهم * *تابع $y = (x - \alpha)^{2m} g(x)$ اگر $g(\alpha) \neq 0$ باشد در $x = \alpha$ بر محور x ها مماس است.*

❖ **مثال:** تابع $y = (x - 1)^2 (x + 1)^4 (x - 2)$ در چند نقطه بر محور x ها مماس است؟

زاویه یک خط و یک منحنی:

زاویه‌ی یک خط و یک منحنی عبارتست از زاویه بین مماس رسم شده بر منحنی در نقطه تقاطع با خط. برای تعیین زاویه خط و منحنی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱) خط را با منحنی قطع می‌دهیم و مختصات نقطه تقاطع را بدست می‌آوریم.

۲) از منحنی مشتق گرفته و ضریب زاویه خط مماس بر منحنی را در این نقطه می‌یابیم.

۳) از رابطه $\operatorname{tg}\omega = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|$ ، زاویه بین خط و منحنی را می‌یابیم.

❖ **مثال:** زاویه بین منحنی $y = x^3$ و خط $y = x$ را در نقطه تقاطع به طول مثبت بیابید:

نکته * *اگر یک خط بر یک منحنی مماس باشد معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف می‌دهد.*

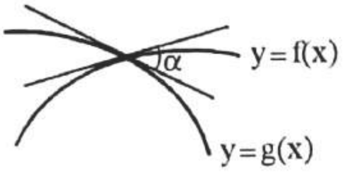
❖ **مثال:** اگر خط $y = x - 1$ بر منحنی $y = mx^2$ مماس باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{-1}{4}$ ۴) ۴-

حل: گزینه (۱)

زاویه‌ی بین دو منحنی:

برای یافتن زاویه‌ی بین دو منحنی، ابتدا دو منحنی را با هم تلاقی داده و طول نقطه تلاقی را می‌یابیم و سپس از دو منحنی مشتق گرفته و ضریب زاویه‌ها را می‌یابیم و سپس از $tg\omega$ زاویه را می‌یابیم.



❖ **مثال:** تانژانت زاویه بین دو منحنی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را بیابید.

❖ **مثال:** تانژانت زاویه‌ی بین نمودارهای دو تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{32}{\sqrt{x}}$ و $y = x^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

حل: گزینه (۲)

> **نکته** * اگر دو منحنی بر هم مماس باشند مشتق آن‌ها در نقطه تماس با هم برابر است.

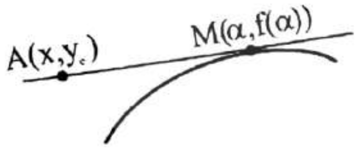
❖ **مثال:** اگر منحنی $y = x^4 + x$ و $y = ax^3 + b$ در $x = -1$ بر هم مماس باشند a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۲- ۴) ۱-

حل: گزینه (۴)

یافتن معادله خط مماس از نقطه‌ای خارج منحنی :

چون نقطه $A(x_0, y_0)$ روی منحنی تابع قرار ندارد، پس از مشتق نمی‌توانیم استفاده کنیم. برای یافتن معادله خط مماس به روش زیر عمل می‌کنیم :



در این روش نقطه $M \left| \alpha \right.$ را روی منحنی تابع $y = f(x)$ در نظر می‌گیریم پس عرض نقطه $f(\alpha)$ می‌باشد در نتیجه نقطه $M(\alpha, f(\alpha))$ خواهد بود. دقت می‌کنیم که نقطه M روی منحنی تابع f است پس

$$m = f'(x)\Big|_{x=a} = f'(\alpha)$$

در نتیجه معادله خط مماس به صورت زیر در می‌آید:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

چون نقطه $A(x_0, y_0)$ در این خط صدق می‌کند در نتیجه، معادله فقط مجهول α را خواهد داشت و از آنجا معادله خط مماس را می‌یابیم.

❖ **مثال:** از مبدأ مختصات دو مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 1$ رسم می‌کنیم معادله خطوط مماس و طول‌های نقاط تماس را بیابید.

❖ **مثال:** از نقطه (۰ و ۶) مماسی بر منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{1}{x}$ رسم شده است طول نقطه تماس کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: گزینه (۴)

آهنگ تغییر:

فرض کنید f تابعی باشد که به زمان وابسته باشد پس $Q = f(t)$، تغییر Q از زمان t به $t + \Delta t$ را به صورت

$$\Delta Q = f(t + \Delta t) - f(t)$$

خواهیم داشت و در نتیجه ***آهنگ متوسط تغییر*** Q (در هر واحد زمان)، برابر است با:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

حد نسبت فوق وقتی $\Delta t \longrightarrow 0$ ***آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر*** Q به صورت زیر است:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ولی حد کسر فوق همان مشتق تابع f یعنی $f'(t)$ است پس آهنگ تغییر **لحظه‌ای** عبارتست از:

$$\frac{dQ}{dt} = f'(t)$$

❖ **مثال:** یک منبع استوانه‌ای شکل با محور عمودی را ۲۰۰۰۰۰ لیتر آب پر کرده‌ایم، اگر شیر زیر منبع را باز کنیم منبع در عرض ۵۰ دقیقه تخلیه می‌شود فرض کنید در لحظه $t = 0$ شیر منبع را باز کرده‌ایم، آب باقی مانده در منبع پس از t ثانیه از فرمول

$$V = 200000 - 8000t + 80t^2 \qquad \text{(لیتر)}$$

بدست می‌آید، آهنگ آنی تغییر خروج آب از منبع را در لحظه $t = 30$ پیدا کنید؟

❖ **مثال:** آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع آن وقتی $r = 10$ است کدام است؟

۱) 10π ۲) 15π ۳) 25π ۴) 20π

حل: گزینه (۴)

✦ **تذکر**: همانطور که دیدیم مشتق هر تابعی – که لزوماً تابع زمان نیست – را می‌توان به عنوان آهنگ تغییر نسبت به متغیر مستقل آن، دانست. اگر $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه

$$\text{آهنگ متوسط تغییر } y = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{آهنگ آنی تغییر } y \text{ نسبت به } x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

❖ **مثال**: آهنگ آنی تغییر مساحت دایره نسبت به تغییر محیط آن را بیابید.

کاربرد

مشتق

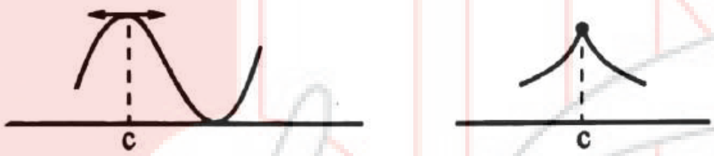
«کاربردهای مشتق»

در این فصل به بررسی نقاط اکسترمم و عطف و سپس رسم منحنی می‌پردازیم.

۱ـ اکسترمم نسبی و مطلق:

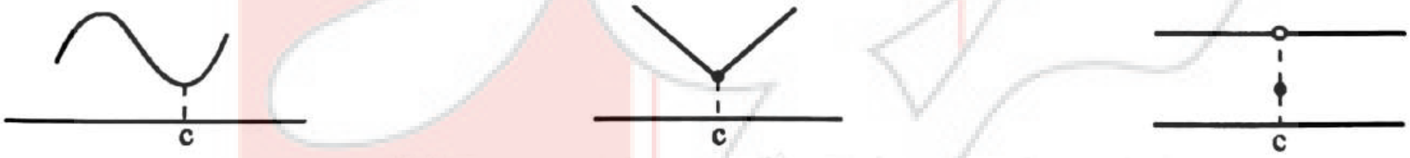
الف - ماکزیمم نسبی: اگر f روی مجموعه‌ای شامل بازه باز I تعریف شده، و $c \in I$ وجود داشته باشد که برای $x \in I$، $f(c) \geqslant f(x)$، آنگاه f در c دارای ماکزیمم نسبی است و c را نقطه اکسترمم نسبی f می‌نامند.

به بیان ساده‌تر عرض نقطهٔ c از عرض نقاط دیگر در همسایگی خود بیشتر یا مساوی است. به شکلهای زیر توجه کنید.



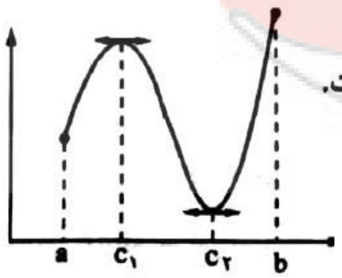
ب - می‌نیمم نسبی: اگر f روی مجموعه‌ای شامل بازهٔ باز I تعریف شده و $c \in I$ وجود داشته باشد که برای $x \in I$ داشته باشیم $f(x) \geqslant f(c)$ ، آنگاه f در c می‌نیمم نسبی است و c را نقطه اکسترمم نسبی f گویند.

به بیان ساده‌تر $f(c_0)$ از عرضهای نقاط دیگر در همسایگی خود کمتر یا مساوی است.



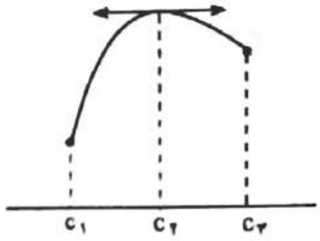
ج - ماکزیمم مطلق: هرگاه $f(x_0)$ از عرض تمام نقاط در فاصله [a,b] بیشتر یا مساوی باشد آنگاه $f(x_0)$ را ماکزیمم مطلق تابع f در بازهٔ [a,b] گویند.

د - می‌نیمم مطلق: هنگامی که $f(x_0)$ از عرض تمام نقاط در فاصله [a,b] کمتر یا مساوی باشد نقطه $(x_0,f(x_0))$ ، می‌نیمم مطلق تابع است.



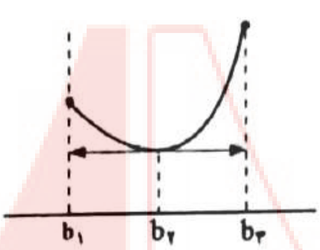
با توجه به شکل روبرو b طول نقطه ماکزیمم مطلق و c_2 طول نقطه می‌نیمم مطلق تابع است.

نکته * گاهی ماکزیمم نسبی و مطلق بر هم منطبق می‌شوند. به شکلهای زیر دقت کنید:



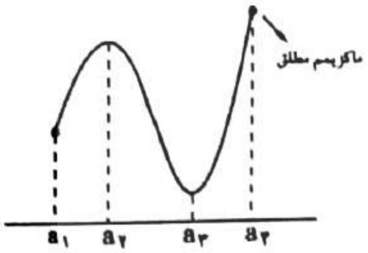
c_1 = می‌نیمم مطلق

c_2 = ماکزیمم مطلق و نسبی



b_2 = می‌نیمم نسبی و مطلق بر هم منطبق

b_3 = ماکزیمم مطلق



a_2 = ماکزیمم نسبی

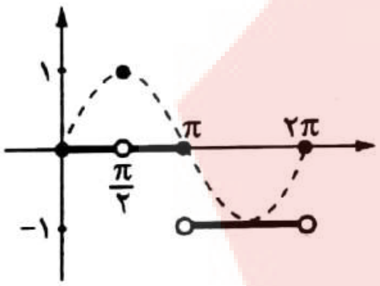
a_3 = می‌نیمم نسبی و مطلق

a_4 = ماکزیمم مطلق

نکته * نقاط انتهایی یک تابع، اکسترمم نسبی نمی‌توانند باشند.

نکته * لزومی ندارد که تابع f در نقاط اکسترمم نسبی یا مطلق، پیوسته و یا مشتق‌پذیر باشد.

مثال * در تابع $y = [\sin x]$ ، نقاط به طولهای $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \pi$ طولهای کدام نقاط هستند؟



حل* منحنی نمایش تابع در روبرو رسم شده است. نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است و در عین حال طول نقطه ماکزیمم مطلق نیز می‌باشد. $x = \pi$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است.

۲ـ نقطه بحرانی:

تعریف : هرگاه تابع f در $x = c$ تعریف شده باشد $(c \in D_f)$ آنگاه $x = c$ را طول نقطه بحرانی تابع گویند هرگاه $f'(c)$ تعریف نشده یا برابر صفر باشد.

مثال * نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

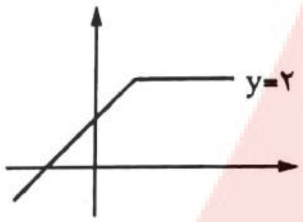
۱) $f(x) = x^3 - x^5$

۲) $f(x) = |x^2 - x|$

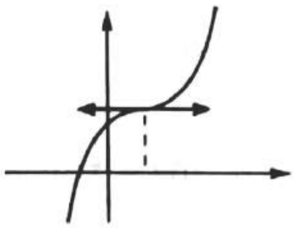
۳) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$

نکته * هر اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی است اما هر نقطه بحرانی الزاماً یک اکسترمم نسبی نیست. (شکل ۱)

نکته * توابعی که دارای پاره‌خط یا نیم‌خط موازی محور x ها باشند دارای بی‌شمار نقطه بحرانی می‌باشند. (شکل ۲)



شکل ۲



شکل ۱

نکته * در توابعی به شکل کلی $y = |f(x)|$ نقاط بحرانی به صورت زیر بدست می‌آیند:

۱) ریشه $f'(x) = ۰$

۲) ریشه ساده داخل قدر مطلق

مثال * نقاط بحرانی تابع $y = |x^۲ - ۲x|$ را بیابید.

۳ـ روش یافتن اکسترمم‌های مطلق بر یک بازه:

برای یافتن اکسترمم‌های مطلق یک تابع پیوسته بر یک بازهٔ $[a,b]$:

۱) از تابع مشتق گرفته و نقاط بحرانی را می‌یابیم.

۲) مقدار تابع را در هر یک از این نقاط می‌یابیم.

۳) $f(x)$ را در نقاط انتهایی می‌یابیم.

۴) کوچکترین این مقادیر می‌نیمم مطلق و بزرگترین آنها ماکزیمم مطلق می‌باشد.

مثال * مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ را در بازهٔ $[\frac{-۱}{۲} , ۴]$ بیابید؟

مثال * می‌نیمم مطلق تابع $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ بر بازه $[1,3]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{-1}{3}$ ۴) $\frac{-2}{3}$

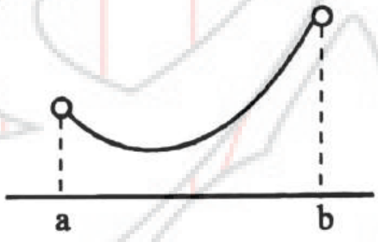
حل * گزینه (۱)

مثال * تابع $f(x) = x^3 - 3x^2$ در فاصله $-1 \leqslant x < 3$:

۱) ماکزیمم مطلق دارد، می‌نیمم مطلق ندارد. ۲) ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق دارد.

۳) می‌نیمم مطلق دارد، ماکزیمم مطلق ندارد. ۴) می‌نیمم مطلق و ماکزیمم مطلق ندارد.

حل * گزینه «۲» درست است. برای یافتن ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق می‌بایست y ابتدای بازه یا حد آن، y انتهای بازه یا حد آن و y اکسترمم‌های تابع، موجود در بازه مطلوب را محاسبه کنیم، سپس آن y که از همه بزرگتر است ماکزیمم مطلق و آن y که از همه کوچکتر است می‌نیمم مطلق خواهد بود. در صورتی که در تشکیل y های ابتدا و انتهای بازه، مجبور به حد گرفتن از تابع شدیم و حد بدست آمده از همه y ها بزرگتر یا از همه y ها کوچکتر باشد به ترتیب Max و Min مطلق نخواهیم داشت.



تابع ماکزیمم مطلق ندارد.

تابع ماکزیمم و می‌نیمم مطلق ندارد

با توجه به مطالب بالا داریم:

$$-1 \leqslant x < 3 \longrightarrow f(\text{ابتدای بازه}) = f(-1) = -4$$

$$f(\text{انتهای بازه}) \xrightarrow{x = 3} \lim_{x \to 3} f(x) = 27 - 27 = 0$$

$$\text{اکسترمم‌ها} \longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \longrightarrow x = 0 \ , \ x = 2$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = -4$$

لذا تابع در نقاط $x = -1$ و $x = 2$ دارای می‌نیمم مطلق (-4) می‌باشد و در $x = 0$ نیز Max مطلق صفر دارد. (دقت شود که تابع در $x = 3$ اکسترمم مطلق ندارد).

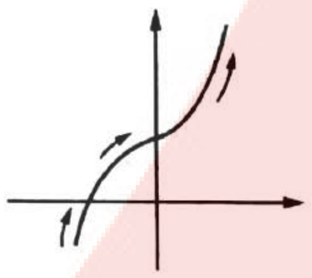
۴ـ تابعهای صعودی و نزولی:

فرض کنید I فاصله‌ای در دامنه f باشد.

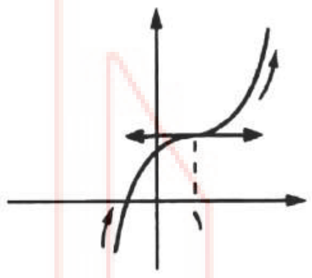
۱ـ تابع اکیدا صعودی:

$$\forall x_1 , x_2 \in I \quad ، \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

به شکلهای زیر دقت کنید دو شکل زیر نمایش توابع اکیداً صعودی هستند.



(۱)



(۲)

در شکل (۱) : تابع اکیداً صعودی است و همواره $f' > 0$ است.

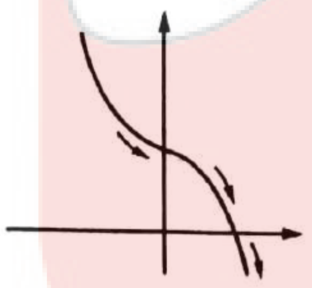
در شکل (۲) : تابع اکیداً صعودی است و $f' > 0$ و در $x = 1$، $f' = 0$.

نتیجه ۱ * هرگاه تابع f در بازه [a , b] پیوسته و در بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد f را روی این فاصله اکیداً صعودی گویند هرگاه $f' > 0$ یا حداکثر در نقاط با عرضهای متفاوت، مشتق صفر شود.

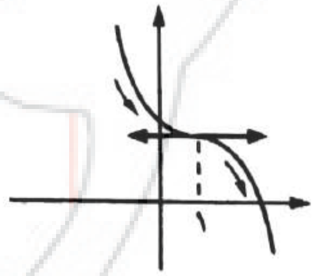
۲ـ تابع اکیدا نزولی:

$$\forall x_1 , x_2 \in I \quad ، \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

شکلهای زیر نمایش توابع اکیداً نزولی می‌باشند.



(۱)



(۲)

در شکل (۱) : f' همواره کوچکتر از صفر.

در شکل (۲) : f' کوچکتر از صفر و فقط در $x = 1$ مشتق صفر است.

نتیجه ۲ * هرگاه تابع f در بازه $[a , b]$ پیوسته و در بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد f را روی این فاصله اکیداً نزولی گویند هرگاه $f' < 0$ یا حداکثر در نقاط با عرضهای متفاوت مشتق صفر شود.(۲)

مثال * در مورد صعودی و نزولی بودن توابع زیر نظر دهید:

۱) $y = \text{Sin}x \quad , \quad x \in (\frac{-\pi}{2} , \frac{\pi}{2})$

۲) $y = x^3 + 1$

حل * تابع f در R پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f'(x) = 3x^2$ که در R، $f'(x) \geqslant 0$ لذا تابع اکیداً صعودی است.

مثال * تابع $f(x) = x - \text{Sin}x$ به صورت:

۱) همواره نزولی است.
۲) همواره صعودی است.
۳) گاهی صعودی و گاهی نزولی است.
۴) در مبدأ مشتق ندارد.

حل * گزینه (۲)

مثال * جهت تغییرات تابع با ضابطهٔ $f(x) = \text{Sin}x - x\text{Cos}x$ در فاصله $(0 , \pi)$ کدام وضع را دارد؟

۱) نزولی
۲) صعودی
۳) ابتدا صعودی بعد نزولی
۴) ابتدا نزولی بعد صعودی

حل * گزینه (۲)

در فاصله $(0 , \pi)$ ، $\text{Sin}x > 0$ پس $f'(x) > 0$.

مثال * کدام تابع زیر بر R نزولی است؟

۱) $y = -|x|$
۲) $y = -e^{-x}$
۳) $y = e^{-x}$
۴) $y = \frac{1}{x + 1}$

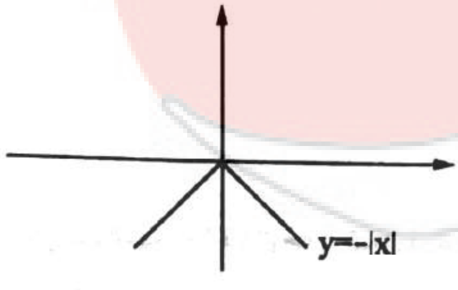
حل * گزینه (۳) درست است زیرا:

در گزینه اول: تابع $y = -|x|$ به ازای $x < 0$ صعودی و به ازای $x > 0$ نزولی است (شکل ۱).

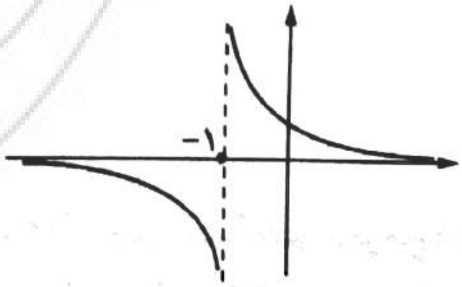
در گزینه دوم: $y' = e^{-x}$ پس $y' > 0$ و تابع همواره صعودی است.

در گزینه سوم: $y' = -e^{-x}$ که با توجه به این که $y' < 0$، تابع همواره نزولی است.

در گزینه چهارم: با توجه به این که $y' = \frac{-1}{(x + 1)^2}$ با این که $y' < 0$ اما به دلیل وجود مجانب قائم در $x = -1$ تابع اکیداً نزولی نیست. تابع در فواصل جداگانه $x < -1$ و $x > -1$ همواره نزولی است اما در اجتماع آنها نه صعودی و نه نزولی است. (شکل ۲)



(۱)



(۲)

مثال * اگر f صعودی و g نزولی باشد، آنگاه توابع fog و fogof به ترتیب:

۱) نزولی و نزولی است.

۲) صعودی و نزولی است.

۳) نزولی و صعودی است.

۴) صعودی و صعودی است.

حل * گزینه (۱)

نکته * *برای تعیین صعودی - نزولی بودن ترکیب توابع، کافیست علامتهای مشتق را در هم ضرب کنیم.*

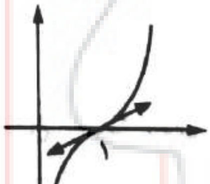
مثال * اگر f نزولی و g نزولی باشد gof چگونه است؟

نکته * *اگر f صعودی باشد (f-) نزولی است.*

مثال * اگر f تابعی صعودی و مثبت و پیوسته باشد $\sqrt{f}$ چگونه است؟

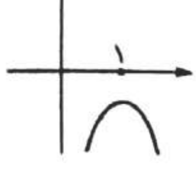
نکته * *اگر f تابعی پیوسته و در یک فاصله اکیداً صعودی باشد منحنی مشتق آن همواره بالای محور x ها یا بر آن مماس است و اگر f در یک فاصله اکیداً نزولی باشد منحنی مشتق آن پایین محور x ها یا بر آن مماس است.*

مثال * هرگاه منحنی تابع f به صورت

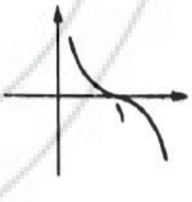


باشد منحنی ´f به کدام صورت می‌تواند باشد؟

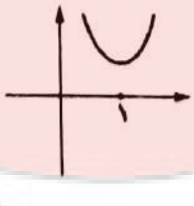
۱)



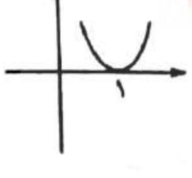
۲)



۳)

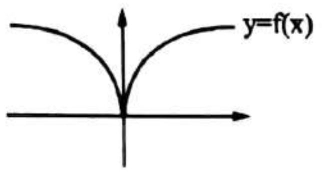


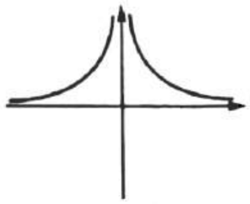
۴)

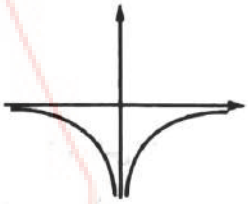


حل * گزینه (۴)

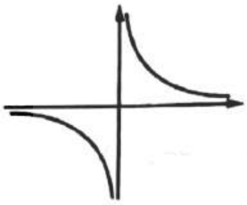
مثال * اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت شکل روبرو باشد، نمودار تابع با ضابطه $y = f'(x)$ به کدام صورت است؟



۱) 

۲) 

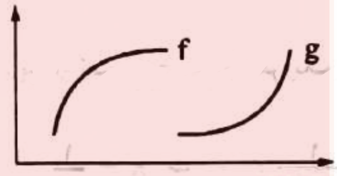
۳) 

۴) 

حل * گزینه (۴)

۵ـ تقعر:

به شکلهای زیر دقت کنید:

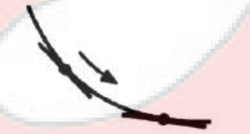


هر دو تابع f و g توابعی صعودی هستند اما جهت انحنای آنها با هم فرق می‌کند چگونه می‌توانیم بین این دو نوع رفتار تمایز قائل شویم؟

۱ـ تقعر رو به بالا: $(f''>0)$

در تقعر رو به بالا در حرکت از چپ به راست (با افزایش x) شیب خط مماس بر منحنی افزایش می‌یابد پس $f'>0$ لذا $f''>0$ می‌باشد. به عبارت ساده‌تر، تقعر رو به سوی بالا را یک تابع می‌نیمم‌دار یا قسمتی از آن در نظر می‌گیریم. در تقعر رو به سوی بالا، خط مماس بر منحنی همواره زیر منحنی است.

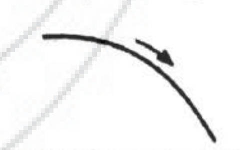
$f'>0, f''>0$



$f'<0, f''>0$

۲ـ تقعر رو به پایین: $(f''<0)$

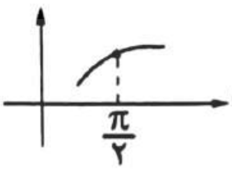
در تقعر رو به پایین در حرکت از چپ به راست (با افزایش x)، شیب خط مماس بر منحنی کاهش می‌یابد پس $f'<0$ لذا $f''<0$ است. به بیان ساده‌تر، تقعر رو به پایین را یک تابع ماکزیمم‌دار یا قسمتی از آن در نظر می‌گیریم. در تقعر رو به سوی پایین، خط مماس بر منحنی همواره بالای منحنی است.

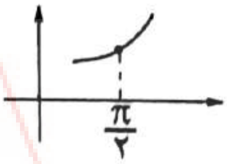


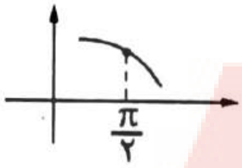
$f'<0, f''<0$

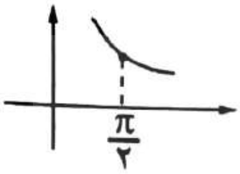
$f'>0, f''<0$

مثال * نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \text{Sinx} - \text{Cosx}$ در حوالی $x = \frac{\pi}{2}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

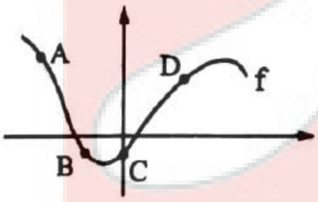
حل * گزینه (۱)

مثال * تقعر منحنی تابع $y = x^{2} + \sqrt{x}$ در بازهٔ $(0,1)$ کدام وضع را دارد؟

۱) ابتدا رو به پایین بعد رو به بالا
۲) ابتدا رو به بالا بعد رو به پایین
۳) همواره رو به بالا
۴) همواره رو به پایین

حل * گزینه (۱)

مثال * در کدام‌یک از نقاط نمودار شکل زیر، مقادیر f' و f'' هر دو مثبت می‌باشند؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

حل * گزینه (۳)

۷ـ آزمونهای مشتق:

برای تعیین نقاط اکسترمم‌های نسبی تابع از دو آزمون مشتق اول و دوم استفاده می‌کنیم:

۱ـ آزمون مشتق اول:

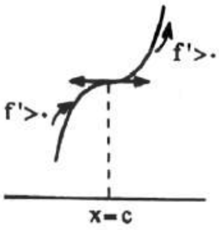
فرض کنیم c یک عدد بحرانی برای تابع پیوسته f در بازهٔ I که شامل c است، باشد. برای تعیین این که آیا c ماکزیمم نسبی‌است یا می‌نیمم نسبی، از رده‌بندی زیر استفاده می‌کنیم.

۱) هرگاه f' در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد آن‌گاه c طول نقطه می‌نیمم نسبی است.

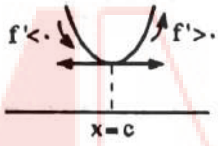
۲) هرگاه f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد آن‌گاه c طول نقطه ماکزیمم نسبی است.

۳) هرگاه f' در c تغییر علامت ندهد $x = c$ طول اکسترمم نسبی نیست.

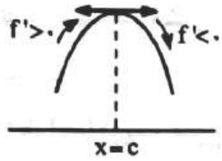
به شکلهای زیر توجه کنید:



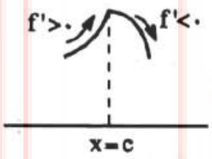
نه ماکزیمم نسبی و نه می‌نیمم نسبی



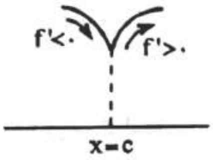
می‌نیمم نسبی



ماکزیمم نسبی



ماکزیمم نسبی است اما تابع در $x = c$ مشتق‌ناپذیر است.



می‌نیمم نسبی است اما تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

نکته * لزومی ندارد که در نقطه اکسترمم نسبی مشتق صفر شود.

مثال * نقاط اکسترمم نسبی را برای تابعهای زیر تعیین کنید.

۱) $f(x) = x^۳ - ۳x^۲$

۲) $f(x) = (x - ۱)^۵$

نکته * در منحنی تابع f' جاهایی که منحنی محور x ها را قطع می‌کند طولهای اکسترمم نسبی تابع f می‌باشند.

مثال * شکل مقابل منحنی مشتق تابع پیوسته f می‌باشد که در بازهٔ $(۱,۷)$ رسم شده، کدام گزینه درست است؟

۱) $x = ۲$ طول می‌نیمم نسبی و $x = ۴$ طول ماکزیمم نسبی است.

۲) $x = ۲$ و $x = ۴$ طول می‌نیمم و $x = ۶$ طول ماکزیمم نسبی است.

۳) $x = ۲$ طول ماکزیمم نسبی و $x = ۴$ طول می‌نیمم نسبی است.

۴) تابع دارای سه اکسترمم نسبی است.

حل ❋ گزینه (۳)

مثال ✱ تابع $y = \frac{|x|}{x - 1}$ مفروض است کدام گزینه زیر درست است؟

۱) در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

۲) در نقطه $x = 0$ دارای عطف است.

۳) در نقطه $x = 0$ دارای می‌نیمم است.

۴) در نقطه $x = 0$ دارای ماکزیمم است.

حل ❋ گزینه (۴)

توجه: آیا می‌توانید روش تستی برای توابع به شکل کلی $y = |x - a|\ g(x)$ ، $g(a) \neq 0$ در مورد نقاط اکسترمم بیابید؟

مثال ✱ برای تابع $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ نقطه‌های به طول $x = 1$ و $x = -1$ به ترتیب چه نقطه‌هایی هستند؟

۱) می‌نیمم - می‌نیمم ۲) می‌نیمم - ماکزیمم ۳) ماکزیمم - ماکزیمم ۴) ماکزیمم - می‌نیمم

حل ❋ گزینه (۲)

توجه: از معادله f' چه نتیجه‌ای در مثال بالا می‌گیرید؟

۲ـ آزمون مشتق دوم:

اگر c نقطه بحرانی تابع f و $f''(c)$ موجود باشد، آنگاه:

الف) اگر $f''(c) > 0$ آنگاه f در c دارای می‌نیمم نسبی است.

ب) اگر $f''(c) < 0$ آنگاه f در c دارای ماکزیمم نسبی است.

تذکر ❋ *در حالتی که $f''(c) = 0$ باشد، آزمون بی‌نتیجه است.*

مسائل بهینه‌سازی:

یکی از مهمترین کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست آوردن مؤثرترین طراحی از یک محصول است غالباً مسئله مینیمم‌سازی هزینه، ماکزیمم‌سازی حجم، به ماکزیمم یا مینیمم‌سازی یک تابع $f(x)$ تحویل می‌گردد. در زیر روش حل کلی مسائل ماکزیمم و مینیمم کاربردی را مطرح می‌کنیم.

روال کلی برای یافتن ماکزیمم یا مینیمم:

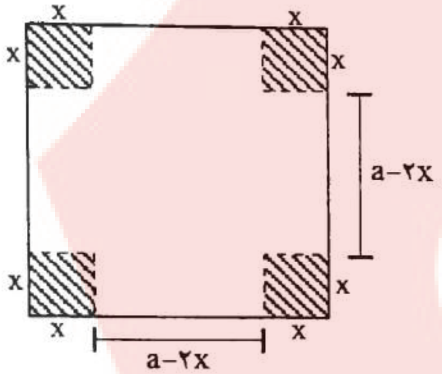
۱ـ تصویر کلی از مسئله را رسم می‌کنیم.

۲ـ مقدار ثابت را تشخیص می‌دهیم.

۳ـ متغیر یا متغیرها را شناسایی می‌کنیم.

۴ـ کمیتی را که Max یا Min می‌شود را تشخیص داده و برای آن رابطه‌ای بر حسب متغیرها می‌نویسیم.

مثال * **اگر چهار مربع یکسان از گوشه‌های یک تکه مقوای مربع شکل به ضلع a سانتی‌متر جدا کنیم، چهار لبهٔ باقی مانده را طوری تا می‌کنیم که یک جعبه رو باز به دست بیاوریم به منظور ماکزیمم‌سازی حجم جعبه حاصل مربع‌ها را به چه اندازه باید جدا کنیم؟**



حل : ابتدا باید شکل مسئله را ترسیم کنیم.

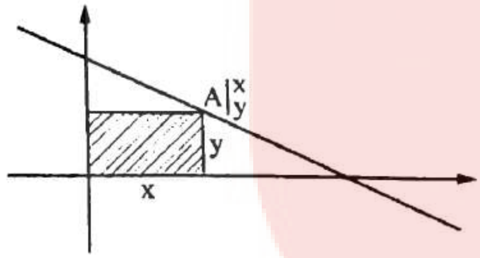
مقدار ثابت a ، متغیر x ، کمیتی که ماکزیمم می‌گردد حجم مکعب مستطیل است، با توجه به این که می‌دانیم حجم مکعب مستطیل، حاصل‌ضرب طول در عرض در ارتفاع است پس

$$V = (a - ۲x)^۲x = (a^۲ - ۴ax + ۴x^۲)x = ۴x^۳ - ۴ax^۲ + a^۲x$$

$$V'_x = ۱۲x^۲ - ۸ax + a^۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{a}{۲} \;,\; x = \frac{a}{۶}$$

مینیمم مقدار حجم به ازای $x = \frac{a}{۲}$ به دست می‌آید و به ازای $x = \frac{a}{۶}$ ماکزیمم مقدار حاصل می‌شود.

مثال * **یک مستطیل به محور xها و yها و نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۶ - x}{۲}$ (مطابق شکل) محدود شده است طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟**



حل : مساحت مستطیل

$$S = xy$$

چون دو متغیر داریم پس امکان مشتق‌گیری نداریم اما نقطه $A(x , y)$ روی خط است می‌توانیم y را بر حسب x قرار دهیم.

$$S = x\left(\frac{۶ - x}{۲}\right) = ۳x - \frac{x^۲}{۲}$$

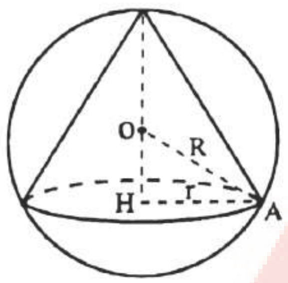
$$S'_x = ۳ - \frac{۲x}{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۳ \;,\; y = \frac{۳}{۲}$$

مثال * اگر h ارتفاع و L طول قاعده مثلث‌ها و $h + 2L = 7$ باشد بیشترین مقدار برای مساحت این مثلث کدام است؟

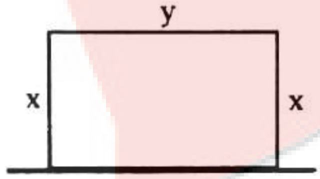
۱) $\frac{49}{16}$ ۲) $\frac{50}{16}$ ۳) $\frac{51}{16}$ ۴) $\frac{52}{16}$

حل : گزینه (۱)

مثال * در کره‌ای به شعاع ثابت R مخروطی با حجم ماکزیمم محاط کنید؟

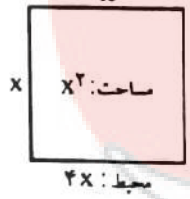


☆ **مثال** * کشاورزی دارای سیم کافی برای‌ساختن ۱۰۰ متر حفاظ می‌باشد اومی‌خواهد سه‌ضلع یک زمین مستطیل شکل را که یک ضلع آن در امتداد یک دیوار ساختمانی است با سیم حفاظ‌بندی کند (مطابق شکل) زمین را با چه طول و عرض انتخاب کند تا بزرگترین مساحت ممکن را دارا باشد؟

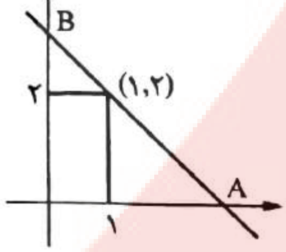


☆ **مثال** * می‌خواهیم از یک سیم به طول چهار متر، مربع و دایره بسازیم.

چقدر سیم برای مربع و چقدر برای دایره به کار بریم که سطح حاصل ماکزیمم شود؟



☆ **مثال** ⁎ **خط متغیری که از نقطه (۲ و ۱) می‌گذرد، محور xها را در نقطه (۰ و a) A و محور yها را در نقطه (b و ۰) قطع می‌کند. مطلوب است مساحت مثلث AOB وقتی که کمترین مقدار باشد. به شرط آن که a و b هر دو مثبت باشند.**



حل ⁎ مطابق شکل مساحت مستطیل مساوی است با

$$A = \frac{ab}{۲}$$

اما:

$$\frac{۲ - ۰}{۱ - a} = \frac{۲ - b}{۱ - ۰}$$

$$\Rightarrow b = \frac{۲a}{a - ۱}$$

بدیهی است که $۱ < a$ و $۲ < b$ پس:

$$A = \frac{۱}{۲}ab = \frac{۱}{۲}a \cdot \frac{۲a}{a - ۱} = \frac{a^۲}{a - ۱}$$

$$A' = ۰ \Rightarrow A' = \frac{a(a - ۲)}{(a - ۱)^۲} \text{ و } A'' = \frac{۲}{(a - ۱)^۳}$$

پس:

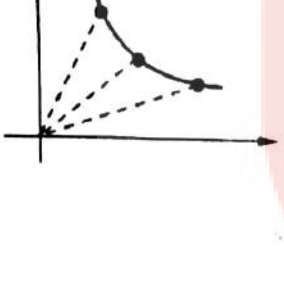
$$A' = ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ و } a = ۲$$

بنابراین با توجه به $A'' > ۰$ و $a > ۱$، باید $a = ۲$ باشد. پس:

$$A = \frac{۲^۲}{۲ - ۱} = ۴$$

تعیین نزدیکترین فاصله منحنی از مبدأ مختصات:

با توجه به شکل برای یافتن فاصله یک منحنی از مبدأ مختصات با استفاده از رابطهٔ $d = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ فاصله را می‌یابیم، چون باید مشتق‌گیری نماییم و دو متغیر داریم یکی از متغیرها را بر حسب دیگری نوشته و از رابطه d بر حسب تک متغیر مشتق می‌گیریم.



مثال ⁎ **نزدیکترین فاصله منحنی $y^۲ = x + ۴$ را از مبدأ مختصات تعیین کنید؟**

۱۴- تعیین ماکزیمم و مینیمم توابع بدون استفاده از مشتق:

با استفاده از قضایای زیر می‌توان ماکزیمم و می‌نیمم توابع را بدون استفاده از مشتق محاسبه نمود.

۱- هرگاه x و y عوامل مثبت و $x + y = cte$ باشد عبارت $S = xy$ زمانی ماکزیمم است که $x = y$ باشد.

مثال * اگر $x + y = ۱۰$ و $x , y > ۰$ آنگاه ماکزیمم (xy) کدام است؟

مثال * اگر $ab = ۱۰۰$ و $a , b > ۰$ آنگاه ماکزیمم عبارت $P = \log a \,.\, \log b$ کدام است؟

مثال * اگر $x + ۲y = ۶$ و $x , y > ۰$ آنگاه ماکزیمم xy کدام است؟

۲- هرگاه عوامل x و y مثبت و $x + y = cte$ باشد در این صورت ماکزیمم عبارت $x^a \,.\, y^b$ زمانی اتفاق می‌افتد که $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ باشد.

مثال * با فرض آن که x و y مثبت و $x + y = ۷$ ماکزیمم $x^۲ \sqrt[۳]{y}$ کدام است؟

مثال * ماکزیمم تابع $y = x^۴ \sqrt{۱ - x^۲}$ با شرط $۰ \le x \le ۱$ کدام است؟

۳- اگر x و y مثبت $xy = cte$ باشد عبارت $x + y$ زمانی Min است که دو مقدار با هم برابر باشند.