

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

ماتریس

آرایی از اعداد که بصورت مستطیلی یا مربعی نوشته می شود ماتریس نام دارد. هر ماتریس شامل سطروستون می باشد. سطر را با i وستون را با j نمایش می دهیم. اگر تعداد سطرها m و تعداد ستونها n باشد در این صورت مرتبه ماتریس $m \times n$ میباشد.

مثال: درایه های ماتریس $A = [i + 2j]$ که مرتبه آن 3×2 باشد را بدست آورید.

مثال: ماتریس $A = [a_{ij}]$ که در آن $A = \begin{cases} i + j & i > j \\ i - j & i < j \\ 2i & i = j \end{cases}$ باشد را تشکیل دهید. (مرتبه ماتریس 3×3)

انواع ماتریس:

۱. ماتریس مربع: اگر تعداد سطرها و تعداد ستونهای ماتریس برابر باشد ماتریس مربعی است.

۲. ماتریس قطری: اگر در ماتریس مربعی درایه های غیر قطر اصلی صفر باشد ماتریس قطری است

۳. ماتریس اسکالر: اگر در ماتریس قطری درایه های قطر اصلی با هم برابر باشد ماتریس اسکالر است

۴. ماتریس واحد: اگر در ماتریس اسکالر درایه های روی قطر اصلی یک باشد واحد است $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ماتریسهای مساوی:

دو ماتریس A و B را مساوی یکدیگر می گوئیم اگر ۱. هم مرتبه باشند ۲. درایه های متناظر مساوی باشند

مثال: اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} X + 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & y - 2 \\ z + 1 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند حاصل

$X + Y + Z$ را بدست آورید

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2X - Y & 5 \\ Z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=A$ در این صورت حاصل $X+Y+Z$ را

بیابید

جمع ماتریسها

جمع دو ماتریس در صورتی امکان پذیر است که هم مرتبه باشند. برای جمع کردن دو ماتریس درایه های متناظر را با هم جمع می کنیم.

ضرب عدد در ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه های ماتریس ضرب می کنیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ و $r=2$ و $s=-5$ باشد مطلوبست ماتریس $SB - rA$

قرینه ماتریس

قرینه ماتریس A را با نماد $-A$ نشان می دهیم و از ضرب ماتریس A در عدد (-1) بدست می آید

در این صورت $A + (-A) = 0$

خواص مهم جمع ماتریسها و ضرب عدد در ماتریس

$$A+B=B+A$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

$$A+0=0+A=A$$

$$A+(-A)=(-A)+A=0$$

$$r(A \pm B) = rA \pm rB$$

ضرب ماتریسها

ضرب دو ماتریس A و B در صورتی امکان پذیر است (AXB) که تعداد ستونهای ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد.

نکته: اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد در این صورت ماتریس AXB تعریف شده است و حاصل ماتریسی از مرتبه $m \times n$ است.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ باشند مطلوبست ماتریس AXB

مثال: در مثال قبل آیا BXA امکان پذیر است؟ چرا؟

مثال: اگر A ماتریسی 5×3 باشد در این صورت در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید که AXB و BXA قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید.

1) $B = [bij] \quad 3 \times 2$

2) $B = [bij] \quad 5 \times 3$

ویژگیهای ضرب ماتریسها

1) $AXB \neq BXA$

2) $AXI = IXA = A$

3) $AX(B+C) = (AXB) + (AXC)$

4) $AX(BXC) = (AXB)XC$

5) $(A+I)^2 = A^2 + A + I$

6) $(I)^n = I$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بدست آورید که حاصل ضرب AXB ماتریسی قطری باشد.

ماتریسهای تعویض پذیر: اگر ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابجایی داشته باشند تعویض پذیر هستند.

مثال: اگر A و B ماتریسهای 3×3 و تعویض پذیر باشند ثابت کنید:

1) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: اگر ضرب ماتریسهای $A = \begin{bmatrix} X & Y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند $x+y$ را بیابید.

نکته

تست: اگر $A = [i + 2j] \times 3 \times 3$ و $B = [i2 - j] \times 3 \times 3$ باشد، درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس $2A+B$ کدام است.

۱۱(۱) ۹(۲) ۱۰(۳) ۱۲(۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه درایه واقع در سطر اول، ستون دوم A^2 کدام است.

۱۰(۱) ۱۵(۲) ۴۲(۳) ۰(۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $A^2 = mA + nI$ باشد، $m+n$ کدام است.

۰(۲) -۵(۱) -۹(۳) ۱۰(۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

تست: اگر ماتریسهای $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -x & 3 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشند $x+y$ کدام است.

- ۰(۱) -۱(۲) ۱(۳) ۳(۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد حاصل A^{1393} برابر است با:

- ۱(۱) $2^{696}A$ (۲) A (۳) $2^{696}A$ (۴)

تست: اگر A ماتریسی مربعی و $A(A+I) = -I$ باشد، آنگاه حاصل A^{200} کدام است.

- ۱(۱) A (۲) A^2 (۳) 0 (۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، A^{63} کدام است.

- $\begin{bmatrix} 64 & 63 \\ 63 & 62 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 64 & 63 \\ -63 & -62 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 64 & -63 \\ 63 & -62 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 64 & 63 \\ 63 & -62 \end{bmatrix}$ (۱)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

تست: اگر A یک ماتریس باشد به طوری که $A^2 = A + I$ ، ماتریس A^4 کدام است.

$2A + 3I$ (۴) $3A^2 + 4I$ (۳) $A^2 + I$ (۲) $3A + 2I$ (۱)

تست: اگر $A + B = 5I$ باشد، حاصل $A^2 + 5B + AB$ کدام است.

$15I$ (۴) $25I$ (۳) $10I$ (۲) $5I$ (۱)

تست: از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 2X \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ عدد غیر صفر X کدام است.

$\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{9}$ (۳) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۱)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

دترمینان ماتریس

به هر ماتریس مربعی مانند A می توان یک عدد حقیقی نسبت داد که به این عدد حقیقی دترمینان ماتریس A می گوئیم و با نماد $|A|$ نمایش می دهیم.

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس 2×2 باشد در این صورت $|A| = ad - bc$

نکته: دترمینان ماتریس می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

مثال: دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ را بیابید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $|A + B| + 2|AB|$ کدام است.

ماتریس کهاد:

مثال: ماتریس مربعی 3×3 $A = [i + 2z]$ مفروض است. ماتریسهای کهاد سطر دوم، ستون سوم و سطر اول، ستون دوم را بیابید.

همسازه

مثال: در مثال قبل همسازه سطر دوم، ستون سوم را بدست آورید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

دترمینان ماتریس 3×3 به روش بسط دادن

در این روش با انتخاب یک سطر یا ستون دلخواه، هر درایه را در همسازه نظیر همان درایه ضرب کرده و حاصل را با یکدیگر جمع می‌کنیم.

مثال: دترمینان ماتریس 3×3 $A = [i - 3j]$ را به روش بسط دادن بدست آورید.

دترمینان ماتریس 3×3 به روش ساروس

در این روش یا سطرهای اول و دوم را زیر سطر سوم تکرار می‌کنیم و یا ستونهای اول و دوم را بعد از ستون سوم تکرار می‌کنیم و سپس به صورت زیر تکرار می‌کنیم.

مثال: به روش ساروس دترمینان ماتریس 3×3 $A = [3i + 2j]$ را بدست آورید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

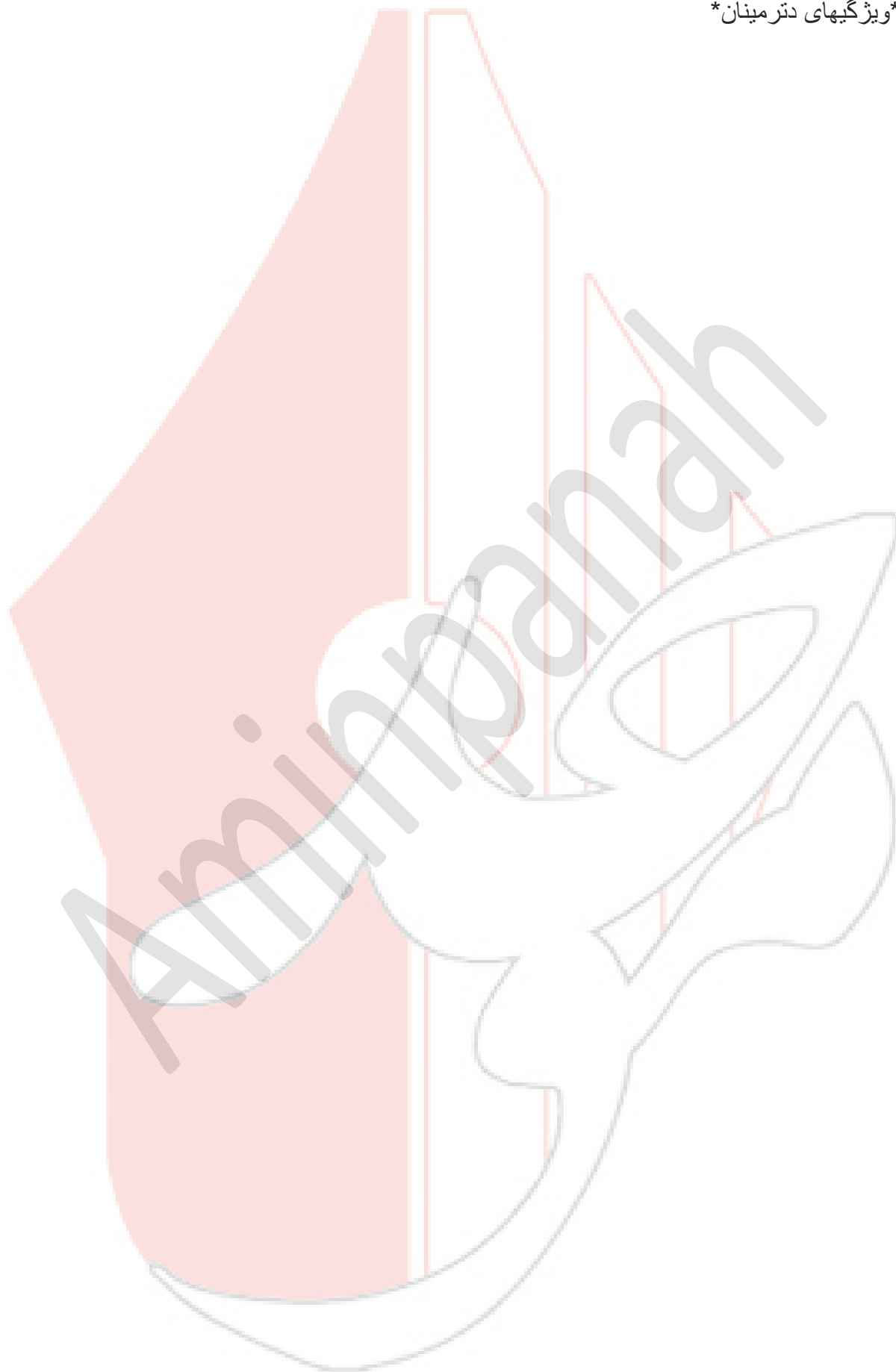
مثال: در دترمینان $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & a \end{vmatrix}$ اگر به درایه سطر سوم و ستون سوم، ۵ واحد اضافه کنیم حاصل دترمینان چه تغییری می کند.

مثال: در دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & a \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ اگر با تغییر درایه سطر سوم، ستون اول حاصل دترمینان تغییر نکند، مقدار a کدام است.

تست: به ازای کدام مقدار k ، معادله $\begin{vmatrix} x & 0 & k \\ 1 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ فقط یک ریشه دارد.

۱) ۲) ۳) ۴) ۵)

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A| \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ کدام است.



درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

تست: اگر به درایه سطر اول ستون سوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ سه واحد اضافه کنیم آن گاه به

مقدار دترمینان A چقدر اضافه می شود؟

۳(۱) -۳(۲) ۶(۳) -۶(۴)

تست: اگر $|A|=2$ و A ماتریسی از مرتبه ۳ باشد حاصل $| -2A |$ کدام است.

-۴(۱) ۴(۲) ۱۶(۳) -۱۶(۴)

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $| -3A |$ کدام است.

۲۴(۱) -۲۴(۲) ۲۱۶(۳) -۲۱۶(۴)

تست: مقادیر X از رابطه $= 0$ کدام است؟ $\begin{vmatrix} 0 & X-3 & X-2 \\ X+3 & 0 & -4 \\ X+2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

۱-۶(۱) -۱-۶(۲) ۱-۶(۳) ۱-۶(۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

وارون ماتریس: برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A را با نماد A^{-1} نمایش می دهیم
بطوریکه $AA^{-1}=I$

نکته: ضرب هر ماتریس در وارون آن خاصیت جابجایی دارد.

مثال: نشان دهید دو ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ وارون یکدیگر هستند.

نکته: اگر A یک ماتریس وارون پذیر باشد در این صورت $|A| \neq 0$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & a \end{bmatrix}$ یک ماتریس وارون پذیر باشد حدود a کدام است؟

مثال: به ازای کدام مقدار a ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix}$ وارون پذیر نیست؟

ویژگیهای ماتریس وارون:

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ دترمینان $(A^{-1})^2$ کدام است.

مثال: اگر $A^3 = 2I$ باشد وارون ماتریس A^{-1} را بدست آورید.

مثال: اگر $A^3 + A^2 - 2I = 0$ باشد آن گاه وارون ماتریس A را بدست آورید.

مثال: اگر $A^3 = 9I$ باشد وارون ماتریس $A - 2I$ را بدست آورید.

تست: اگر $|A| \neq 0$ و $A^3 = 2A$ آن گاه وارون $I - A$ کدام است؟

A^{-1} $-I^{-1}$ $A + I^{-1}$ $A - I^{-1}$

تست: اگر A و B دو ماتریس وارون پذیر باشند و $A + B = AB$ آن گاه $A^{-1} + B^{-1}$ کدام است؟

O^{-1} I^{-1} $A + B^{-1}$ AB^{-1}

مثال) وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس $A^{-1} + A^2$ را بدست آورید.

حل دستگاه دو معادله، دو مجهول به کمک ماتریس وارون:

برای حل دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ به روش ماتریس وارون به صورت زیر عمل می کنیم

مثال: دستگاه معادلات زیر را به کمک ماتریس وارون حل کنید

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \quad (2)$$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید

۱) هر یک از این معادلات، معادله یک خط در صفحه می باشد. شیب هر یک از این دو خط را معلوم کنید. آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲) ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید. آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ چرا؟

مثال: دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و ماتریس $\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با ماتریس وارون بدست آورید.

مثال: به ازای چه مقداری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ جواب منحصر بفرد دارد.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

*بحث در وجود ریشه های دستگاه معادلات

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} (m-3)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار m فاقد جواب است؟

مثال: در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ وارون ماتریس ضرایب مجهولات به صورت

است $x+y$ کدام است. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$4(4)$ $2(3)$ $-2(2)$ $-4(1)$

مثال: اگر A وارون پذیر و $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد مجموع درایه های ماتریس X را بدست آورید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثال: اگر دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ دارای جواب نباشد مقدار m کدام است؟

مثال: اگر دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} 1 & m \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$ دارای بی شمار جواب باشد مقادیر m و n را بدست آورید.

مثال: اگر جواب x از دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - y = 1 \\ bx + 2y = 3 \end{cases}$ برابر $5, 2$ باشد مقدار $2a+b$ را بدست آورید.

تست: اگر در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 3 \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ باشد مقدار $x+y$ کدام است؟

۸(۱) ۱۲(۲) ۹(۳) ۶(۴)

تست: در دستگاه معادلات $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 2x \end{bmatrix}$ حاصل $x+2y$ کدام است؟

۸(۱) ۰(۲) -۸(۳) -۴(۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

مثالها و تستهای تکمیلی

۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد آن گاه معکوس ماتریس A^3 کدام است؟

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ (۱)
 $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (۲)
 $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ (۳)
 $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (۴)

۲. اگر $A^{-1} = 3A^2$ و ماتریسی 3×3 باشد در این صورت $|A|$ کدام است؟

3 (۱)
 $\frac{1}{3}$ (۲)
 -3 (۳)
 $-\frac{1}{3}$ (۴)

۳. اگر به تمام درایه های ستون دوم ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{bmatrix}$ یک واحد اضافه شود به دترمینان ماتریس اولیه کدام عدد اضافه می شود؟

-3 (۱)
 -2 (۲)
 3 (۳)
 6 (۴)

۴. اگر دو ماتریس A و $I-A$ وارون هم باشند ماتریس A^4 کدام است؟

A (۱)
 $-A$ (۲)
 I (۳)
 $-I$ (۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۵. اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} x-y & 3 \\ 1-x & z \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ x+y & z \end{bmatrix}$ برابر باشند، مقدار $x+y$ کدام است.

- ۱(۱) $-۱(۲)$ $۵(۳)$ $-۵(۴)$

۶. ماتریس A دارای $m-2$ سطر و m ستون است. اگر A ماتریسی سطری باشد، کامیک از ماتریسهای زیر قطری است.

$$\begin{bmatrix} m-3 & 1-m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & m \\ 2m-6 & m \end{bmatrix} \quad (۲)$$

$$\begin{bmatrix} m & 1-m \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & m-3 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (۴)$$

۷. ماتریسهای $A = \begin{bmatrix} a & b-2 \\ 2c & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 3b \\ -c+4 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر ماتریس $A+B$ ماتریسی اسکالر باشد، مقدار $a+2b-c$ کدام است.

- ۱۱(۱) $۸(۲)$ $۳(۳)$ $۰(۴)$

۸. اگر $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های $A = f(0) + f(\pi) + f(2\pi)$ کدام است.

- ۰(۱) $۲(۲)$ $-۲(۳)$ $۴(۴)$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، آن گاه $B.A$ کدام است.

(۱) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & -12 \\ -6 & 3 & -9 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & -12 \\ -6 & 3 & -9 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -8 & 4 & -12 \\ -6 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ (۴) قابل محاسبه نیست.

۱۰. در ماتریس $A = [2i + 3j - 1]$ درایه سطر اول و ستون آخر، $\frac{4}{3}$ برابر درایه سطر آخر و ستون اول است. این ماتریس مربعی چند سطر دارد.

(۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های ماتریس A^6 کدام است.

(۱) ۶۴ (۲) ۱۲۸ (۳) ۲۵۶ (۴) ۵۱۲

۱۲. اگر $A = 3B^2 - 2B + I$ ، حاصل $(A+B)^2 - (A-B)^2$ کدام است.

(۱) $2BA$ (۲) $2(A+B)$ (۳) $4AB$ (۴) $4(A+B)$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۱۳. اگر $A = \begin{bmatrix} 2X & 1 \\ -1 & Y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $A \cdot B$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه های $A \cdot B$ کدام است.

- (۱) -۷ (۲) ۰ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۴. اگر $A(A-I)=0$ ، حاصل $(A+I)^4$ کدام است.

- (۱) $A+I$ (۲) $12A+I$ (۳) $16I$ (۴) $15A+I$

۱۵. اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند و $(A-B)^2 = A^2 + B^2$ ، کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) $AB=0$ (۲) $AB=BA$ (۳) $BA=0$ (۴) $AB=-BA$

۱۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های ماتریس X در دستگاه $AX=B$ ، کدام است.

- (۱) ۶ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۰

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۱۷. اگر دو ماتریس $A+I$ و $2A$ وارون هم باشند، ماتریس A^4 کدام است.

$\frac{3I}{4}(1)$ $2A+\frac{3I}{4}(2)$ $-2A+\frac{3I}{4}(3)$ $2A-\frac{3I}{4}(4)$

۱۸. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ و ماتریس $A-mI$ وارون پذیر نباشد، مقادیر m کدام است.

3 و $4(1)$ 1 و $6(2)$ 2 و $4(3)$ 2 و $6(4)$

۱۹. اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ ، B ماتریسی وارون پذیر باشد و $A+B=8AB$ ، مجموع درایه های ماتریس B^{-1} کدام است.

$10(1)$ $12(2)$ $14(3)$ $15(4)$

۲۰. اگر دستگاه $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ 2x + my = m^2 \end{cases}$ فاقد جواب باشد، مقادیر قابل قبول برای m کدام است.

$-1(1)$ $2(2)$ 1 و $2(3)$ -1 و $2(4)$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۲۱. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $2(A+I)^{-1}$ کدام است.

(۱) $\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

۲۲. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + (b-1)y = 2 \\ (a+2)x + 2by = 3 \end{cases}$ بی شمار جواب داشته باشد، مقدار $a-b$ کدام است.

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۷ (۴) -۷

۲۳. مجموعه جواب معادله $\begin{vmatrix} 0 & x-4 & x-3 \\ x+2 & 0 & -2 \\ x+1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است.

(۱) ۱ و ۴ (۲) ۲ و ۳ (۳) ۲ و ۵ (۴) ۳ و ۶

۲۴. اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ -1 & |A| \end{bmatrix}$ و $|A| > 1$ ، آنگاه حاصل $|A-I|$ کدام است.

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۲۵. اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد دو تایی مرتب (α, β) کدام است.

- (۱) $(2, 1)$ (۲) $(3, 2)$ (۳) $(1, 4)$ (۴) $(3, 4)$

۲۶. اگر $A^2 = 4A - 3I$ و $A^{-1} = MA + NI$ باشد، حاصل $M + N$ کدام است.

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۲۷. اگر $A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $|A|$ چقدر است.

- (۱) 4 (۲) 2 (۳) 16 (۴) 8

۲۸. اگر $A^2 = A + 2I$ باشد، وارون ماتریس A کدام است.

- (۱) $A - \frac{I}{2}$ (۲) $\frac{A - I}{2}$ (۳) $\frac{A}{2} - I$ (۴) $I + \frac{A}{3}$

۲۹. اگر A ماتریسی 2×2 و غیر صفر باشد به طوری که $A^2 = A$ و $I + \lambda A$ وارون ماتریس

$-3A$ باشد، آن گاه λ کدام است.

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{3}{4}$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۳۰. اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ -11 & -16 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $a+b+c+d$ کدام است.

(۱) ۰ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۳۱. اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ 20x + by = 5 \end{cases}$ بی شمار جواب داشته باشد، کدام دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

(۱) $\begin{cases} 15x - 4y = 1 \\ bx + ay = 3 \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} ax - 15y = 1 \\ 4x + by = 5 \end{cases}$

(۳) $\begin{cases} ax + 15y = 5 \\ bx + ay = 3 \end{cases}$

(۴) $\begin{cases} ax + by = 2 \\ 3ax + 3by = 5 \end{cases}$

۳۲. اگر $A = [i - 2j]_{2 \times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ و $b_{ij} = \begin{cases} i + j^2 & i \geq j \\ j - i & i < j \end{cases}$ ، آنگاه مقدار

$\frac{a_{11}b_{21}}{a_{23}} - b_{12}a_{21}$ کدام است.

(۴) $\frac{-4}{3}$

(۳) $\frac{-3}{4}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{4}{3}$

۳۳. اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $p \times q$ باشد، با چه شرطی ماتریس AB^2 تعریف می شود.

(۴) $n=p=q$

(۳) $m=n=p$

(۲) $m=n=p$

(۱) $m=p=q$

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۳۴. به ازای کدام مقدار k معادله $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 2 & x+2 & 0 \\ k & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ دارای یک ریشه مضاعف است.

۰(۱) ۱(۲) ۲(۳) ۳(۴)

۳۵. اگر A و B دو ماتریس 3×3 باشند، آنگاه حاصل $||B|A| + ||A|B|$ همواره برابر کدام است.

$|AB| + |BA|$ (۴) $|A^3B^3|$ (۳) $|AB^3| + |A^3B|$ (۲) $|B^2| + |A^2|$ (۱)

۳۶. اگر $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6$ xAx باشد آنگاه $|A|$ کدام است.

-۱(۱) ۱(۲) -۶(۳) ۶(۴)

۳۷. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} (A - \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $|A|$ کدام است.

-۹(۱) ۹(۲) ۳(۳) -۳(۴)

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۳۸. اگر $|A|=1$ و $|I+A|=3$ باشد، آنگاه $|A^{-1}+I|$ کدام است.

- ۱) 3 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۹. به ازای چند مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} (2m+1)x - my = 1 \\ -7mx + (m+6)y = -m \end{cases}$ بی شمار جواب دارد.

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

۴۰. اگر $(A-2I)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه های ستون دوم ماتریس $A(A-2I)^{-1}$ کدام است.

- ۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۵ ۴) ۱۶

۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ، آنگاه A^{10} کدام است.

- ۱) $-I$ ۲) $-A$ ۳) A ۴) A^2

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۴۲. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ از رابطه ماتریسی $AX = A - 2I$ ماتریس X کدام است.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (۱)

تست: اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 4$ آنگاه دترمینان ماتریس A . $|A|$ کدام است.

۲۵۶ (۴) ۱۲۸ (۳) ۹۶ (۲) ۶۴ (۱)

سوالات امتحان نهایی

۰/۱۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس می‌نامیم. ب) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی
۲	درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d, d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد. ب) صفحه‌ای با مولد سطح مخروط دولری، موازی است و از راس آن عبور نمی‌کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است. پ) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم A^3 برابر ۵ می‌باشد. ت) اگر $A^2 = A$ باشد در این صورت داریم: $(A+I)^2 = I+2A$
۱/۲۵	اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i, j & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A - 3I$ را به دست آورید.
۰/۷۵	اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $ A = -2$ حاصل $ A \cdot A $ را بیابید.
۱/۵	اگر ضرب ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ تعویض پذیر باشد حاصل $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ x & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2 & -y \end{bmatrix}$ را بیابید.
۱	دستگاه $\begin{cases} (m-2)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$ به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.

۱/۷۵	دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & m-2 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $ A + B $ را محاسبه کنید.
۱/۲۵	الف) اگر $A = \begin{bmatrix} A & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $ A $ را بیابید. ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.
۱/۲۵	در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix}$ مقدار x را بیابید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $ A^3 $ را محاسبه کنید.
۱/۲۵	در معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ مقدار x را بیابید.
۱/۲۵	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + 3y = -3 \\ 4x + (m+4)y = 2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.
۱/۵	معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.
۱	در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.
۱/۵	اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید.
۰/۷۵	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $ A \neq 0$ ، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد. ب) در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود. پ) برای بردار غیر صفر \vec{a} در \mathbb{R}^3 داریم: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
۱/۲۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.
۲	اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ که $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، الف) حاصل ماتریس $A \times B$ را به دست آورید. ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید.
۰/۷۵	مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.
۱/۵	دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

درس و نکته و تست هندسه دوازدهم تهیه و تنظیم: امین پناه

۱/۲۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس BA^T را به دست آورید.
۱/۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7 را به دست آورید.
۱/۲۵	اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4a+b \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^T - B = \bar{O}$ (\bar{O} ماتریس صفر است)
۱/۲۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$