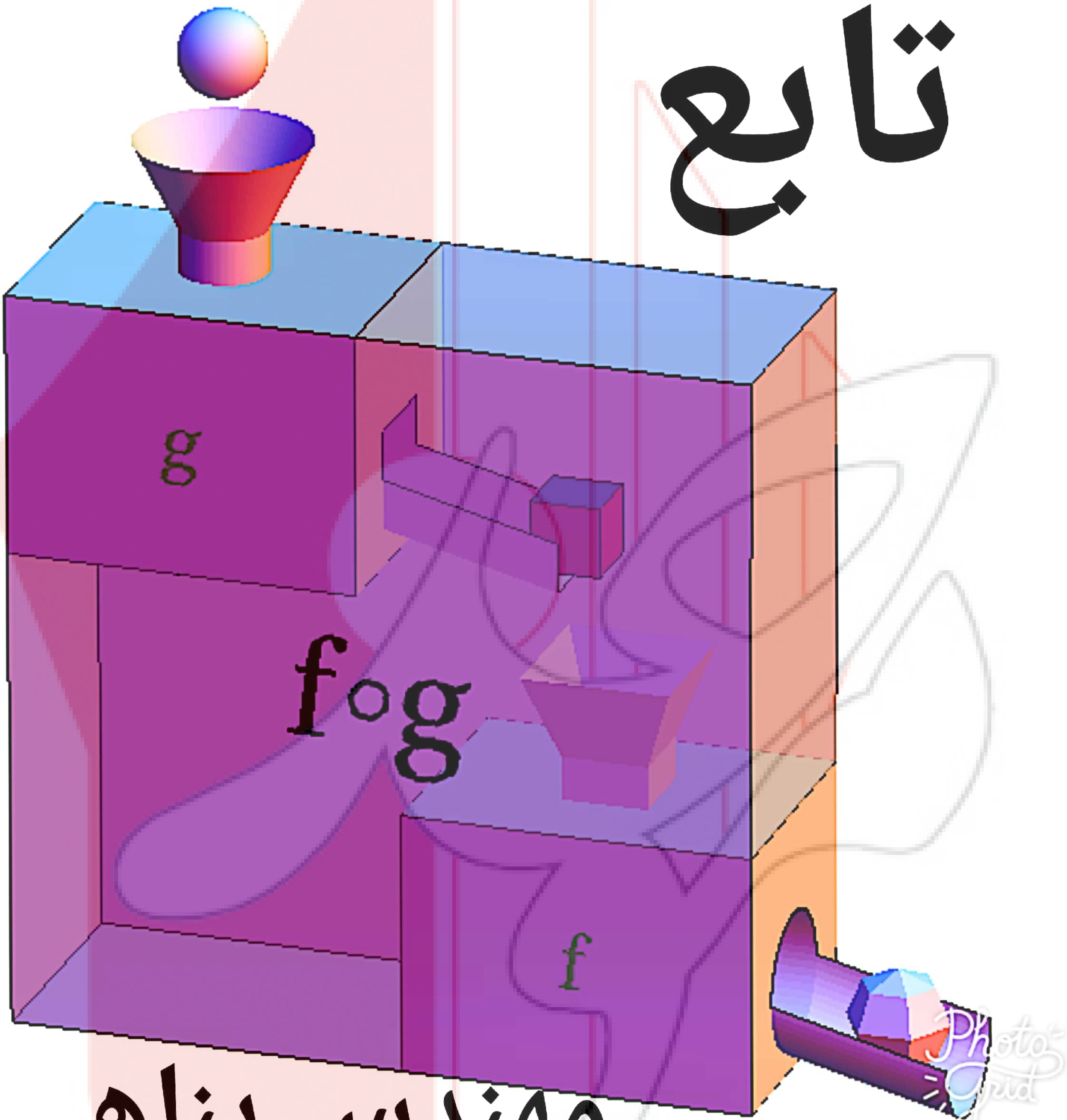
تابع



مهندس پناهی فر

تابع

تعریف: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. f زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ (یعنی یک رابطه از A به B) را یک تابع گویند هرگاه شرط زیر را دارا باشد.

$$(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$ اگر

به عبارت دیگر، f زیر مجموعه‌ای از زوجهای مرتب $A \times B$ است، به قسمی که هیچ دو عضو متفاوت f دارای مؤلفه اول مساوی نباشند.

❖ **مثال ۱۸:** دو مجموعه $A = \{-1, 3, 5\}$ و $B = \{0, 1\}$ مفروض‌اند. حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را تشکیل دهید. یک زیر مجموعه از $A \times B$ را که تابع f باشد، بیابید.

$A \times B =$

$f =$

✦ ***تذکر:*** *در هر تابع با دو متغیر مانند x و y ، هرگاه یکی از این دو متغیر به دلخواه (مثلاً x) به‌عنوان متغیر مستقل اختیار شود، متغیر دیگر متغیر تابع (وابسته) است. متغیر تابع همواره تحت قانون f با تغییر مستقل x تغییر می‌کند؛ یعنی در واقع برای هر x ، مقدار تابع با توجه به ضابطه قانون آن یعنی $y = f(x)$ مشخص می‌شود. از این پس به جای $(x, y) \in f$ می‌نویسیم $y = f(x)$ ؛ وقتی از یک تابع صحبت می‌شود، چنین می‌نویسیم:*

$$\begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ x \longrightarrow y = f(x) \end{cases}$$

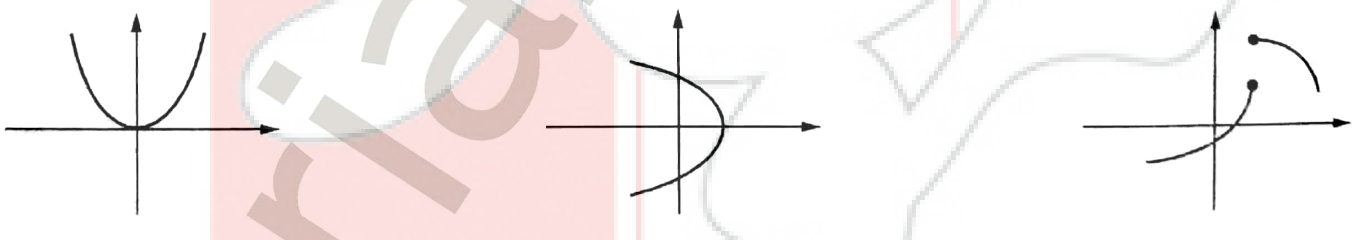
مجموعه‌ی A را حوزه تعریف و مجموعه B را حوزه مقادیر یا «هم دامنه» f می‌نامیم.

۱- بررسی تابع از نظر شکل:

وقتی منحنی یک شکل را می‌دهند، از کجا بفهمیم که نمایش‌دهنده‌ی ضابطه یک تابع است؟

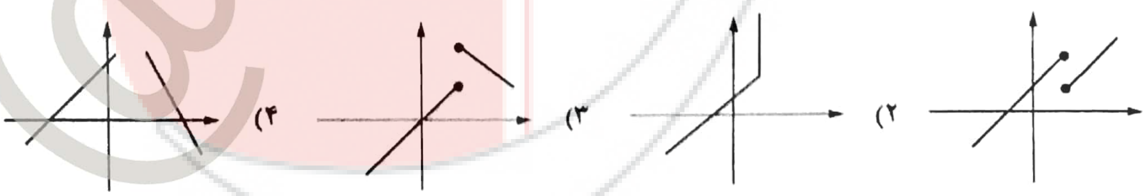
> ***به طور کلی، هر خط موازی محور y ها در یک تابع، نباید منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.***

به شکلهای زیر توجه نمایید:



«تابع است»   «تابع نیست»   «تابع نیست»

❖ **مثال ۱۹:** کدام شکل، نمودار یک تابع است؟



۱)   ۲)   ۳)   ۴)

حل: گزینه (۴)

۲- تابع از نظر ضابطه:

در ضابطه تابع به ازاء هر x، نبایستی بیش از یک y به‌دست آید.

❖ **مثال:** از روابط زیر کدامیک می‌تواند معرف یک تابع باشند؟

۱) $|y| = x$

۲) $|x-2| + |y-5| = 0$

۳) $(-1)^y = x$

۴) $x^2 + y^2 = 1$

۵) $4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$

۶) $y = 3x \pm 2\sqrt{x}$

۷) $y = \begin{cases} x+2 & , \quad x \geqslant 0 \\ x^2 & , \quad x \leqslant 1 \end{cases}$

۸) $y = \sin y$

۳- دامنه تابع و طرز تعیین آن:

مجموعه مؤلفه‌های اول زوج مرتب یک تابع را دامنه تعریف تابع گویند ($D_f = \{x | (x , y) \in D_f$

	نوع تابع	دامنه تابع (D_f)	مثال نمونه
۱	$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ... + k$	$D_f = R$	مثال : $y = x^3 - 3x^2$
۲	توابع کسری $y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f = R - \{x \| g(x) = 0\}$	مثال : $y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow D_f = R - \{\pm 1\}$
۳	$y = \sqrt[2n+1]{f(x)}$	اگر فرجه فرد باشد همان دامنه زیر رادیکال	$y = \sqrt[3]{\frac{1}{x+1}} \Rightarrow D_f = R - \{-1\}$
۴	$y = \sqrt[2n]{f(x)}$	اگر فرجه زوج باشد باید $f(x) \geqslant 0$ و محدوده x را بیابیم.	۱) $y = \sqrt{x-1} \Rightarrow x \geqslant 1$ $D_f = [1 , +\infty)$ ۲) $y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow 4 - x^2 \geqslant 0$ $\Rightarrow x^2 \leqslant 4 \Rightarrow D_f = [-2 , 2]$
۵	توابع لگاریتمی $f(x) = \log_b^{g(x)}$	$D_f = \{x \| g(x) > 0 , b > 0 , b \neq 1\}$	$y = \log_x^{x-3}$ باید : $\{x - 3 > 0 , x > 0 , x \neq 1\}$ $D_f = (3 , +\infty)$
۶	$y = \text{Sin}\,(f(x))$ $y = \text{Cos}\,(f(x))$	همان دامنه $f(x)$ است.	$y = \sin\sqrt{x} : D_f = [0 , +\infty)$
۷	$y = \text{tg}\,(f(x))$ $y = \text{cotg}\,(f(x))$	باید آنها را به صورت نسبت sin به cos بنویسیم و به طریق «۶» و «۲» حل کنیم.	$y = \text{tg}x \Rightarrow D_f = R - \{x \| x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$
۸	$y = \|f(x)\|$	همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.	مثال : $y = \|\sqrt{x}\| \longrightarrow D_f : x \geqslant 0$
۹	$y = [f(x)]$	همان دامنه تابع $y = f(x)$ است.	مثال : $y = [\sqrt{x}] \longrightarrow D_f : x \geqslant 0$
۱۰	$y = \text{Arc sin}\,(f(x))$ $y = \text{Arc cos}\,(f(x))$	باید $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$	مثال : $y = \text{Arc sin}(x - 1)$ باید $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$ $D_f = 0 \leqslant x \leqslant 2$
۱۱	$y = \text{Arc tg}\,(f(x))$ $y = \text{Arc cotg}\,(f(x))$	همان دامنه $f(x)$ است.	مثال : $y = \text{Arc tg}\,\frac{1}{x}$ $D_f = R - \{0\}$

❖ **مثال ۲۸:** اگر در تابع $f(x) = \dfrac{x^{2} + 1}{x^{2} + ax + b}$ دامنه تابع $R - \{-1\}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۳

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال ۲۹:** تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{9 - x^{2}}$ مفروض است. دامنه تابع با ضابطه‌ی $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ کدام است؟

۱) $[-3, 3]$ ۲) $[-1, 1]$ ۳) $[-9, 9]$ ۴) $[0, 3]$

حل: گزینه (۳)

۴- برد تابع و طرز تعیین آن:

مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج مرتب تابع را برد تابع گوئیم. $R_f = \{y \mid (x, y) \in f\}$

برای تعیین برد تابع به طور معمول، x را بر حسب y یافته و حدود تغییرات y را می‌یابیم. البته این روش در همه موارد بهترین راه نیست و بعد از مطرح کردن یک مثال، روشهای خاصی را در تعیین برد تابع مطرح می‌کنیم.

❖ **مثال ۳۰:** برد تابع $y = x^{2} - 2x + 4$ را بیابید؟

● روشهای خاص تعیین برد تابع:

۱ـ استفاده از مربع کامل کردن:

ابتدا به یاد بیاوریم که:

$$\boxed{x^{2} + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^{2} - \frac{a^{2}}{4}}$$

با استفاده از اتحاد بالا، برد بسیاری از توابع چند جمله‌ای را می‌توان یافت.

❖ **مثال ۳۱:** برد تابع‌های زیر را بیابید:

۱) $y = x^{2} - 2x + 3$

۲) $y = \sin^{2}x - 6\sin x + 15$

۳) $y = x - \sqrt{x}$

❖ **مثال ۳۲:** برد تابع f با ضابطه‌ی $y = x^4 + (1 - x^2)^2$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{2}, +\infty)$ ۲) $[0, +\infty)$ ۳) $[\frac{1}{4}, +\infty)$ ۴) $[0, \frac{1}{2}]$

حل: گزینه (۱)

۲ـ استفاده از روابط موجود:

در بسیاری از موارد می‌توانیم به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم از روابط ریاضی برد را بیابیم. استفاده از فرمول‌های زیر را در تست‌ها توصیه می‌کنیم:

۱) $0 \leqslant x - [x] < 1$

۲) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & , \quad x \in z \\ -1 & , \quad x \notin z \end{cases}$

۳) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad , \quad x > 0$

۴) $x + \frac{1}{x} \leqslant -2 \quad , \quad x < 0$

۵) $y = |x - a| \Rightarrow R_f = [0, +\infty)$

۶) $y = -|x - a| \Rightarrow R_f = (-\infty, 0]$

۷) $y = |x - a| + |x - b| \Rightarrow R_f = [|b - a|, +\infty)$

۸) $y = |x - a| - |x - b| \Rightarrow R_f = [-|b - a|, |b - a|]$

❖ **مثال ۳۳:** برد توابع زیر را بیابید:

۱) $y = 2x - 2[x] + 3$

۲) $y = 2x - [2x] + 3$

۳) $y = |x - 1| + |x - 2|$

۴) $y = |x - 1| - |x - 2|$

۵) $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

۳ـ برد کثیرالجمله‌ای‌ها از درجه فرد:

اگر کثیرالجمله‌ای از درجه فرد باشد، برد تابع R است.

❖ **مثال ۳۴:** برد تابع $y = x^3 - 5x^2 + 1$ کدام است؟

حل: با توجه به نکته گفته شده برد تابع $R_f = R$ است.

۴ـ برد تابع هموگرافیک $: y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

در تابع $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ ***با یافتن*** x ***خواهیم داشت که*** $x = \dfrac{b - dy}{cy - a}$ ***، لذا برد تابع:***

$$R_f = R - \{\frac{a}{c}\}$$

❖ **مثال ۳۵:** برد تابع $y = \dfrac{x}{2x + 1}$ کدام است؟

۱) R　　۲) $R - \{\frac{-1}{2}\}$　　۳) $R - \{\frac{1}{2}\}$　　۴) $R - \{1\}$

حل: گزینه (۳)

۶ـ استفاده از فرمول‌ها و روابط مثلثاتی:

در تعیین برد توابع مثلثاتی استفاده از فرمول‌های زیر و روابط شاخص مثلثاتی، کمک بسیار می‌کند:

۱) اگر $y = a\sin x + b\cos x \Rightarrow -\sqrt{a^2+b^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$

۲) اگر $y = \sin^{2n}x + \cos^{2n}x \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant y \leqslant 1$

۳) اگر $y = a\sin^2 x + b\sin x + c$

با قرار دادن $\sin x = 1$ و $\sin x = -1$ و $\sin x = \frac{-b}{2a}$، اگر $1 > \frac{-b}{2a} > -1$ باشد، حدود تغییرات y را می‌یابیم. حدود تغییرات، بزرگ‌ترین بازه بدست آمده برای y است.

۴) $y = a\,tgx + b\,cotgx \;,\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$R_f = [2\sqrt{ab}, +\infty)$

۵) $y = a\,tgx + b\,cotgx \;,\; \frac{\pi}{2} < x < \pi$

$R_f = (-\infty, -2\sqrt{ab}]$

❖ **مثال:** برد تابع‌های زیر را بیابید:

۱) $y = 3\sin x + 4\cos x$

۲) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

۳) $y = \sin^2 x + \sin x + 3$

۴) $y = 2tgx + 3cotgx \;,\; 0 < x < \frac{\pi}{2}$

۷ـ استفاده از روابط زیر در تستها، کمک بسیار می‌کند:

۱) $y = \frac{2x}{x^2+1} \longrightarrow R_f = [-1, 1]$

۲) $y = \frac{|x|}{|x|+1} \longrightarrow R_f = [0, 1)$

۳) $y = \frac{x^2}{x^2+1} \longrightarrow R_f = [0, 1)$

۸ـ برد تابع [f] : ([ ] علامت جزء صحیح است)

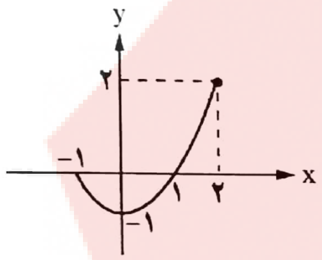
توجه می‌کنیم که [f] همواره اعداد صحیح را می‌دهد، بنابراین برای تعیین برد تابع [f]، ابتدا برد تابع f را یافته و سپس اعداد صحیح در این فاصله را می‌یابیم.

❖ **مثال:** برد تابع $y = [\sin x + \cos x]$ را بیابید؟

❖ **مثال:** برد تابع $y = \left[\frac{2x^2}{x^2 + 1}\right]$ را بیابید؟

۹ـ تعیین برد با استفاده از انتقال ساده نمودارها:

❖ **مثال:** هرگاه منحنی تابع $y = f(x)$ در فاصله $[-1 , 2]$ به‌صورت روبرو باشد، برد تابع $y = -1 + 2f(x - 1)$ کدام است؟



۱) $[-1 , 0]$

۲) $[-3 , 3]$

۳) $[-2 , 4]$

۴) $[0 , 4]$

حل: گزینه (۲)

✦ ***تذکر مهم:*** *تعیین برد توابع را به همین مطالب بالا خلاصه کردیم. در کتاب دیفرانسیل ، بررسی برد توابع کسری درجه ۲ به ۱ و درجه ۲ به ۲ نیز بررسی شده است.*

● تساوی دو تابع:

دو تابع f و g را مساوی گویند هرگاه دامنه آن‌ها با هم برابر باشد و ضابطه آن‌ها نیز با هم برابر باشد.

❖ **مثال:** از میان زوج توابع زیر معین کنید کدامیک با هم برابرند؟

۱) $y_1 = \sqrt{x}.\sqrt{x - 1}$ و $y_2 = \sqrt{x^2 - 1}$

۲) $y_1 = \log(x - 1) + \log(x + 1)$ و $y_2 = \log(x^2 - 1)$

● انواع تابع:

۱ـ تابع ثابت:

تابع $f: A \longrightarrow B$ را روی مجموعه‌ی A ثابت گوئیم، هرگاه به ازای هر x از A ، $f(x) = c$، که c عدد حقیقی ثابتی است.

✚ **تذکر ۱:** در هر تابع ثابت، برد تابع مجموعه‌ی یک عضوی است $R_f = \{c\}$.

✚ **تذکر ۲:** نمودار هر تابع ثابت خطی، یا مجموعه نقاطی روی خط موازی محور x ها، یا روی خود محور x هاست.

❖ **مثال:** بررسی کنید کدام یک از توابع زیر ثابت هستند؟

۱) $y = \sqrt{x - |x|}$

۲) $y = tgx . cotgx$

۳) $y = [x - [x]]$

۲ـ تابع همانی:

تابع $I_x = x \longrightarrow x$ را روی مجموعه X همانی گوئیم، هرگاه به ازای هر x از x ، $I_x(x) = x$

یعنی هر تابع همانی روی یک مجموعه، هر عضو آن مجموعه را به خود آن عضو می‌برد.

✚ **تذکر:** نمودار تابع همانی، همان خط $y = x$ (نیمساز اول و سوم) یا مجموعه نقاطی روی آن است.

❖ **مثال:** تابع با ضابطه $f(x) = (\sqrt{x})^2$ ، آیا همانی است یا خیر؟

۳ـ اعمال روی توابع:

اگر f و g توابعی با دامنه‌های D_f و D_g باشند آنگاه:

۱) $(f+g)_{(x)} = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
۲) $(f-g)_{(x)} = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
۳) $(f.g)_{(x)} = f(x) . g(x)$	$D_{f.g} = D_f \cap D_g$
۴) $(\frac{f}{g})_{(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = 2x - 3$ و $g(x) = x^2 - 1$، آن‌گاه حاصل $\dfrac{(f+g)_{(1)}}{(g.f)_{(-2)}}$ را بیابید.

حل:

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \ x < 0 \\ x^2 - 2 & , \ x \geqslant 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x-1 & , \ x < 1 \\ -1 & , \ x \geqslant 1 \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $(f \cdot g)_{(1)}$ و $(f - g)_{(2)}$ کدام است؟

حل:

❖ **مثال:** اگر

$f : \{(1,2), (-1,3), (3,5), (0,5)\}$ و $g : \{(1,3), (3,-1), (-2,0)\}$،

آن‌گاه مطلوبست محاسبه توابع زیر:

۱) $f.f$ ۲) $2f - g$ ۳) $\dfrac{g}{f}$

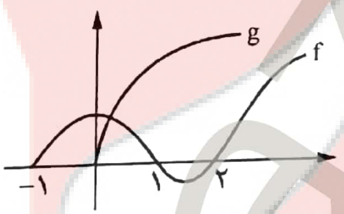
حل:

۱) $f.f$

۲) $2f - g$

۳) $\dfrac{g}{f}$

❖ **مثال:** اگر نمودار f و g شکل مقابل باشد دامنه $\left(\dfrac{f}{g}\right)_{(x)}$، کدام است؟



۱) $(-1, +\infty) - \{0, 1\}$

۲) $(-1, +\infty) - \{0, 1, 2\}$

۳) $(0, +\infty)$

۴) $[0, +\infty)$

حل:

گزینه (۳)

❖ **مثال:** اگر $f(x-1) = x^2 + 1$ باشد، $f(x)$ و $f(2)$ را بیابید.

حل:

❖ **مثال:** هرگاه $f(x) = \dfrac{|x|}{|x| + 1}$ باشد و داشته باشیم $f(x) = x f\left(\dfrac{1}{x}\right)$، در این‌صورت:

۱) $0 < x < 1$ ۲) $x \leqslant 0$ ۳) $x > 0$ ۴) $-1 < x < 0$

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{2} + \frac{1}{x^{2}}$ باشد، در اینصورت $f(x)$ را بیابید.

حل:

❖ **مثال:** اگر $f(x + y\ ,\ x - y) = 2(xy + y^{2})$، آن‌گاه $f(2\ ,\ 1)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) 2 ۴) 3

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$، آن‌گاه حاصل $f(x^{2} - 2x + 3)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 2

حل: گزینه (۱)

❖ **مثال:** اگر $f\left(\frac{x + y}{y + 2}\right) = \frac{x + y}{x + 2y + 2}$ باشد، $f(1)$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) -2

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** اگر $f(x) + xf(-x) = x^{2} + 1$، آن‌گاه $f(2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) 3 ۴) 2

حل: گزینه (۱)

❖ **مثال:** اگر $f(x) + f(-1) = 5x - 1$، آن‌گاه $f(1)$ کدام است؟

۱) 7 ۲) 5 ۳) -1 ۴) 3

حل: گزینه (۱)

۱) تابع $(fog)_{(x)}$ یعنی $f\big(g(x)\big)$ ، یعنی هر جا در تابع $f(x)$ به جای x آن قرار دهیم $g(x)$.

۲) دامنه تابع $(fog)_{(x)}$ ، زیر مجموعه‌ای از دامنه تابع $g(x)$ است و برد تابع fog ، زیر مجموعه‌ای از برد تابع f است.

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^{۲} - ۱$، آن‌گاه $(fog)_{(x)}$ و دامنه آن را بیابید.

حل:

✦ **تذکر:** می‌توانیم در بعضی از موارد، تابع fog را تشکیل دهیم و سپس دامنه آنرا بیابیم (هیچ عبارتی را حذف نمی‌کنیم).

❖ **مثال:** هرگاه $f(x) = ۲x + ۳$ و $g(x) = x - ۴$ ، مقدار $\dfrac{(fog)_{(۲)}}{(gof)_{(-۱)}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{-۷}{۳}$ ۲) $\dfrac{-۳}{۷}$ ۳) $\dfrac{۱}{۳}$ ۴) ۳

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** اگر $f(x) = ۳x + a$ و $g(x) = ۲ - x$ و $(fog)_{(x)} - (gof)_{(x)} = ۶$، آن‌گاه a کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

حل: گزینه (۳)

❖ **مثال:** اگر $y = f(x)$ یک تابع خطی گذرنده از نقاط $(a\ ,\ ۰)$ و $(۰\ ,\ a)$ باشد ضابطه‌ی $(fof)_{(x)}$ با کدام برابر است؟

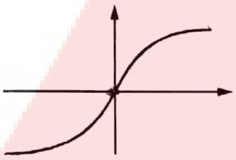
۱) ۰ ۲) x ۳) $f(x)$ ۴) $x + ۲a$

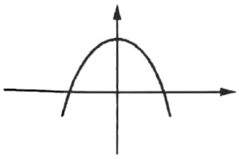
حل: گزینه (۲)

۵ـ تابع زوج و فرد:

تعریف: فرض کنید $x \in D_f$ و $-x \in D_f$ آن‌گاه
۱) تابع f زوج است هرگاه $f(x) = f(-x)$
۲) تابع f فرد است هرگاه $f(x) = -f(-x)$

✦ نکته ۱: با توجه به تعریف تابع زوج و فرد باید دامنه آن‌ها متقارن باشد.
✦ نکته ۲: منحنی تابع زوج، نسبت به محور y ها متقارن است.
✦ نکته ۳: منحنی تابع فرد، نسبت به مبداء مختصات متقارن است.


تابع فرد است


تابع زوج است

❖ مثال: نمودار تابع زوج، نسبت به .... تقارن دارد؟
۱) محور x ها ۲) محور y ها ۳) نیمساز ناحیه اول ۴) نیمساز ناحیه دوم
حل: گزینه‌ی (۲)

✦ تذکر ۱: مثال‌های واضح از تابع زوج، $y = x^2$ و $y = \cos x$ است.
مثال‌های واضح از تابع فرد، $y = x^5$ و $y = \sin x$ است.

❖ مثال: آیا تابع $y = x^6 - x^2$ در بازه‌ی $-3 \leqslant x < 3$ زوج است یا خیر؟
حل:

✦ تذکر ۲: برای تعیین زوج بودن یک تابع با دامنه متقارن باید $x \longrightarrow -x$ اگر ضابطه تغییر نکرد، تابع زوج است. ضمناً برای تعیین فرد بودن یک تابع با دامنه متقارن، ابتدا $x \longrightarrow -x$ و سپس ضابطه تابع حاصل را در منفی ضرب می‌کنیم.

❖ مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید؟

$$1)\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \geqslant 0 \\ -x^2 & , \ x < 0 \end{cases}$$

حل:

$$2)\quad f(x) = \frac{1}{|x-a|} - \frac{1}{|x+a|}$$

حل:

۸ـ تابع یک به یک:

تعریف: تابع $f: A \longrightarrow B$ را یک به یک گوئیم اگر و فقط اگر، به‌ازاء هر $x_1 , x_2 \in D_f$ اگر $f(x_1) = f(x_2)$، آن‌گاه $x_1 = x_2$.

تعریف فوق هم ارز است با:

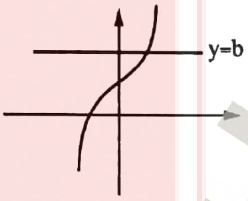
$\forall x_1 , x_2 \in D_f$ ، اگر $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

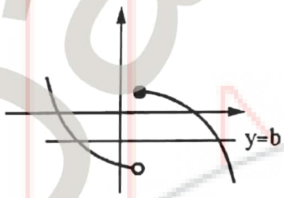
به بیان ساده‌تر، اگر هیچ دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول متمایز، دارای مؤلفه‌های دوم مساوی نباشند، تابع را یک به یک گوئیم.

به‌عنوان مثال تابع $f: \{(۱ , ۲) , (۳ , ۲) , (-۱ , -۴)\}$ یک به یک نیست، زیرا:

$f(۱) = f(۳) = ۲$

+تذکر: اگر تابعی یک به یک باشد، هر خط $y = b \in R_f$ موازی محور xها نمودار تابع را باید حداکثر در یک نقطه قطع کند.





❖ **مثال:** اگر تابع $\{(۲m , a) , (-۱ , ۳) , (m , ۳) , (۲ , -۲)\}$ یک به‌یک باشد، a کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱   ۴) ۲

حل: گزینه (۴)

❖ **مثال:** اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ، x \leqslant ۰ \\ x + b & ، x \geqslant ۱ \end{cases}$ روی دامنه خود یک به‌یک باشد، آن‌گاه:

۱) $b > -۱$ ۲) $b < -۱$ ۳) $b \leqslant -۱$ ۴) $b \geqslant -۱$

حل: گزینه (۱)

❖ **مثال:** ثابت کنید تابع $y = \sqrt[3]{x + ۱}$ یک به یک است.

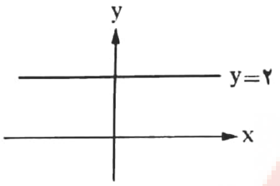
حل:

✦ **نکته ۱:** تابع ثابت، تابعی غیر یک به یک است (شکل (۱)).

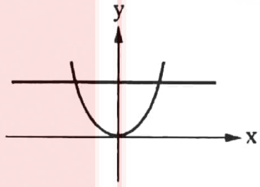
✦ **نکته ۲:** تابع زوج روی دامنه خود، تابعی است غیر یک به یک (شکل (۲)).

✦ **نکته ۳:** هر تابع که دارای محور تقارن $x = a$ باشد، تابعی است غیریک به یک (شکل (۳)).

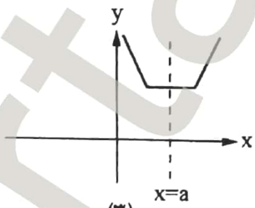
✦ **نکته ۴:** تابع فرد ممکن است یک به یک باشد و یا نباشد (شکل ۴ و ۵).



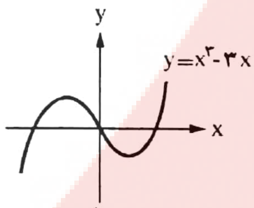
(۱)



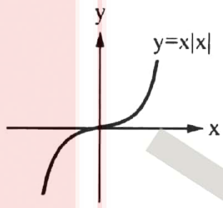
(۲)



(۳)



(۴)



(۵)

✦ **نکته ۵:** تابع $y = [f(x)]$، تابعی است غیر یک به یک (مگر آن‌که یک نقطه باشد).

✦ **نکته ۶:** تابع $f = \{(0 , 0)\}$، تابعی است هم زوج و هم فرد و هم یک به یک.

❖ **مثال:** یک به یک بودن توابع زیر را در دامنه خود بررسی کنید.

۱) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} , & x \geqslant 0 \\ -x , & x < 0 \end{cases}$

۲) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} , & x \neq 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \geqslant 0 \\ x , & x \leqslant 0 \end{cases}$

۴) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{2} , & x = 2k \\ \dfrac{x-1}{2} , & x = 2k-1 \end{cases}$

حل:

+ **تذکر ۱: اگر f یک‌به‌یک و پیوسته باشد، آن‌گاه یکنواست.**

+ **نکته ۷: توابع چند جمله‌ایی از درجه زوج با دامنه R یک‌به‌یک نیستند.**

+ **نکته ۸: اگر f تابعی متناوب باشد، آن‌گاه یک به‌یک نیست، زیرا حداقل یک x هست که $f(x+T)=f(x)$ اما $x+T \neq x$**

+ **نکته ۹: اگر تابع‌های $f: A \to B$ و $g: C \to D$ یک‌به‌یک باشند و fog یا gof تعریف شده باشند آن‌گاه هر کدام یک به یک هستند.**

اثبات:

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \longrightarrow g(x_1) = g(x_2) \xrightarrow[\text{یک به یک}]{g(x)\ \text{چون}} x_1 = x_2$$ اگر

+ **تذکر ۲: اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ و f یک به یک نباشد آن‌گاه gof نیز یک به یک نیست.**

مثلاً تابع $f(x) = |x|$، تابعی غیر یک‌به‌یک است و تابع $g(x) = a^x$، با این‌که تابعی یک به یک است اما $g(f(x))$، یعنی $a^{|x|}$ تابعی غیر یک‌به‌یک است.

+ **نکته ۱۰: اگر f یک به یک باشد، آن‌گاه توابع با ضابطه $f(x) + a$ و $af(x)$ ، $f(x-a)$ و $f(ax)$ نیز یک به یک‌اند.**

+ **نکته ۱۱: برای تعیین یک به یک بودن توابع چند ضابطه‌ای، ابتدا یک به یک بودن هر ضابطه را بررسی کرده، در صورت یک به یک بودن، در مرحله بعد، اشتراک بردهای ضابطه‌ها را تعیین می‌کنیم. اگر این اشتراک تهی باشد، تابع یک به یک است در غیراینصورت تابع غیر یک به یک است.**

❖ **مثال:** یک به یک بودن تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \leqslant 0 \\ x^2 - 1 & , x \geqslant 0 \end{cases}$ را بررسی کنید.

حل:

+ **نکته ۱۲: تابع $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $ad - bc \neq 0$ همواره یک به یک است.**

۹- تابع معکوس و معکوس‌پذیری:

تابع f با دامنه D_f و برد R_f را به صورت زوج مرتب‌های روبرو در نظر می‌گیریم.

$f: \{(x, y) \mid y = f(x)\}$

از تعویض جای مؤلفه‌های اول و دوم زوج مرتب‌ها به رابطه جدید می‌رسیم که آنرا وارون تابع f می‌نامیم. اگر این رابطه را با g نمایش دهیم، داریم:

$g: \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$

لذا g رابطه‌ای از R_f به D_f است.

مثلاً اگر $f: \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

و $g: \{(2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$

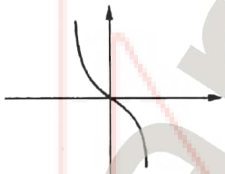
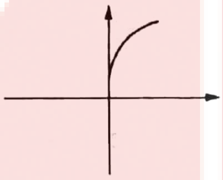
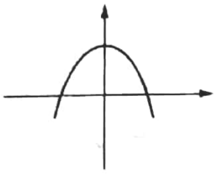
آن‌گاه تابع g را معکوس تابع f می‌نامیم.

تعریف: برای تابع f ، وارون f ، که با f^{-1} نشان داده می‌شود، مجموعه‌ی همه‌ی زوج مرتب‌های (a , b) است به طوری که (b , a) متعلق به f باشد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که f^{-1} تابع باشد آن است که f یک به یک باشد.

پس شرط معکوس‌پذیری یک تابع، آن است که، تابع یک به یک باشد.

❖ **مثال:** کدام یک از اشکال زیر به‌عنوان یک تابع دارای تابع معکوس <u>نیست</u>؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

حل: گزینه (۴)

+ تذکر۱: اگر f تابعی پیوسته و اکیداً یکنوا باشد، آن‌گاه معکوس‌پذیر است.

+ تذکر۲: برای یافتن ضابطه معکوس یک تابع کافیست x را از تابع استخراج کرده و سپس در رابطه، جای x و y را عوض کنیم.

❖ **مثال:** ضابطه‌ی تابع معکوس تابع $y = x^۳ + ۱$ را بیابید. دامنه و برد آنرا مشخص کنید.

حل:

$D_{f^{-۱}} = R_f \quad , \quad R_{f^{-۱}} = D_f$

❖ **مثال:** معکوس تابع $y = \sqrt{۲x - ۳}$ را بیابید.

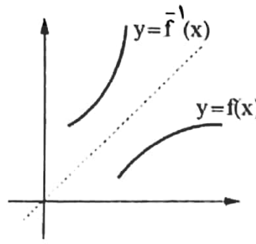
حل:

❖ **مثال:** معادله تابع معکوس تابع $f(x) = x^۲ - ۲x$ را با شرط $x \geqslant ۱$ بیابید.

حل:

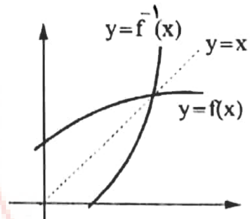
✦ **نکته ۴: وضعیت f و f^{-1} نسبت به هم:**

حالت (۱)



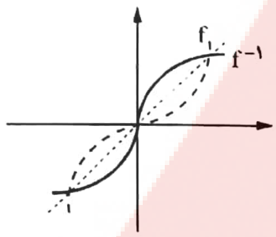
معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ ریشه ندارد.

حالت (۲)



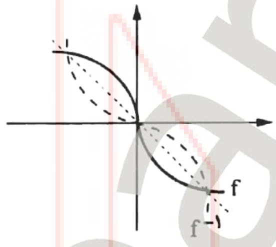
معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ یک ریشه دارد

حالت (۳)



معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ سه ریشه دارد.

حالت (۴)



معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ سه ریشه دارد اما فقط یکی از نقاط تلاقی روی $y = x$ است

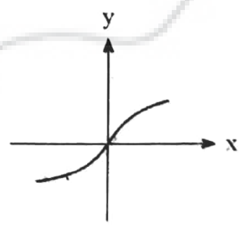
✦ **نکته ۵: اگر نمودار و تابع f و f^{-1} تلاقی داشته باشند و f صعودی باشد، یکی از نقاط تلاقی روی نیمساز ناحیه اول و سوم است لذا برای یافتن نقطه تلاقی کافیست معادله $f(x) = x$ را حل کنیم.**

❖ **مثال:** محل تلاقی نمودار تابع $y = x^5 + x - 1$ را با تابع معکوس آن بیابید.

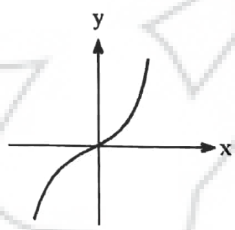
حل:

❖ **مثال:** اگر f با ضابطه $f(x) = x^3 + x$ باشد، نمودار f^{-1} به کدام صورت است؟

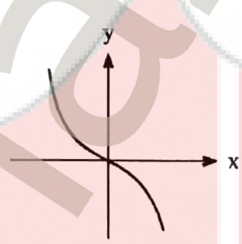
۱)



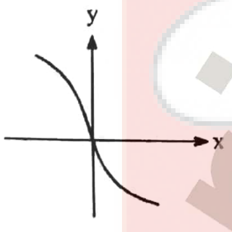
۲)



۳)



۴)



حل: گزینه (۱)

✦ **نکته ۶:** $R_f = D_{f^{-1}}$ و $D_f = R_{f^{-1}}$

❖ **مثال:** برد تابع معکوس $y = x\sqrt{x} + ۱$ کدام است؟

حل:

✦ **نکته ۷:** اگر $y = x$ محور تقارن تابعی باشد، آن‌گاه $f^{-۱}$ و f برهم منطبق‌اند.

مثلاً نمودار معکوس $y = \frac{۱}{x}$ همان نمودار تابع $y = \frac{۱}{x}$ است.

✦ **نکته ۸:** در تابع هموگرافیک $y = \frac{ax + b}{cx + d}$، اگر $a+d = ۰$ باشد، آن‌گاه ضابطه معکوس تابع با خود آن برابر است.

❖ **مثال:** ضابطه معکوس تابع $y = \frac{x - ۳}{۲x - ۱}$ کدام است؟

حل:

✦ **نکته ۹:** شرط لازم و کافی برای آن‌که $f = f^{-۱}$ باشد، آنستکه $(fof)_{(x)} = x$ باشد.

✦ **نکته ۱۰:** برای یافتن ضابطه معکوس تابع دو ضابطه‌ای:

$$f(x) = \begin{cases} f_۱(x) & ، x \in D_{f_۱} \\ f_۲(x) & ، x \in D_{f_۲} \end{cases}$$

باید شرایط زیر برقرار باشد:

۱) هر کدام از ضابطه‌ها در دامنه خود معکوس‌پذیر باشند.

۲) برد دو تابع در ضابطه‌ها با هم اشتراک نداشته باشد.

آن‌گاه $f^{-۱}(x)$ برابر است با:

$$f^{-۱}(x) = \begin{cases} f_۱^{-۱}(x) & ، x \in D_{f_۱^{-۱}} = R_{f_۱} \\ f_۲^{-۱}(x) & ، x \in D_{f_۲^{-۱}} = R_{f_۲} \end{cases}$$

❖ **مثال:** ضابطه معکوس تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + ۱ & ، x \geqslant ۰ \\ \frac{۱}{x} - ۱ & ، x < ۰ \end{cases}$ را بیابید.

حل:

+ نکته ۱۱: اگر f و g دو تابع معکوس‌پذیر باشند، آن‌گاه روابط زیر برقرار است:

۱) $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

۲) $(fog^{-1})^{-1} = gof^{-1}$

۳) $(f^{-1}og)^{-1} = g^{-1}of$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = ۲x + ۱$ و $g(x) = x - ۱$، آن‌گاه fog^{-1} کدام است؟

۱) $۲x + ۱$　　۲) $۲x + ۲$　　۳) $۲x + ۳$　　۴) $۲x + ۴$

حل: گزینه (۳)

+ نکته ۱۲: ترکیب هر تابع با تابع وارون خود یک تابع همانی است.

۱ـ به‌ازاء هر x از دامنه f،　$(f^{-1}of)_{(x)} = x$

۲ـ به‌ازاء هر x از دامنه f^{-1}،　$(fof^{-1})_{(x)} = x$

۳ـ در حالت کلی　$(fof^{-1})_{(x)} \neq (f^{-1}of)_{(x)}$

❖ **مثال: وارون تابع با ضابطه $y = x^۲$ را در فاصله $[۲ , ۳]$ پیدا کرده و $f^{-1}of$, fof^{-1} را پیدا کرده و آن‌ها را رسم کنید.**

حل: تابع در فاصله $[۲ , ۳]$ اکیداً صعودی است لذا $۴ \leqslant y \leqslant ۹$ بنابراین $x = \sqrt{y}$ پس:

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $R_{f^{-1}} = [۲ , ۳]$, $D_{f^{-1}} = [۴ , ۹]$

$f(x) = x^۲$, $D_f = [۲ , ۳]$, $R_{f^{-1}} = [۴ , ۹]$

شکل دو منحنی را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم، دقت کنید (شکل ۱)،