

در سنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مقاطع مخروطی

رویه مخروطی: فرض کنید دو خط d و a در نقطه A متقاطع (غیر عمود) باشند سطح حاصل از دوران خط d حول خط a را سطح مخروطی می نامیم. در این حالت خط a را محور تقارن، نقطه A را رأس و خط d را مولد می نامیم

فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی

۱. اگر صفحه p بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس عبور نکند شکل حاصل دایره است.
۲. در حالتی که صفحه p بر محور a عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل بیضی است.
۳. اگر صفحه p با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک سهمی است.
۴. اگر صفحه p به گونه ای باشد که هر دو تکه سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور a نباشد، در این صورت فصل مشترک هذلولی است.

تعریف مکان هندسی:

مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا که دارای ویژگی مشترک باشند و هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

چند مکان هندسی مهم در صفحه (فضا)

۱. مکان هندسی نقاطی در صفحه که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله باشند خط عمود منصف AB است. (مکان هندسی در فضا صفحه عمود منصف AB است)
۲. مکان هندسی نقاطی در صفحه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشند، نیم ساز آن زاویه است.
۳. مکان هندسی نقاطی در صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت K باشند، دایره ای به مرکز O و شعاع K است. (مکان هندسی در فضا کره است)
۴. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k باشند، دو خط موازی d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.

کاربرد مکان هندسی

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

یکی از مهم ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشد، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند.

مثال: دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ باشد

مثال: نقاط A, B, C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ باشد.

مثال: نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ و از d به فاصله ۳ باشد. (بحث کنید)

مثال: صفحه p یک سطح استوانه ای را قطع می کند. در حالت های مختلف درباره سطح مقطع حاصل بحث کنید (۴ حالت)

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست: مکان هندسی نقاطی از فضا که از سه راس مثلث ABC به یک فاصله باشند، کدام است.

- (۱) دو صفحه موازی (۲) دو خط (۳) ۴ نقطه (۴) یک خط عمود بر ABC

تست: تعداد نقاطی از صفحه که به فاصله ثابت P از نقطه A باشند و از نقاط B و C به یک فاصله باشند، کدام است.

- (۱) حداقل یکی (۲) حداکثر یکی (۳) حداکثر دو تا (۴) دقیقا دو

تست: نقطه A در خارج صفحه P است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه P که از A به فاصله L باشد، کدام است.

- (۱) یک دایره (۲) یک نقطه (۳) یک نقطه یا یک دایره (۴) نقطه یا دایره یا تهی

تست: خط d به فاصله ۲ از مرکز دایره ای به شعاع ۵ قرار دارد. روی دایره چند نقطه وجود دارد که از d به فاصله ۴ باشد.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست: نقطه A و خط d در یک صفحه مفروض اند. در این صفحه چند نقطه وجود دارد به طوری که از A به فاصله معلوم k و از d به فاصله معلوم k' باشند.

- (۱) ۴ نقطه (۲) ۲ نقطه (۳) حداکثر ۴ نقطه (۴) حداکثر ۲ نقطه

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست: در مثلث ABC ضلع BC و مساحت مثلث ABC ثابت هستند. مکان هندسی راس A کدام است
(۱) دو خط موازی (۲) سطح یک دایره (۳) دو خط متقاطع (۴) دو خط عمود بر هم

تست: خط d و نقطه A به فاصله 7 از آن موجود است. تعداد نقاطی که به فاصله 10 از A و 3 از d هستند، کدام است.

۱(۴)

۲(۳)

۳(۲)

۴(۱)

تست: نقطه M بین دو صفحه موازی P و P' ، به فاصله 2 از صفحه P و 12 از صفحه P' واقع است. مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله و از نقطه M به فاصله 13 باشند، کدام است.

(۱) دایره ای به شعاع 24 (۲) پاره خطی به طول 10 (۳) دایره ای به شعاع 12 (۴) نقطه

تست: دایره $C(O,R)$ و نقطه ثابت A روی آن مفروضند. مکان هندسی مرکز دایره هایی که از A گذشته و بر دایره C مماس باشند، کدام است؟

(۱) یک دایره (۲) دو خط (۳) یک کمان از دایره (۴) دو نیم خط

درسنامه ،نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

معادله دایره

اگر مرکز دایره $O(\alpha, \beta)$ و شعاع دایره r باشد در این صورت معادله استاندارد دایره برابر است با

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

نکته: دایره به مرکز O و شعاع r را بصورت $C(O, r)$ نمایش می دهیم.

مثال: معادله دایره به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع 2 را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محور های مختصات بدست آورید.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که نقطه $(-1, -2)$ مرکز آن و $M(1, 1)$ یک نقطه آن باشد.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که نقطه $O(1, -1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $3X-4Y+3=0$ مماس باشد.

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که (۰، ۱) مرکز آن بوده و روی خط به معادله $X+Y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که خطوط $X+Y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که از نقاط (۱، ۲) و (۰، ۳) بگذرد و خط $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

معادله ضمنی دایره

اگر معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله ضمنی دایره باشد در این صورت مرکز و شعاع دایره برابر است با:

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

نکته: معادله ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر.....

مثال: مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ را بدست آورید.

مثال: حدود a را طوری بدست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم

مثال: وضعیت نقطه $(3, -2)$ و دایره به معادله $x^2+y^2-x+2y-4=0$ را نسبت به یکدیگر مشخص کنید.

نکته: اگر نقطه در بیرون دایره باشد از این نقطه دو مماس با طول مساوی بر دایره رسم می گردد.

تست: طول قطعه مماسی که از نقطه $(2, 1)$ بر دایره $(x-1)^2+y^2=1$ رسم می شود کدام است.

$$\sqrt{3}(4)$$

$$3(3)$$

$$\sqrt{2}(2)$$

$$\sqrt{8}(1)$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست: از نقطه (۱ و ۲) مماسی به طول $2\sqrt{3}$ بر دایره $2x^2+2y^2-4x+2ay+2=0$ رسم کرده ایم. a کدام است.

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

نکته: اگر نقطه روی محیط دایره باشد از این نقطه تنها یک مماس بر دایره رسم می شود

مثال: در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله خط مماس را بدست آورید.

نکته: اگر نقطه در داخل دایره باشد از این نقطه بی شمار وتر می گذرد که.....

مثال: طول وتری که دایره به معادله $x^2+y^2-2x=\frac{19}{5}$ از خط $y=2x$ جدا می کند را بدست آورید.

تست: طول وتر می نیمی که از نقطه (۱- و ۳) در دایره $x^2+y^2-6x+2y+1=0$ می توان رسم کرد کدام است.

۶(۴)

۳(۳)

۲(۲)

$3\sqrt{2}$ (۱)

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

وضعیت خط و دایره نسبت به هم:

مثال: وضعیت خط $x+y=1$ و دایره $x^2+y^2-2x-2y=2$ نسبت به هم چگونه است.

تست: به ازای کدام مقدار a دایره $x^2+y^2-2x+4y+a=0$ بر خط به معادله $x+3y=0$ مماس است.

$$4(4)$$

$$3(3)$$

$$\frac{5}{2}(2)$$

$$\frac{3}{2}(1)$$

تست: چند نقطه روی خط $x=4$ یافت می شود که از آنها دایره $(x-1)^2+y^2=4$ به زاویه قائمه رویت شود.

$$4(4) \text{ هیچ}$$

$$3(3) \text{ بی شمار}$$

$$2(2)$$

$$1(1)$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

وضعیت دو دایره نسبت به هم

اگر دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروض باشند و فاصله مراکز دو دایره d باشد در اینصورت:

مثال: وضعیت دو دایره $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ و $x^2+y^2=9$ را نسبت به هم بدست آورید.

تست: مقدار k برای آنکه دو دایره $x^2+y^2-2x-2y=k$ و $x^2+y^2-8x-2y+16=0$ بر هم مماس خارج باشند کدام است.

۰(۴

-۱(۳

۱(۲

۲(۱

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مماس مشترک خارجی و داخلی دو دایره:

تست: طول مماس مشترک دو دایره $x^2+y^2-4x+3=0$ و $x^2+y^2-10x+21=0$ کدام است.

$\sqrt{2}$ (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) وتر مشترک دو دایره:

مثال: معادله وتر مشترک و طول وتر مشترک دو دایره $x^2+y^2+2x=0$ و $x^2+y^2+2y=0$ را بدست آورید.

کمترین و بیشترین فاصله یک نقطه تا یک دایره:

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تست: کمترین فاصله نقطه (۳ و -۱) از دایره $x^2+(y+1)^2=4x$ کدام است.

۲(۴)

۶(۳)

۳(۲)

۵(۱)

مثال: کمترین و بیشترین فاصله نقطه $M(x,y)$ تا دایره $C(O,R)$ به ترتیب ۴ و ۹ است. طول مماسی که از نقطه M بر دایره C رسم میشود را بدست آورید.

محاسبه کمترین و بیشترین مقدار x,y در معادله دایره

تست: در معادله $x^2+y^2-4x+2y=20$ مقدار ماکزیم y کدام است.

۴(۴)

۳(۳)

۲۱(۲)

۱۰(۱)

نکته: مکان هندسی نقاطی از صفحه که ...

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیدا کنید که فاصله آنها از نقطه $A(2, 4)$ مساوی $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر فاصله آنها از نقطه $B(1, 2)$ باشد

دایره محیطی مثلث:

مثال: نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 1)$ و $C(3, 1)$ رئوس مثلث ABC هستند.

۱. معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید.

۲. معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

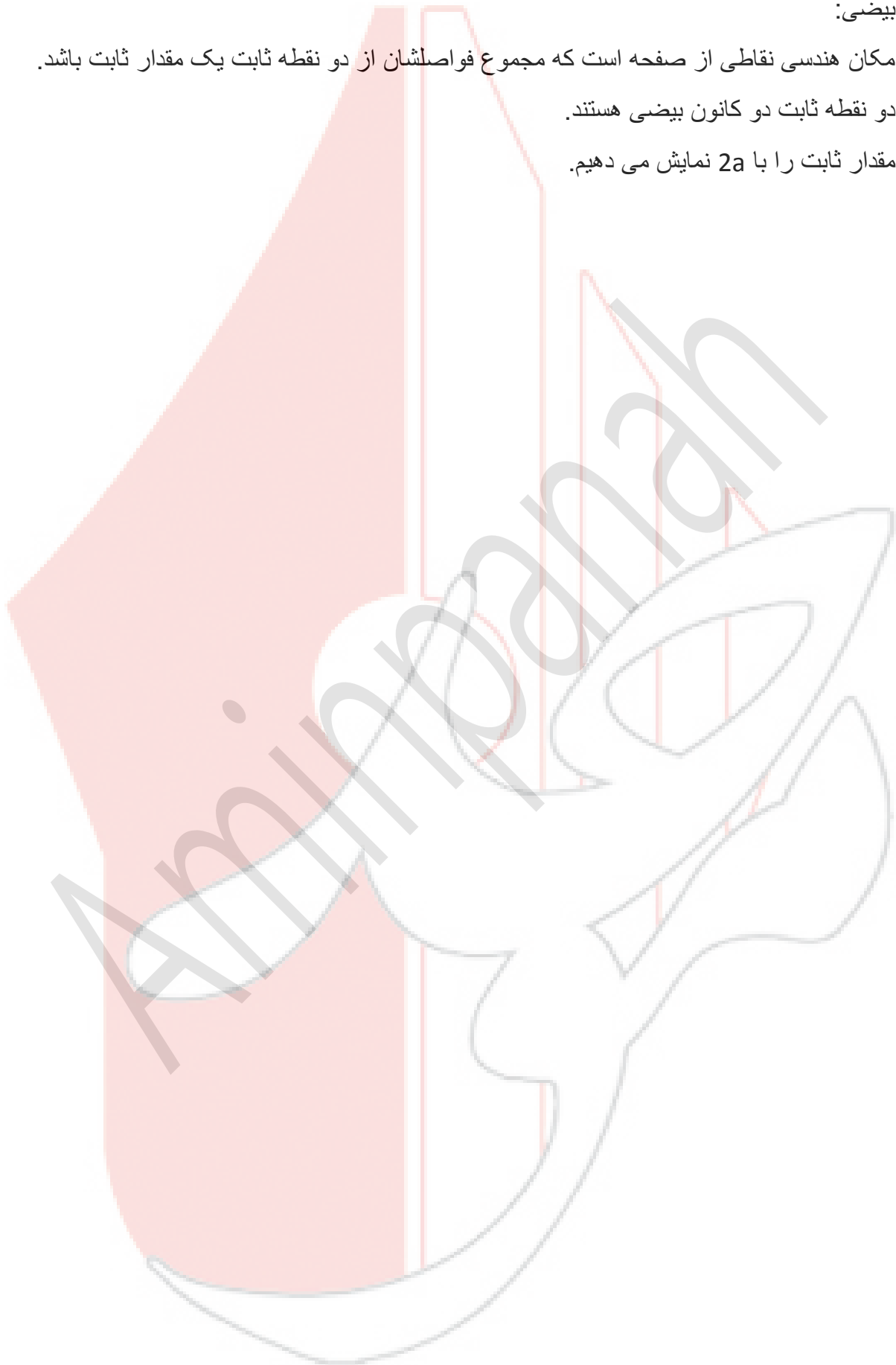
درسنامه ،نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

بیضی:

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت یک مقدار ثابت باشد.

دو نقطه ثابت دو کانون بیضی هستند.

مقدار ثابت را با $2a$ نمایش می دهیم.



درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: بیضی با مرکز نقطه $(2, -3)$ را رسم کنید که بیضی در ناحیه دوم بر محورهای مختصات مماس باشد. سپس طول قطر بزرگ، کوچک و فاصله کانونی را بدست آورید.

مثال: در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $\angle FBF'$ چند درجه است.

مثال: نقطه M روی بیضی به قطرهای 6 و 10 واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر 4 است.

۱. نشان دهید مثلث $\angle MFF'$ قائم الزاویه است

۲. طول های MF و MF' را بدست آورید

مثال: ثابت کنید طول وتر کانونی بیضی برابر است با $2b^2/a$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

خروج از مرکز بیضی:

مثال: نسبت قطر های بیضی $\frac{5}{3}$ است. خروج از مرکز را بدست آورید.

مثال: اگر فاصله کانونی یک بیضی را نصف و قطر بزرگ آن را سه برابر نمائیم خروج از مرکز چه تغییری می کند.

تست: اگر نقاط $(1, 4)$ و $(-4, 1)$ مختصات دو کانون بیضی و نقطه $(4, 0)$ نقطه ای روی محیط بیضی باشد خروج از مرکز بیضی کدام است.

$$\frac{5}{6}(4)$$

$$\frac{2}{3}(3)$$

$$\frac{4}{5}(2)$$

$$\frac{3}{4}(1)$$

تست: طول قطر کوچکتر یک بیضی $4\sqrt{2}$ و فاصله کانون تا نزدیکترین راس ۲ واحد است. خروج از مرکز بیضی کدام است.

$$\frac{2}{3}(4)$$

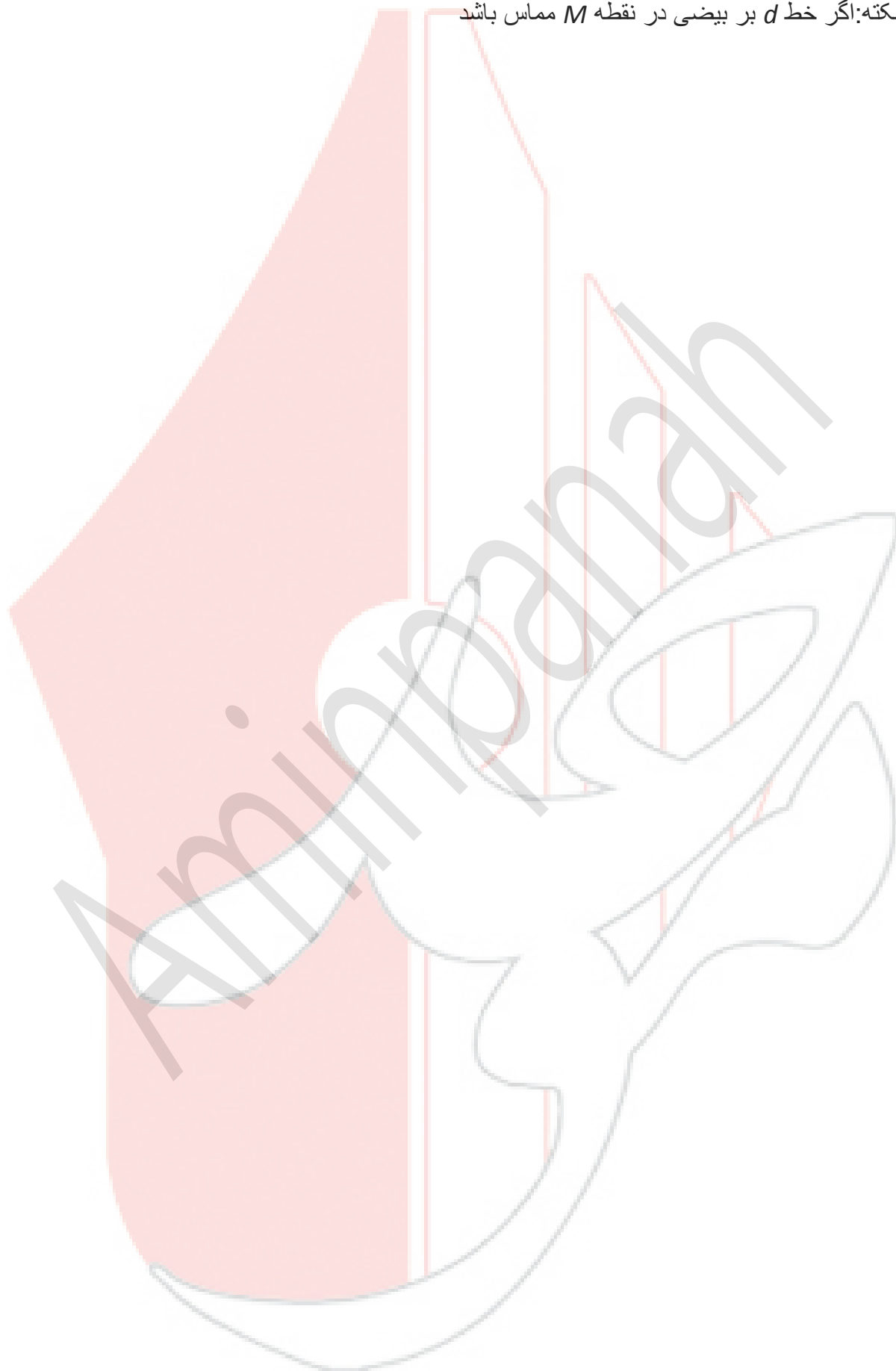
$$\frac{1}{4}(3)$$

$$\frac{1}{2}(2)$$

$$\frac{1}{3}(1)$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

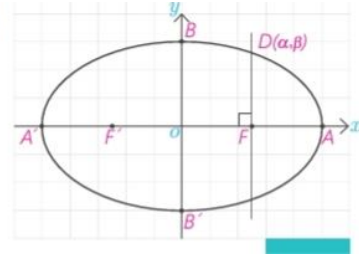
نکته: اگر خط d بر بیضی در نقطه M مماس باشد



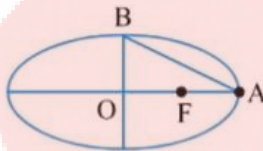
درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

کاردکلاس

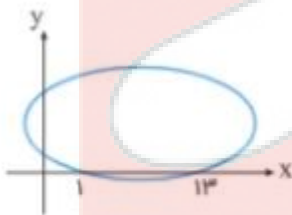
۱- مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر c است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در نقطه D قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید.



در شکل زیر پاره‌خط‌های $OA = a$ ، $OB = b$ و $OF = c$ به ترتیب نصف قطر بزرگ، نصف قطر کوچک و نصف فاصله کانونی بیضی هستند. اگر $AB = a + c$ ، آنگاه خروج از مرکز بیضی کدام عدد است؟



در شکل زیر، اگر $F(13, 5)$ یکی از کانون‌های بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



$$\begin{array}{l} (2) \quad \frac{\sqrt{2}}{3} \\ (4) \quad \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{1}{3} \\ (3) \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{array}$$

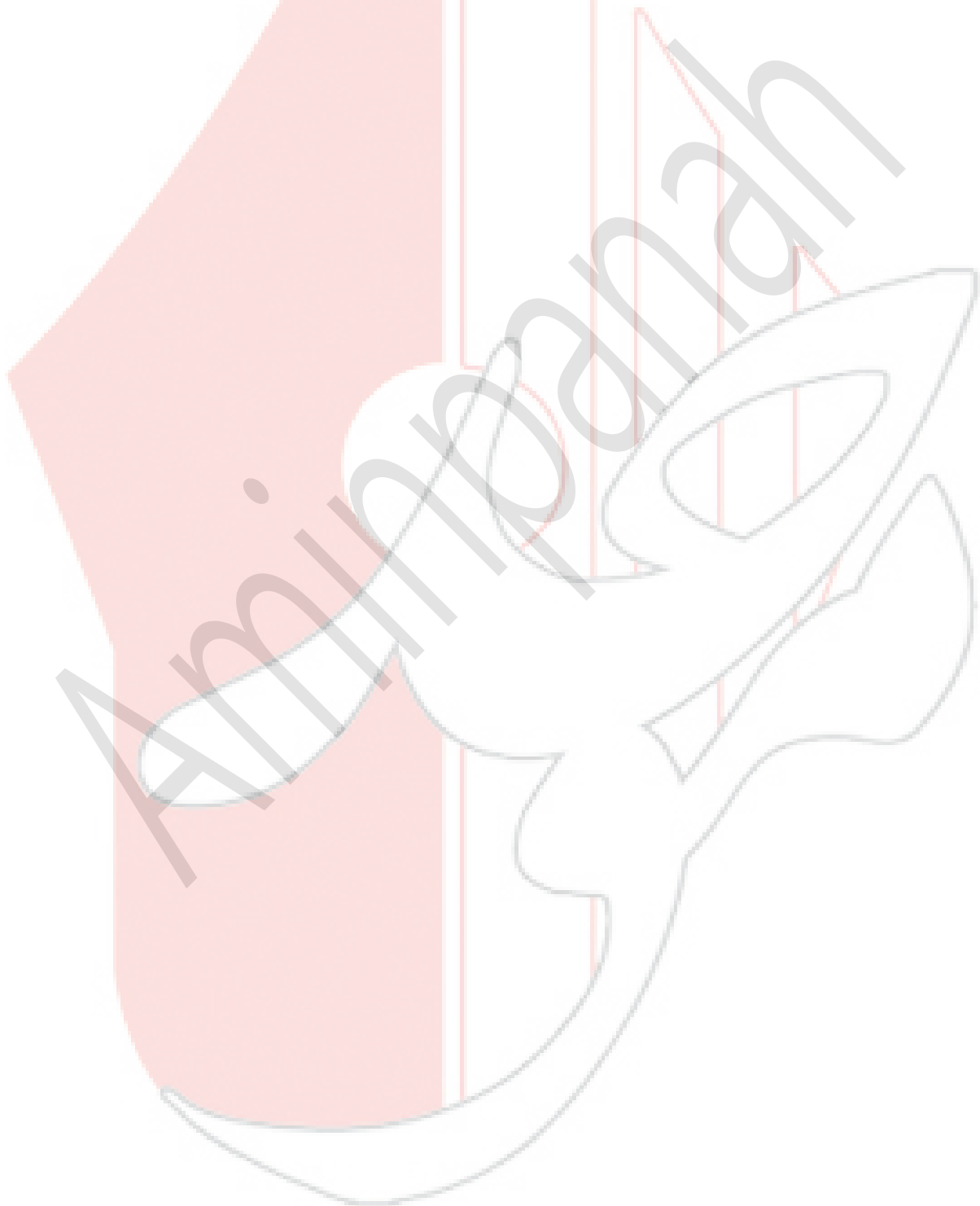
درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

سهمی

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

نقطه ثابت را کانون سهمی و خط ثابت را خط هادی سهمی می گویند.

معادله سهمی :



درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: معادله سهمی با راس (۲۱) و کانون (۲۵) را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.

مثال: مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به راس (۴۶) و خط هادی $x=9$ را بنویسید.

مثال: معادله سهمی را بنویسید که کانون آن (۱۲) و خط هادی آن $x=-3$ باشد.

تبدیل معادله سهمی به صورت متعارف:

مثال: معادله $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ را بصورت استاندارد تبدیل کنید و سپس مختصات راس، کانون و خط هادی را بنویسید.

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: سهمی $y^2=2x-4y$ مفروض است. مختصات راس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محور های مختصات را بیابید.

مثال: سهمی $y^2=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره های رسم می کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

نکته: اگر معادله گسترده سهمی را داشته باشیم می توانیم با مشتق گیری مختصات راس را بدست آوریم و با فرمول زیر a را بدست آوریم

مثال: مختصات راس و فاصله کانون تا خط هادی سهمی به معادله $x^2-4x+2y-5=0$ را بدست آورید.

نکته: اگر از کانون سهمی خطی عمود بر محور کانونی سهمی رسم کنیم تا سهمی را در دو نقطه A و B قطع کند طول پاره خط AB (وتر کانونی سهمی) برابر است با

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

معادله محور تقارن سهمی:

مثال: معادله محور تقارن سهمی به معادله $5Y^2+2X-4Y+3=0$ را بدست آورید.

وضعیت نقطه و سهمی نسبت به یکدیگر:

مثال: وضعیت نقطه (۲- و ۱) و سهمی به معادله $2Y-3X-4Y^2+1=0$ را بدست آورید.

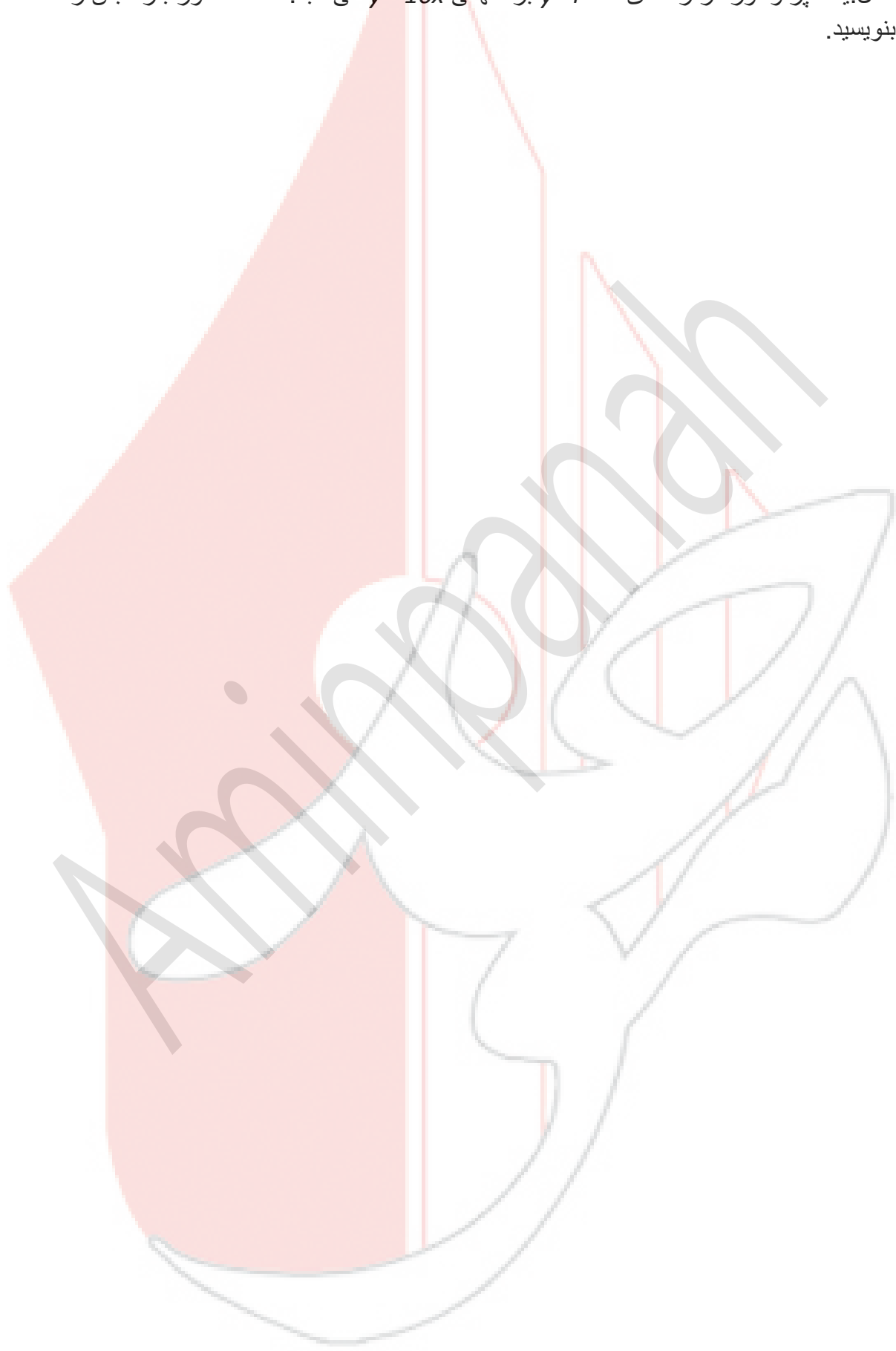
نکته: اگر نقطه در بیرون سهمی باشد از این نقطه می توان دو مماس بر سهمی رسم نمود. در صورتی که نقطه در بیرون سهمی و روی محور تقارن باشد طول مماسهای رسم شده با هم برابر است.

مثال: اگر از نقطه $A(m-1, n)$ دو مماس با طول مساوی بر سهمی $3y^2-6y-2x=3$ رسم شود مقادیر nm را بدست آورید.

ویژگی بازتابندگی سهمی:

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

مثال: یک پرتو نور در راستای خط $y=4$ بر سهمی $y^2=16x$ می تابد. معادله محور باز تابش را بنویسید.





۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و برخط $3x+4y=0$ مماس باشد.

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ و تری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

۲- حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک

دایره باشد.

۳- وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را

نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

۴- وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x=4$

ب) $x^2+(y-1)^2=1$, $(x-1)^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

د) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

۵- نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله

دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۶- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x+4y=0$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

ب) $x+y=2$, $x^2+y^2=2$

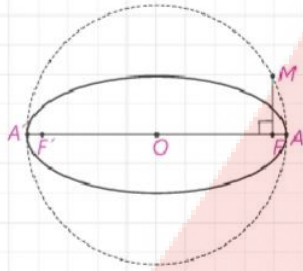
ج) $x+y=1$, $x^2+y^2-2x-2y=2$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه



تمرین

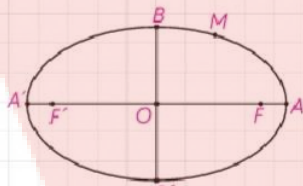
۱- دو نقطه A و B روی یک بیضی F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:
 الف) در حالتی که دو پاره‌خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.
 ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF$

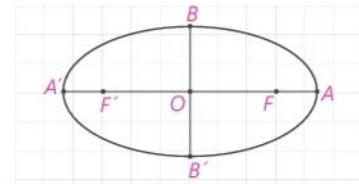


$OA=5$ $OB=3$ $OF=4$

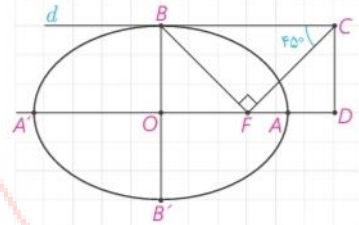
۴- نقطه M روی بیضی به اقطار 6 و 10 واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر 4 واحد است.
 الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.
 ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.
 ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟



۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\widehat{BCF} = 45^\circ$ ، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



۷- سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) را به دست آورید.

۹- معادله سهمی را بنویسید که $S(1, 2)$ رأس و $F(1, -2)$ کانون آن باشد.

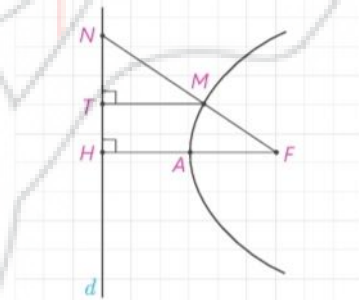
۱۰- سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱- سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از

$$\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

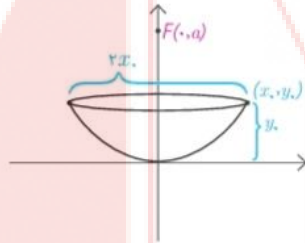
نقطه M ، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید:



درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

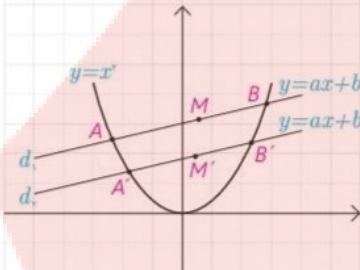


۱۳- یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.



۱۴- فرض کنید از مثلث ABC ، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شبیه رسم این مثلث را توضیح دهید.

۱۵- سهمی $y = x^2$ و دو خط موازی $d_1: y = ax + b$ و $d_2: y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.



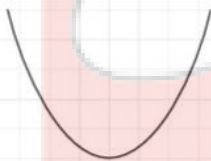
الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^2$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M را به دست آورید.

پ) مراحل الف) و ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

تستهایی از مقاطع مخروطی:

۱. معادله دایره ای که نقطه (۴ و ۵) مرکز آن بوده و بر دایره $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ مماس خارج باشد کدام است.

$$(1) x^2+y^2-8x-10y-32=0$$

$$(2) x^2+y^2-8x-10y+25=0$$

$$(3) x^2+y^2-8x+10y-32=0$$

$$(4) x^2+y^2-8x-10y-25=0$$

۲. بیضی افقی با کانون مبدا مختصات، محور x ها را در دو نقطه ۲- و ۱۸ قطع میکند. اگر این بیضی محور y ها را در دو نقطه M و N قطع کند طول MN کدام است؟

$$(4) 5/6$$

$$(3) 6/4$$

$$(2) 4/8$$

$$(1) 7/2$$

۳. اگر وتری که دایره $x^2+y^2-2x+4y+m=0$ روی خط $x+y=3$ جدا می کند برابر ۸ باشد، m کدام است.

$$(4) -19$$

$$(3) -21$$

$$(2) -24$$

$$(1) -18$$

۴. دایره ای که خطوط $2x+y=6$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن و خط $3x-4y+1=0$ بر آن مماس است، از کدام نقطه می گذرد.

$$(4) (-1, 2)$$

$$(3) (0, 1)$$

$$(2) (-5, 0)$$

$$(1) (5, 0)$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

۵. دایره ای به مرکز $O(0,2)$ که بر دایره $x^2+y^2+4x-6y=32$ مماس داخل است، محور طولها را در نقطه ای با کدام طول می تواند قطع کند.

$2-4\sqrt{5}$ (۱) $4\sqrt{5} + 2$ (۲) $2\sqrt{19}$ (۳) $-4\sqrt{19}$ (۴)

۶. شیب خط مماس بر دایره $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ در نقطه $M(b,a)$ روی آن کدام است.

1 (۱) $\frac{b}{a}$ (۲) $\frac{-b}{a}$ (۳) -1 (۴)

۷. نقطه $F(-2,K)$ کانون یک سهمی است که راس آن مبدا مختصات است. اگر محور تقارن این سهمی موازی یکی از محورهای مختصات باشد، معادله خط هادی کدام است.

$x=-2$ (۱) $y=-2$ (۲) $x=2$ (۳) $y=2$ (۴)

۸. اگر خط $3x-4y+2=0$ و دایره $x^2+y^2-6x+2y+m=0$ نقطه برخوردی نداشته باشند، m چند عدد صحیح می تواند اختیار کند.

8 (۱) 10 (۲) 9 (۳) 11 (۴)

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

۹. معادله سهمی ای که راس آن مبدا مختصات و خط $y=3$ خط هادی آن باشد، کدام است.

$$y^2+12x=0 \text{ (۴)} \quad y^2-12x=0 \text{ (۳)} \quad x^2-12y=0 \text{ (۲)} \quad x^2+12y=0 \text{ (۱)}$$

۱۰. مکان هندسی مرکز دایره هایی که از نقطه $(۲ و ۷)$ می گذرد و بر خط $x=۵$ مماس می شوند، کدام است.

$$x^2+4x+4y+28=0 \text{ (۱)}$$

$$y^2-4x+4y+28=0 \text{ (۲)}$$

$$y^2+4x-4y+26=0 \text{ (۳)}$$

$$y^2-4x-4y+28=0 \text{ (۴)}$$

۱۱. سهمی $y^2+2y-4x+5=0$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی دایره ای رسم می کنیم که به خط هادی سهمی مماس شود. نقطه برخورد این دایره با سهمی کدام می تواند باشد.

$$(۱) (۲ و ۳) \quad (۲) (۱ و ۱) \quad (۳) (۲ و ۱) \quad (۴) (۳ و ۲)$$

۱۲. معادله سهمی با کانون $F(۱ و -۲)$ و خط هادی $x=۴$ کدام است.

$$y^2-2y+12x=11 \text{ (۱)}$$

$$y^2-2y+12x=-25 \text{ (۲)}$$

$$y^2+2y+12x=11 \text{ (۳)}$$

$$y^2+2y+12x=-25 \text{ (۴)}$$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

۱۳. کانون سهمی $y^2 + 2y + 4x = 3$ روی کدام خط قرار دارد.

(۱) محور x ها (۲) نیمساز ناحیه اول و سوم (۳) محور y ها (۴) نیمساز ناحیه دوم و چهارم

طول قطر غیرکانونی بیضی گذرنده از نقطه $(1, 10)$ ، با کانون‌های $F(2, 5)$ و $F'(2, -3)$ کدام است؟

(۲) $8\sqrt{5}$

(۱) ۱۶

(۴) $4\sqrt{5}$

(۳) ۸

وتری از سهمی به معادله $y^2 = 4(x + y)$ که از کانون بر محور تقارن آن عمود باشد، قطری از یک دایره است. معادله این دایره کدام است؟

(۲) $x^2 + y^2 + 4y = 0$

(۱) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

(۴) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

(۳) $x^2 + y^2 - 2y = 2$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

یک اشعه نورانی را در امتداد خط $x = 3$ و اشعه دیگر را در امتداد خط $x = -1$ ، از داخل سهمی به معادله $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$ ، بر آن می‌تابانیم. مختصات نقطه تلاقی بازتاب این دو پرتو، کدام است؟

(۲) (۱, ۴)

(۱) (۱, ۳)

(۴) (۲, ۳)

(۳) (۲, ۲)

یک بیضی به قطرهای $AA' = 14$ و $BB' = 4\sqrt{6}$ و کانون F نزدیک به نقطه A ، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه F ، دایره به قطر AA' را در نقطه M ، قطع می‌کند. اندازه پاره خط AM ، کدام است؟

(۲) $2\sqrt{7}$

(۱) ۷

(۴) $2\sqrt{3}$

(۳) $2\sqrt{6}$

در سهمی به معادله $y^2 + ay + bx - 9 = 0$ ، معادله خط هادی، $x = \frac{13}{4}$ و محور تقارن آن $y = 1$ است. مقدارهای b ، کدام‌اند؟

(۲) ۵, ۷

(۱) ۵, ۸

(۴) ۳, ۷

(۳) ۴, ۸

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

دایره‌ای به مرکز $(3, 1)$ بر روی خط راست $12y + 5x = 15$ ، وترى به طول $2\sqrt{21}$ جدا می‌کند. این دایره بر روی محور x ها، وترى با کدام اندازه جدا می‌کند؟

(۲) ۶

(۱) $2\sqrt{6}$

(۴) ۸

(۳) $2\sqrt{15}$

از میان دایره‌های گذرا از نقطه $A(2, 3)$ و مماس بر خطوط $3x - 4y = 0$ و $y = 0$ ، کوچک‌ترین شعاع دایره کدام است؟

(۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

(۴) $\frac{13}{9}$

(۳) $\frac{5}{3}$

در یک بیضی به قطرهای ۸ و $2\sqrt{7}$ واحد و کانون‌های F و F' ، دایره‌ای به قطر $F'F$ بیضی را در نقطه M ، قطع می‌کند. فاصله نقطه M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

(۲) $2/5$

(۱) $4 - 2\sqrt{2}$

(۴) ۳

(۳) $4 - \sqrt{2}$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

اگر نقطه $F(-\frac{5}{2}, -2)$ کانون سهمی $y^2 + ay + bx + 1 = 0$ باشد، کوچک‌ترین مقدار b ، کدام است؟

(۲) -۳

(۱) -۴

(۴) ۲

(۳) -۲

کوچک‌ترین دایره گذرا بر دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲) $0, -3$

(۱) $1, -3$

(۴) $3, -2$

(۳) $2, -1$

در سهمی به معادله $5y^2 - 10y + 4x - 3 = 0$ ، فاصله کانون تا نقطه تلاقی سهمی با محور x ها، کدام است؟

(۲) $1/25$

(۱) $1/2$

(۴) $1/45$

(۳) $1/3$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

خط گذرا بر کانون سهمی به معادله $3y^2 - 6y + 18x + 10 = 0$ و عمود بر محور آن، سهمی را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. طول وتر AB کدام است؟

(۲) $3\sqrt{2}$

(۱) ۴

(۴) ۶

(۳) ۵

در یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{2}{3}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

(۲) 90°

(۱) 60°

(۴) 150°

(۳) 120°

نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

(۲) $2, -4$

(۱) $3, -5$

(۴) $-1 \pm \sqrt{3}$

(۳) $-1 \pm \sqrt{2}$

درسنامه، نکته و تست هندسه دوازدهم فصل دوم امین پناه

در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

(۲) $0/64$

(۱) $0/6$

(۴) $0/8$

(۳) $0/75$

وتر مشترک دایره به معادله $x^2 + y^2 = 17$ ، با دایره C گذرا بر نقطه $(-1, 6)$ ، بر خط به معادله $2x - y = 3$ منطبق است. شعاع دایره C کدام است؟

(۲) $2\sqrt{2}$

(۱) ۳

(۴) ۴

(۳) $2\sqrt{3}$

در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

(۲) ۱۶

(۱) ۱۲

(۴) ۲۰

(۳) ۱۸

