

## فصل سوم

### بردار در فضا

تهیه و تنظیم: امین پناه

فضای سه بعدی:

در فضای سه بعدی سه محور  $X$  و  $Y$  و  $Z$  وجود دارد که دو به دو بر یکدیگر عمود می باشند.  
بوسیله سه محور و مبدا مختصات، صفحات  $XOY$  و  $XOZ$  و  $YOZ$  تشکیل می گردد که این سه صفحه  
فضا را به ۸ ناحیه تقسیم می کند. چهار ناحیه بالای صفحه  $XY$  قرار دارد که در این چهار ناحیه  $Z$   
مثبت است و چهار ناحیه پایین صفحه  $XY$  قرار دارد و در این چهار ناحیه  $Z$  منفی است.

فاصله دو نقطه در فضا:

اگر دو نقطه  $A(X_1, Y_1, Z_1)$  و  $B(X_2, Y_2, Z_2)$  در فضا مفروض باشند فاصله این دو نقطه برابر است با

مثال: فاصله دو نقطه  $(2, -4, 2)$  و  $(-1, 0, -2)$  را بدست آورید.

مثال: کمترین فاصله دو نقطه  $(m-1, 2, 1)$  و  $(-1, 0, 1)$  را بدست آورید.

تست: اگر نقاط  $A(0, 3, -1)$  و  $B(m-1, 1, -2)$  و  $C$  مختصات راسهای مثلث متساوی الاضلاع  
باشند کمترین مساحت این مثلث کدام است.

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}(2) \quad \frac{5\sqrt{3}}{4}(3) \quad \sqrt{5}(4) \quad 5\sqrt{3}(1)$$

تست: اگر نقاط  $A(3, 2, -1)$  و  $B(4, 1, 0)$  در فضا مفروض باشند و نقطه  $M$  در فضا متغیر باشد  
آنگاه کمترین مقدار  $|MB| + |MA|$  کدام است.

$$0(1) \quad \sqrt{3}(2) \quad 2\sqrt{3}(3) \quad \sqrt{3}/2(4)$$

تست: نقاط  $A(3-1 و 2)$  و  $B(7 و 2 و 2)$  در فضا مفروض است. مکان هندسی نقاطی در فضا که از نقطه  $A$  به فاصله ۳ و از  $B$  به فاصله ۴ باشد کدام است.

- (۱) تهی (۲) یک نقطه (۳) ۴ نقطه (۴) دایره

تصویر نقطه  $A(X, Y, Z)$  روی محورها و صفحات مختصات:

تست: مکان هندسی نقاطی در صفحه  $XOY$  که از نقطه  $(4 و 3 و -2)$  به فاصله ۵ باشد کدام است.

- (۱) تهی (۲) یک نقطه (۳) دایره ای به شعاع ۴ (۴) دایره ای به شعاع ۳

تست: اگر نقطه  $A'$  تصویر نقطه  $(4 و -1 و m^2-1 و -2)$  روی صفحه  $XOZ$  و نقطه  $A''$  تصویر نقطه  $A$  روی محور  $Z$  ها باشد  $|A'A''|$  کدام است.

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳)  $\sqrt{20}$  (۴) به  $m$  بستگی دارد

قرینه نقطه  $A(X,Y,Z)$  روی محورهای مختصات:

تست: نقاط  $A(۱-۲ و ۳)$  و  $B(۴ و ۲ و -۱)$  مفروضند. فاصله نقطه  $A'$  قرینه نقطه  $A$  نسبت به محور  $X$ ها از نقطه  $B'$  تصویر نقطه  $B$  روی صفحه  $XOY$  کدام است.

$$\sqrt{10}(۴)$$

$$\sqrt{29}(۳)$$

$$\sqrt{17}(۲)$$

$$\sqrt{24}(۱)$$

معادلات صفحات و محورهای مختصات:

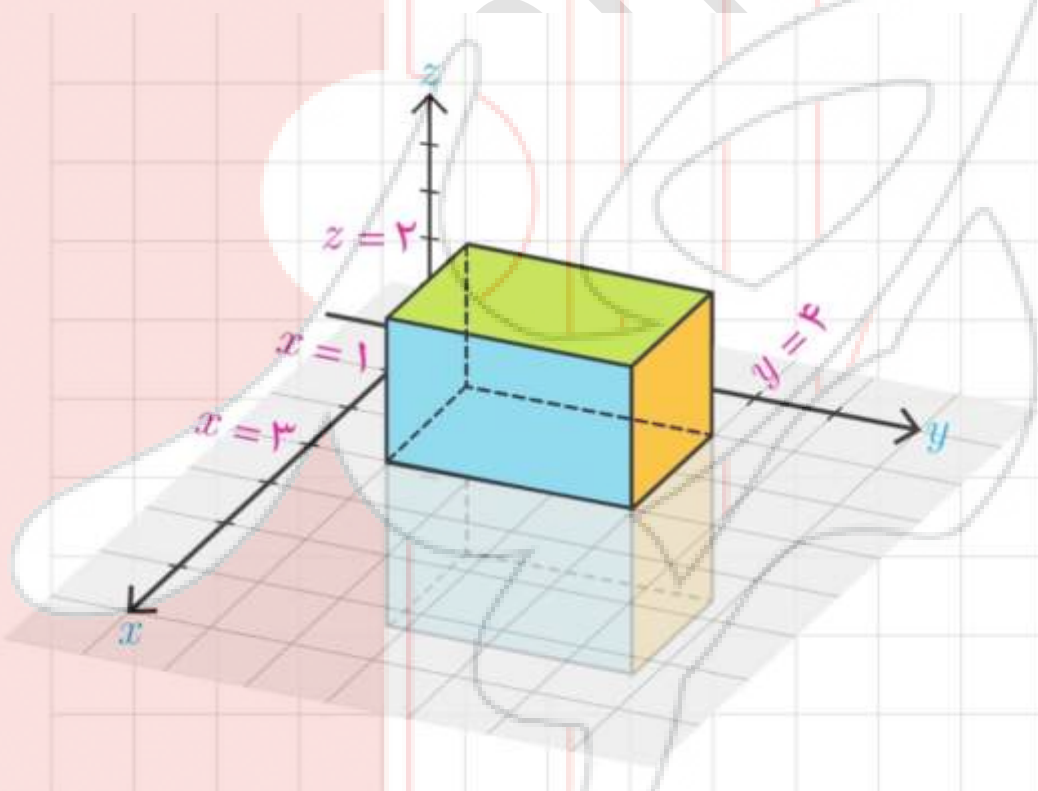
مثال: معادله پاره خطی را بنویسید که دو نقطه  $A(1,2,-2)$  و  $B(1,2,3)$  را به یکدیگر وصل می کند.

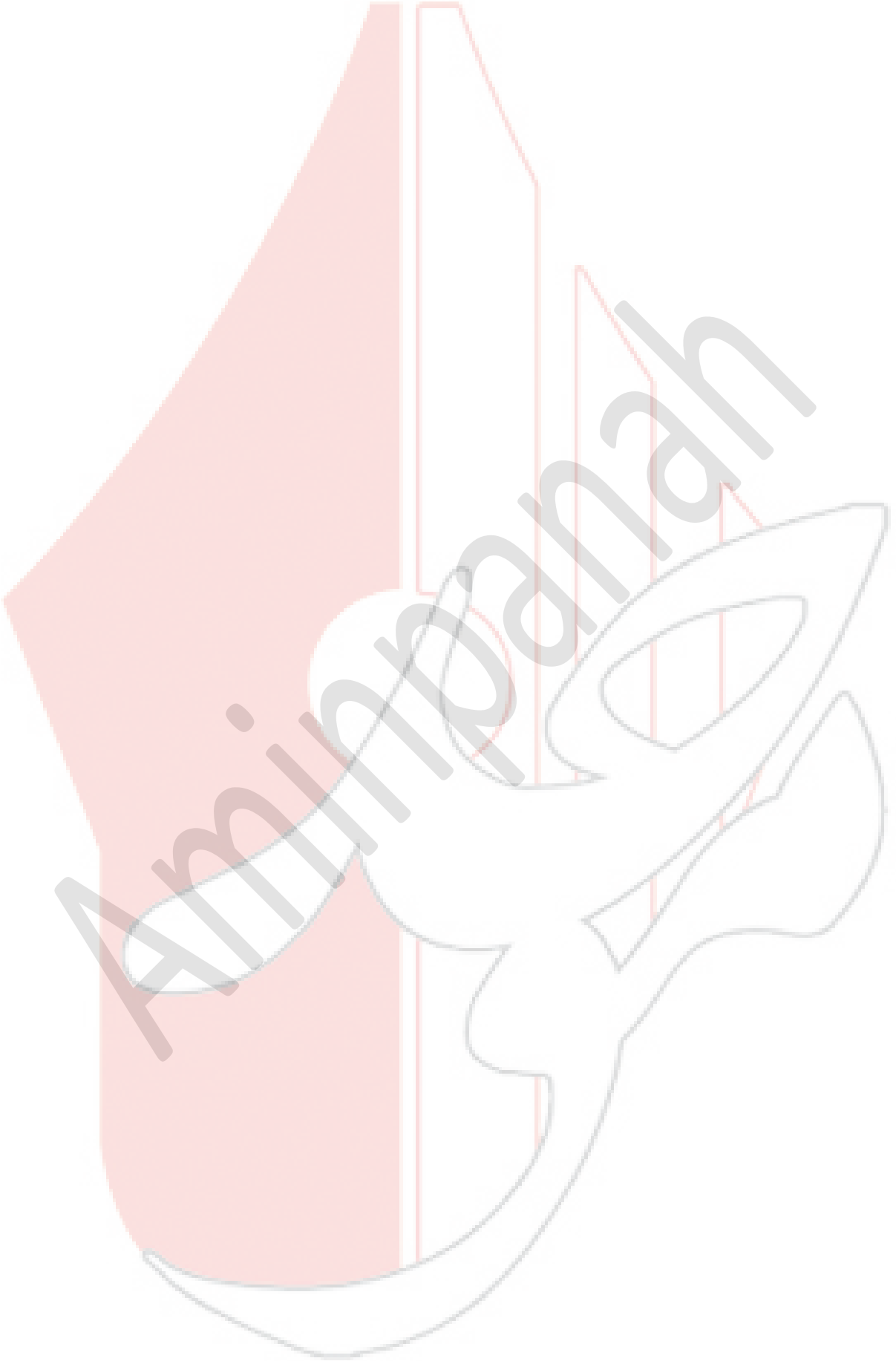
مثال: معادله پاره خطی را بنویسید که دو نقطه  $A(2,-3,4)$  و  $B(2,2,4)$  را به یکدیگر وصل می کند.

مثال: در مکعب مستطیل شکل زیر:

۱. معادله وجه های آبی رنگ، سبز رنگ و نارنجی رنگ را بنویسید.

۲. معادله پال مشترک وجه ها را بنویسید.





بردار در فضا و طول بردار:

مثال: نقاط  $A(3, 2, -1)$  و  $B(4, 1, 3)$  در فضا مفروض است.

۱. مولفه های بردار  $AB$  را بدست آورید.

۲. طول بردار  $BA$  را بدست آورید.

تست: اندازه تصویر بردار  $a$  روی صفحات  $xoy$  و  $xoz$  و  $yoz$  به ترتیب  $\sqrt{7}$  و  $\sqrt{12}$  و  $\sqrt{13}$  می باشد. اندازه بردار  $a$  کدام است.

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

تست: حاصل  $\vec{BO} + \vec{AB} + \vec{OC}$  کدام است.

$\vec{BC}$ (۴)

$\vec{OA}$ (۳)

$\vec{AC}$ (۲)

$2\vec{AB}$ (۱)

تست: حاصل  $3\vec{OA} + 6\vec{BO} + 2\vec{AO} + 5\vec{OB}$  کدام است.

$\vec{BA}$ (۴)

$\vec{AB}$ (۳)

$\vec{OB}$ (۲)

$\vec{OA}$ (۱)

ضرب عدد در بردار:

مثال: اگر  $\vec{a}$  (۳ و ۲ و ۱) و  $\vec{b}$  (۲ و ۵ و ۳) و  $r=2$  باشد حاصل  $r\vec{a}-\vec{b}$  را بدست آورید.

ویژگیهای جمع بردارها:

$$a+b=b+a \quad (1)$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c \quad (2)$$

$$a+0=0+a=a \quad (3)$$

$$a+(-a)=(-a)+a=0 \quad (4)$$

$$r(a+b)=ra+rb \quad (5)$$

$$(r+s)a=ra+sa \quad (6)$$

$$(rs)a=r(sa) \quad (7)$$

بردار یکه: برای سه محور  $x, y, z$  سه بردار به طول واحد وجود دارد که بر این سه محور منطبق می باشند. این سه بردار با نمادهای  $i$  و  $j$  و  $k$  مشخص می گردند که به آنها بردارهای یکه محور های مختصات می گوئیم. مولفه های این سه بردار برابر است با

مثال: بردار  $\vec{a}$  (۳ و ۱ و ۲) را بر حسب بردارهای یکه محور های مختصات بنویسید.

دو بردار موازی:



تست: اگر سه نقطه  $A(0, -1, a)$  و  $B(1, b, 1)$  و  $C(4, -2, 2)$  بر یک خط راست واقع باشند حاصل  $3a-4b$  کدام است.

$$8(4)$$

$$6(3)$$

$$5(2)$$

$$7(1)$$

ضرب داخلی دو بردار: برای دو بردار  $a$  و  $b$  ضرب داخلی دو بردار را بصورت  $a \cdot b$  نمایش می دهیم که حاصل آن یک عدد است و این عدد می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

\* اگر اندازه های دو بردار  $a$  و  $b$  و زاویه بین دو بردار مشخص باشد در این صورت ضرب داخلی دو بردار برابر است با

ویژگیهای ضرب داخلی دو بردار:

مثال: اگر اندازه های دو بردار  $a$  و  $b$  به ترتیب  $2$  و  $3$  و زاویه بین دو بردار  $60^\circ$  باشد مطلوبست  
 $(2a-b) \cdot (a+3b)$

مثال: برای سه بردار  $a, b, c$  اگر  $|a|=2$  و  $|b|=3$  و  $|c|=1$  باشد با این خاصیت که  $a+b+c=0$  مقدار  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$  را بدست آورید.

تست: اگر  $a+b+c=0$  و  $|a|=5$  و  $|b|=6$  و  $|c|=7$  حاصل  $a \cdot c$  کدام است.  
 $-18(1)$        $19(2)$        $18(3)$        $-19(4)$

تست: اگر  $a+b+c=0$  و  $|a|=3$  و  $|b|=4$  و  $|c|=6$  باشد حاصل  $a \cdot b + b \cdot c$  کدام است.  
 $-14(1)$        $-15(2)$        $-16(3)$        $-17(4)$

تست: اگر  $a$  و  $b$  بردارهایی یکه باشند بطوریکه  $|\sqrt{2}a + \sqrt{3}b| = \sqrt{7}$  باشد زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  کدام است.

$60(1)$        $30(2)$        $120(3)$        $150(4)$

تست: اگر  $|a|=4$  و  $|b|=3$  و  $|a-b|=\sqrt{13}$  باشد، زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  کدام است.

$$60^\circ(4)$$

$$30^\circ(3)$$

$$120^\circ(2)$$

$$90^\circ(1)$$

مثال: در مکعب با طول یال  $a$  ضرب داخلی دو قطر را بدست آورید.

ضرب داخلی دو بردار بر حسب مولفه های دو بردار:

اگر بردارهای  $a(a_1, a_2, a_3)$  و  $b(b_1, b_2, b_3)$  در فضا مفروض باشند در این صورت ضرب داخلی دو بردار برابر است با:

مثال: ضرب داخلی دو بردار  $a(1-2-4)$  و  $b(3-1-3)$  را بدست آورید.

تست: اگر بردارهای  $(2-1-m)$  و  $(0-1-2)$  قطره های یک لوزی باشند، مساحت لوزی کدام است.

$\sqrt{5}/2(1)$        $\sqrt{5}/2(3)$        $4$  به  $m$  بستگی دارد

تست: اگر دو بردار  $a(2-1-3)$  و  $b$  موازی باشند و  $a.b=28$  آنگاه مجموع مولفه های بردار  $b$  کدام است

$12(1)$        $10(2)$        $8(3)$        $6(4)$

تست: در مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  به طول ضلع  $1$  اگر ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  باشد حاصل  $AB.AC+AB.AH$  کدام است.

$5/4(1)$        $4/5(2)$        $3/4(3)$        $4/3(4)$

زاویه بین دو بردار: اگر مولفه های دو بردار  $a$  و  $b$  در فضا معلوم باشد در این صورت زاویه بین دو بردار برابر است با :

مثال: زاویه بین بردارهای  $a(3-1-2)$  و  $b(1-5-3)$  را بدست آورید.

تست: اگر  $A(5-2-1)$  و  $B(7-1-3)$  و  $C(5-1-4)$  سه راس مثلث  $ABC$  باشند، اندازه زاویه  $A$  کدام است.

۹۰(۴)

۶۰(۳)

۴۵(۲)

۳۰(۱)

مثال: اگر زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  برابر  $60^\circ$  درجه باشد مطلوبست زاویه بین دو بردار  $a+b$  و  $a-2b$

نکته: اگر زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  کمتر از  $90^\circ$  باشد آنگاه  $a \cdot b > 0$  و در صورتی که زاویه بین دو بردار بزرگتر از  $90^\circ$  باشد  $a \cdot b < 0$

مثال: حدود  $m$  را طوری بدست آورید تا زاویه بین دو بردار  $(3-1-m)$  و  $(4-2-1)$  منفرجه گردد.

تصویر بردار  $a$  روی  $b$  :

مثال: تصویر بردار  $(3a - 2b)$  را روی بردار  $(a + b)$  بدست آورید.

مثال: بردارهای  $(a - b)$  و  $(a + 2b)$  مفروضند. تصویر بردار  $a - b$  را روی بردار  $a + 2b$  بدست آورید.

تست:  $a$  و  $b$  دو بردار غیر صفر و نا هم راستا هستند. اگر  $a'$  تصویر  $a$  بر  $b$  و نیز  $b'$  تصویر  $b$  بر  $a$  باشد حاصل  $\frac{a \cdot b' + b \cdot a'}{a \cdot b}$  برابر کدام است.

۰(۴

۴(۳

۲(۲

۱(۱

نامساوی کوشی-شوارتس:

مثال: اگر  $4x - 2y + 6z = 12$  باشد کمترین مقدار عبارت  $4x^2 + y^2 + 9z^2$  را بدست آورید.

ضرب خارجی:

برای دو بردار  $a$  و  $b$  ضرب خارجی دو بردار را بصورت  $a \times b$  نمایش می دهیم که حاصل آن یک بردار است و این بردار بر هر دو بردار  $a$  و  $b$  و در نتیجه بر صفحه بردارهای  $a$  و  $b$  عمود است.

\* اگر جهت چرخش چهار انگشت دست راست از بردار  $a$  به سمت بردار  $b$  باشد در این صورت انگشت شست بردار  $a \times b$  را نمایش می دهد.

\* اگر اندازه های دو بردار  $a$  و  $b$  و زاویه بین دو بردار مشخص باشد در اینصورت ضرب خارجی دو بردار برابر است با :

ویژگی های ضرب خارجی دو بردار:

مثال: اگر  $(1 و 2 و 3)$  و  $a$  باشند بردار  $a \times b$  را تشکیل دهید.

مثال: در متوازی الاضلاع ABCD اگر  $\vec{AB}=a$  و  $\vec{AD}=b$  اضلاع متوازی الاضلاع باشند حاصل  $AC \times BD$  کدام است.

تست: اگر  $|V_1 \times V_2|=4$  باشد اندازه بردار  $(V_1+V_2) \times (3V_1-V_2)$  کدام است.

۸(۱)      ۰(۲)      ۱۶(۳)      ۴(۴)

تست: اگر  $a-2b+3c=0$  و  $|a \times c|=2$  آنگاه  $|b \times a|$  کدام است.

۳(۱)      ۲(۲)      ۱,۵(۳)      ۰,۵(۴)

تست: سه بردار  $a, b, c$  بطول واحد مفروضند. اگر زاویه بین دو بردار  $b$  و  $c$  برابر  $60^\circ$  باشد و زاویه بین بردار  $a$  با صفحه بردار های  $b$  و  $c$  برابر  $60^\circ$  باشد حاصل  $a \cdot (b \times c)$  کدام است.

$\frac{3}{4}$ (۱)       $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)       $\frac{1}{2}$ (۳)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)



تست: اگر  $(a-m)$  و  $(a+2b)$  مفروض باشند و  $(a-2b) \cdot (3a \times b) = 0$  باشد مقدار  $m$  کدام است.

۱(۱)  $-1(2)$   $2(3)$   $4(4)$  هر مقدار  $m$

تست: زاویه بین دو بردار  $a$  و  $b$  کمتر از  $90^\circ$  است. اگر  $|a|=6$  و  $|b|=5$  و  $|a \times (a+b)|=18$  حاصل  $a \cdot (a+b)$  کدام است.

۵۴(۱)  $56(2)$   $60(3)$   $64(4)$

تست: اگر  $CD$  موازی  $AB$  باشد و نقطه  $M$  از  $C$  به  $D$  حرکت کند بردار ضرب خارجی  $AB \times AM$  چگونه تغییر می کند.

۱) طول آن کم میشود ولی جهت تغییر نمی کند.

۲) طول ثابت است ولی جهت تغییر می کند

۳) طول و جهت ثابت است.

۴) طول و جهت تغییر می کند.

مساحت متوازی الاضلاع:

اگر بوسیله دو بردار  $a$  و  $b$  متوازی الاضلاع ساخته شود مساحت متوازی الاضلاع برابر است با

مثال: بردارهای  $(1, 1)$  و  $a$  و  $(2, 2)$  و  $b$  مفروض است. مساحت متوازی الاضلاع را بیابید که با بردارهای  $a-b$  و  $3a+4b$  ساخته می شود.

مساحت مثلث:

اگر بوسیله دو بردار  $a$  و  $b$  مثلثی ساخته شود در این صورت مساحت مثلث برابر است با

مثال: اگر  $(1, 2)$  و  $a$  و  $(2, 0)$  و  $b$  باشند مساحت مثلثی را بیابید که بوسیله بردارهای  $a-b$  و  $4a+5b$  ساخته میشود.

مثال: اگر نقاط  $A(2, 1)$  و  $B(1, 0)$  و  $C(3, 2)$  سه راس مثلث  $ABC$  باشند، مساحت مثلث  $ABC$  را بدست آورید.

تست: دو بردار  $a$  و  $b$  با طولهای ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویه ۳۰ می سازند. مساحت مثلثی که بوسیله دو بردار  $a-2b$  و  $3a+2b$  ساخته می شود کدام است.

۴۸(۴)

۴۲(۳)

۳۶(۲)

۲۴(۱)

تست: اگر  $a-b+c=0$  و  $|a|=5$  و  $|b|=6$  و  $|c|=7$  باشد حاصل  $|b \times c|$  کدام است.

۳۷۶(۴)

۱۲۷۶(۳)

۶۷۶(۲)

۲۴۷۶(۱)

ضرب مختلط سه بردار:

\* اگر سه بردار در یک صفحه باشند در این صورت ضرب مختلط سه بردار صفر است.

مثال: آیا بردارهای  $(1, 9, 1)$  و  $c(1, 3, 1)$  و  $b(1, 1, 3)$  و  $a(1, 3, 2)$  در یک صفحه اند.

تست: اگر سه بردار  $(1, m, 1)$  و  $(2, 1, 0)$  و  $(1, 1, 3)$  در یک صفحه باشند مقدار  $m$  کدام است.

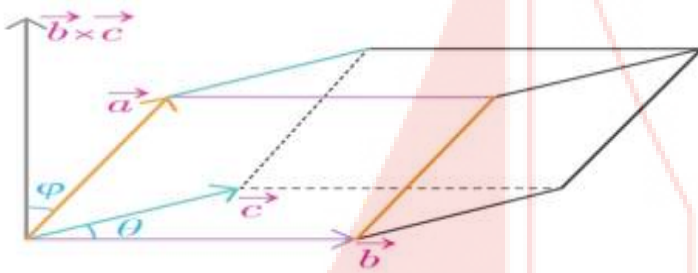
-۱(۴)

۱(۳)

۲(۲)

-۲(۱)

حجم متوازی السطوح: اگر بوسیله سه بردار  $a$  و  $b$  و  $c$  متوازی السطوح ساخته شود در این



صورت حجم آن برابر است با:

مثال: حجم متوازی السطوحی را بدست آورید که توسط بردارهای  $(0, 1, 0)$  و  $(1, 0, 1)$  و  $(1, 1, 0)$  تولید میشود.

رابطه بین ضرب داخلی و خارجی:

مثال: بردارهای  $a$  و  $b$  مفروض اند به طوری که  $|a|=3$ ، و  $|b|=26$ ، و  $|a \times b|=72$  مقدار  $a \cdot b$  را بدست آورید.

## تستهای تکمیلی:

۱. نقاط  $A=(۲و۳و۴)$  و  $B=(۲و۳و۰)$  مفروض اند. نقطه  $M$  بر روی پاره خط  $AB$  چنان قرار دارد که بردار  $MA=-3MB$ . مختصات  $M$  کدام است.

$$(۱) (۱-و۳و۱) \quad (۲) (۱-و۳و-۲) \quad (۳) (۲و۳و۱) \quad (۴) (۱و۳و-۱)$$

۲. اگر  $AB=(۱و۲و۳)$  و  $AC=(۳و۲و۱)$  باشند مختصات  $BC$  کدام است.

$$(۱) (۲-و۰و۲) \quad (۲) (۲-و۰و۴) \quad (۳) (۴و۴و۴) \quad (۴) (۲-و۲و۲)$$

۳. چند نقطه در فضا وجود دارد که از نقطه  $(۲و-۱و۵)$  به فاصله ۴ واحد بوده و از  $(۴و۲و۱)$  به فاصله ۳ واحد باشد.

$$(۱) \text{بی شمار} \quad (۲) ۲ \quad (۳) ۱ \quad (۴) \text{صفر}$$

۴. کدام بردار بر هر دو بردار  $i-2j$  و  $j-2k$  عمود است.

$$(۱) (۴و۲و۲) \quad (۲) (۴و-۲و۱) \quad (۳) (۲و۰و-۱) \quad (۴) (۴و۲و۱)$$

۵. اگر  $k(a+b)=2b$  و  $|a|=۳$  و  $|b|=۱$  باشد،  $k$  کدام عدد می تواند باشد.

$$(۱) -۱ \quad (۲) ۱ \quad (۳) -۲ \quad (۴) ۲$$

۶. اگر  $|a|=2$  و  $|b|=13$  و  $a.b=24$  باشد مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای  $a+b$  و  $a-b$  ساخته می شود کدام است.

- ۵(۱)      ۱۰(۲)      ۲۰(۳)      ۴۰(۴)

۷. اگر بردارهای  $(k-1, 2)$  و  $(3, 2)$  و  $(-4, 2)$  هم صفحه باشند مقدار  $k$  کدام است.

- $\frac{-2}{7}$ (۱)       $\frac{4}{7}$ (۲)       $\frac{-3}{7}$ (۳)       $\frac{2}{7}$ (۴)

۸. فاصله تصویر نقطه  $A(-1, 1)$  روی محور  $Z$  ها، از قرینه نقطه  $A$  نسبت به صفحه  $xoy$  کدام است.

- ۵(۱)      ۲(۲)      ۳(۳)      ۴(۴)

۹. مساحت مثلثی که با دو بردار  $i-j$  و  $k+i$  ساخته می شود، کدام است.

- $\sqrt{3}$ (۱)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)       $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)       $2\sqrt{2}$ (۴)

۱۰. حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار  $(1, 2, 3)$ ،  $(-1, 0, 1)$  و  $(1, 2, 0)$  کدام است.

- ۶(۱)      ۲(۲)      ۳(۳)      ۴(۴)

۱۱. اگر دو بردار  $a = (3m, 2m-1, m)$  و  $b = (0, -1, m)$  بر هم عمود باشند،  $|a-b|$  کدام است.

- ۱)  $\sqrt{11}$       ۲)  $3$       ۳)  $\sqrt{13}$       ۴)  $4$

۱۲. بر روی دو بردار  $a = 2i + j + k$  و  $b = k - j$  یک متوازی الاضلاع ساخته شده است. زاویه بین دو قطر متوازی الاضلاع کدام است.

- ۱)  $60^\circ$       ۲)  $45^\circ$       ۳)  $30^\circ$       ۴)  $90^\circ$

۱۳. سه بردار  $(1, 3, 1)$ ،  $(1, m, 2)$  و  $(1, m-1, 1)$  در یک صفحه قرار دارند.  $m$  کدام است.

- ۱)  $2$       ۲)  $0$       ۳)  $1$       ۴)  $-1$

۱۴. مثلث  $ABC$ ، مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع  $2$  است. حاصل عبارت

$(AC \cdot CB)AB - (AB \cdot BC)AC$  کدام است.

- ۱)  $2CB$       ۲)  $2BC$       ۳)  $4CB$       ۴)  $4BC$

۱۵. طول تصویر قائم بردار  $v = (3i + j) \times (j - k)$  بر صفحه  $xy$ ، چند برابر طول تصویر قائم آن بر صفحه  $yz$  است.

- ۱)  $\sqrt{5}$       ۲)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       ۳)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$       ۴)  $\frac{1}{3}$

۱۶. اگر  $|a \times b| = \sqrt{3}$  و  $a.b=1$  باشد، طول تصویر قائم بردار  $a$  بر راستای بردار  $b$ ، چند برابر  $|a|$  است.

$\frac{1}{3}(۴)$

$\frac{2}{3}(۳)$

$\frac{1}{2}(۲)$

$\frac{1}{4}(۱)$

۱۷. اگر  $a, b, c$  سه عدد حقیقی باشند، حداکثر مقدار عبارت  $\frac{(4a+b+c)}{4a+b+c}$  کدام است.

$۶(۴)$

$۴(۳)$

$۳(۲)$

$۲(۱)$



